Авторы благодарят Т. А. Черепанову за постоянный интерес и поддержку при проведении данной работы, а также за ее полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шефталь Н. Н., Бузынин А. И.** Преимущественная ориентация кристаллов на субстрате и влияние царапин.— Вестн. МГУ. Сер. 4. Геология, 1972, № 3.
2. **Klykov V. I.** Diataxy (graphoepitaxy) from aqueous solutions.— In: Intern. Conf. on Industrial Crystallization. Czechoslovakia, Liberec, 1983.
3. **Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д. и др.** Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976.

Поступила 2/I 1985 г.

УДК 532.529.6

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНЫЙ ДРЕЙФ КАПЛИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Л. К. Антановский, Б. К. Копбосынов

(Новосибирск)

1. Математическая формулировка задачи о движении капли вязкой жидкости под действием термокапиллярных сил заключается в следующем [1]. Требуется найти поверхность Γ_t, разбивающую пространство R^3 на ограниченную односвязную область Ω_t^+ и ее дополнение $\Omega_t^- = R^3 \setminus \bar{\Omega}_t^+$, и поле скоростей $\mathbf{v}$, давлений p, температур T, зависящих от времени t и пространственных координат $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и удовлетворяющих дифференциальным уравнениям

$$(1.1)\qquad \partial\mathbf{v}/\partial t + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} = -\rho^{-1}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{g},\ \nabla\cdot\mathbf{v} = 0,$$

$$\partial T/\partial t + \mathbf{v}\cdot\nabla T = \chi\nabla^2 T \text{ в } R^3\backslash\Gamma_t,$$

условиям сопряжения

$$(1.2)\qquad [P\cdot\mathbf{n}]_-^+ = \sigma K\mathbf{n} + \nabla_\Gamma\sigma, V_n = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n},\ [\mathbf{v}]_-^+ = 0,$$

$$[\varkappa\partial T/\partial n]_-^+ = 0,\ [T]_-^+ = 0 \text{ на } \Gamma_t,$$

условию на бесконечности

$$(1.3)\qquad \mathbf{v} \to 0 \text{ при } |\mathbf{x}| \to \infty$$

и начальным условиям

$$(1.4)\qquad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0,\ T = T_0,\ \Gamma_t = \Gamma_0 \text{ при } t = 0.$$

Здесь плотность ρ, кинематический коэффициент вязкости ν, коэффициенты температуропроводности χ и теплопроводности $\varkappa$ являются кусочно-постоянными с поверхностью разрыва Γ_t; коэффициент поверхностного натяжения σ — известная функция температуры; $P = -pI + 2\mu D(\mathbf{v})$ — тензор напряжений; $\mu = \rho\nu$ — динамический коэффициент вязкости; I — единичный тензор; $D(\mathbf{v})$ — тензор скоростей деформаций, равный симметричной части тензора $\nabla\mathbf{v}$; V_n — скорость движения Γ_t вдоль нормали $\mathbf{n}$, внешней по отношению к Ω_t^+; K — сумма главных кривизн Γ_t (след тензора кривизны); ∇ и ∇_Γ — операторы градиента в R^3 и на Γ_t соответственно. Символом $[\cdot]_-^+$ обозначается скачок, т. е. $[f]_-^+ = f^+ - f^-$, где $f^\pm$— предельные значения функции $f(\mathbf{x}, t)$ при стремлении $\mathbf{x}$ к точке поверхности Γ_t из $\Omega_t^\pm$. Плотность массовых сил $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$, функции $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$, $T_0(\mathbf{x})$ и поверхность Γ_0 заданы.

Из граничных условий (1.2) видно, что поля скоростей и температур непрерывны при переходе через Γ_t, а поле давлений и касательные напряжения терпят скачок. В результате при наличии градиента температуры возникают термокапиллярные силы, которые совместно с архимедовыми приводят к дрейфу капли. Для простоты здесь рассматривается частный вариант начальных условий: $\mathbf{v}_0 = 0$, $T_0 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$, $\Gamma_0 = \{|\mathbf{x}| = a\}$. Кроме того, предполагается, что $\mathbf{A} = (0, 0, A)$ и $\mathbf{g} = (0, 0, g(t))$. Эта задача описывает процесс разгона капли термокапиллярными и архимедовыми силами. Случай постоянных σ и g рассмотрен в [2, 3].

2. Перейдем в неинерциальную систему координат, связанную с центром масс капли, движущимся в исходной системе со скоростью $\mathbf{u}(t) = (0, 0, u(t))$, т. е.

$$x' = \mathbf{x} - \int_0^t \mathbf{u}(t)\,dt, \quad t' = t.$$

Введем новые искомые функции

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u},\ p' = p + \rho x[\mathbf{g} - d\mathbf{u}/dt],\ T' = T,$$

тогда в штрихованных переменных система уравнений (1.1), (1.2) преобразуется в систему такого же вида с $\mathbf{g}' = 0$, $V_n' = V_n - \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}$, $P' = -[p' + \rho\mathbf{x}'(d\mathbf{u}/dt - \mathbf{g})]I + 2\mu D(\mathbf{v}')$.

Предположим, что $\sigma(T) = \sigma_0 - \sigma_1 T$, где σ_0, σ_1 — положительные числа. Выберем в качестве масштабов длины, времени, скорости, давления и температуры величины a, a^2/ν^-, $\sigma_1 Aa/\mu^-$, $\sigma_1 A$ и Aa. Тогда уравнения движения после опускания штрихов принимают вид

$$\partial\mathbf{v}/\partial t + \mathrm{Ma}\,\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} = -\nabla p/\rho^0 + \nu^0\nabla^2\mathbf{v},\ \nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \tag{2.1}$$

$$\mathrm{Pr}\,[\partial T/\partial t + \mathrm{Ma}\,\mathbf{v}\cdot\nabla T] = \chi^0\nabla^2 T \ \text{ в } \Omega_t^+,$$

$$\partial\mathbf{v}/\partial t + \mathrm{Ma}\,\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} = -\nabla p + \nabla^2\mathbf{v},\ \nabla\cdot\mathbf{v} = 0,$$

$$\mathrm{Pr}\,[\partial T/\partial t + \mathrm{Ma}\,\mathbf{v}\cdot\nabla T] = \nabla^2 T \ \text{ в } \Omega_t^-;$$

$$\{-p^+ + p^- + (\rho^0 - 1)(du/dt - \eta)x_3\}\mathbf{n} + 2\mu^0 D(\mathbf{v}^+)\cdot\mathbf{n} - \tag{2.2}$$

$$-2D(\mathbf{v}^-)\cdot\mathbf{n} = (\mathrm{We}^{-1} - T)K\mathbf{n} - \nabla_\Gamma T,$$

$$V_n = \mathbf{v}^+\cdot\mathbf{n},\ V_n = \mathbf{v}^-\cdot\mathbf{n},\ \mathbf{v}^+\cdot\boldsymbol{\tau} = \mathbf{v}^-\cdot\boldsymbol{\tau},$$

$$\varkappa^0\partial T^+/\partial n = \partial T^-/\partial n,\ T^+ = T^- \ \text{на } \Gamma_t;$$

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} \to 0 \ \text{при } |\mathbf{x}| \to \infty; \tag{2.3}$$

$$\mathbf{v} = 0,\ \mathbf{u} = 0,\ T = x_3,\ \Gamma_t = \{|\mathbf{x}| = 1\} \ \text{при } t = 0. \tag{2.4}$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}$ — касательный к Γ_t вектор; $\rho^0 = \rho^+/\rho^-$; $\nu^0 = \nu^+/\nu^-$; $\mu^0 = \rho^0\nu^0$; $\chi^0 = \chi^+/\chi^-$; $\varkappa^0 = \varkappa^+/\varkappa^-$; $\mathrm{Ma} = (\mu^-\nu^-)^{-1}\sigma_1 Aa^2$ — число Марангони; $\mathrm{We} = \sigma_1 Aa/\sigma_0$ — модифицированное число Вебера; $\mathrm{Pr} = \nu^-/\chi^-$ — число Прандтля; $\eta(t) = (\sigma_1 A)^{-1}\rho^- ag\left(\frac{a^2}{\nu^-}t\right)$ — безразмерная плотность массовых сил.

3. Предположим, что Ма и $\mathrm{Bo} = \sup|(\rho^0 - 1)\eta(t)|$ (аналог числа Бонда) много меньше единицы. При заданных физических параметрах жидкостей эти условия осуществляются, если достаточно малы величины $a^2 A$ и $aA^{-1}\sup|g(t)|$*. Разлагая формально функции $\mathbf{v}$, p, T в ряд по Ма, получим для первого приближения задачу (2.1) — (2.4) с $\mathrm{Ma} = 0$, которая допускает точное решение со сферической границей раздела $\Gamma_t = \{|\mathbf{x}| = 1\}$. В этом случае $V_n = 0$ и $K = -2$.

Пусть (r, φ, θ) — сферическая система координат, т. е.

$$x_1 = r\cos\varphi\sin\theta,\ x_2 = r\sin\varphi\sin\theta,\ x_3 = r\cos\theta.$$

Будем искать решение при предположении осевой симметрии. Введем функцию тока $\psi(r, \theta, t)$ равенствами

$$v_r = -\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\quad v_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r},$$

---

* Например, для пузырька воздуха в силиконовом масле при 1410°С и в чистой воде при 15°С Ма и Во меньше единицы, если соответственно a^2A не превосходит $7{,}2\times\times10^{-6}$ и $8{,}7\cdot10^{-4}$ град·см, а $aA^{-1}\sup|g(t)|$ не превосходит 0,17 и 0,15 $\text{см}^3\cdot\text{с}^{-2}\cdot\text{град}^{-1}$.

тогда система Стокса

$$\partial \mathbf{v}/\partial t = -\rho^{-1}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{v}$$

запишется как

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\nu E^2\psi - \frac{\partial \psi}{\partial t}\right\},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \xi} = -\frac{1}{1-\xi^2}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\nu E^2\psi - \frac{\partial \psi}{\partial t}\right\},$$

где $E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1-\xi^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$; $\xi = \cos\theta$. Соответственно компоненты тензора напряжений в терминах ψ имеют вид

$$P_{r\theta} = -\frac{\mu}{(1-\xi^2)^{1/2}}\left\{E^2\psi - 2r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)\right\},$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}P_{rr} = \mu\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{1-\xi^2}\left[E^2\psi - \frac{1}{\nu}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right] + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial \xi^2}\right\}.$$

В результате возникает задача для функций ψ, T и u:

(3.1) $$E^2[\nu^0E^2\psi - \psi_t] = 0,\ \Pr T_t = \chi^0\Delta T \text{ при } r < 1,$$
$$E^2[E^2\psi - \psi_t] = 0,\ \Pr T_t = \Delta T \text{ при } r > 1;$$

(3.2) $$\psi^+ = 0,\ \psi^- = 0,\ \psi_r^+ = \psi_r^-,$$
$$\mu^0(\psi_{rr} - 2\psi_r)^+ - (\psi_{rr} - 2\psi_r)^- = (1-\xi^2)T_\xi,$$
$$\varkappa^0 T_r^+ = T_r^-,\ T^+ = T^- \text{ при } r = 1;$$

(3.3) $$\psi_r/r \to u(1-\xi^2),\ \psi_\xi/r^2 \to -u\xi \text{ при } r \to \infty;$$

(3.4) $$\psi = 0,\ T = r\xi,\ u = 0 \text{ при } t = 0;$$

(3.5) $$(\rho^0 - 1)(u_t - \eta) + \mu^0\left\{\frac{E^2\psi - \nu^{0^{-1}}\psi_t}{1-\xi^2} + \frac{2}{r^2}\psi_{\xi\xi}\right\}_r^+ -$$
$$-\left\{\frac{E^2\psi - \psi_t}{1-\xi^2} + \frac{2}{r^2}\psi_{\xi\xi}\right\}_r^- = 2T_\xi \text{ при } r = 1.$$

Здесь $\Delta = \frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi}\left[(1-\xi^2)\frac{\partial}{\partial \xi}\right]\right\}$; нижние индексы r, ξ, t обозначают частные производные по соответствующим переменным. Уравнение (3.5) возникло после дифференцирования нормальной составляющей динамического условия по ξ.

4. Решение задачи (3.1) — (3.5):

$$\psi(r, \xi, t) = rf(r, t)(1-\xi^2),\quad T(r, \xi, t) = \Theta(r, t)\xi.$$

Пусть $u^*(s)$, $f^*(r, s)$, $\Theta^*(r, s)$ — преобразование Лапласа функций $u(t)$, $f(r, t)$, $\Theta(r, t)$. Тогда, учитывая начальные условия (3.4), получим задачу для u^*, f^*, Θ^*:

(4.1) $$L^2[\nu^0L^2f^* - sf^*] = 0,\ \chi^0L^2\Theta^* = \Pr[s\Theta^* - r] \text{ при } r < 1,$$
$$L^2[L^2f^* - sf^*] = 0,\ L^2\Theta^* = \Pr[s\Theta^* - r] \text{ при } r > 1;$$

(4.2) $$f^{*+} = 0,\ f^{*-} = 0,\ f_r^{*+} = f_r^{*-},\ \mu^0f_{rr}^{*+} - f_{rr}^{*-} = \Theta^*,$$
$$\varkappa^0\Theta_r^{*+} = \Theta_r^{*-},\ \Theta^{*+} = \Theta^{*-} \text{ при } r = 1;$$

(4.3) $$f_r^* \to u^*/2,\ f^*/r \to u^*/2 \text{ при } r \to \infty;$$

(4.4) $$(1-\rho^0)(su^* - \eta^*) + \{f_{rrr}^* + f_{rr}^* - (s+6)f_r^*\}^- =$$
$$= \mu^0\{f_{rrr}^* + f_{rr}^* - (s/\nu^0 + 6)f_r^*\}^+ \text{ при } r = 1,$$

где $L^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{2}{r^2}$.

Из интегрального тождества

$$\int_0^1 (L^2\omega)\, r^3 dr = r^2 (r\omega_r - \omega)_0^1$$

с функцией $\omega = L^2 f^* - (s/\nu^0) f^*$ легко устанавливается, что правая часть уравнения (4.4) равна нулю. Таким образом, условие (4.4) упрощается до следующего:

$$(4.5)\qquad (1-\rho^0)(su^* - \eta^*) + \{f^*_{rrr} + f^*_{rr} - (s+6) f^*_r\}^- = 0 \text{ при } r = 1.$$

5. Уравнения (4.1) с учетом условий ограниченности поля скоростей и температур при $r = 0$ и условий (4.3) имеют общее решение:

$$f^*(r,\ s) = C_1 F(\sqrt{s/\nu^0}\, r) + C_2 r,$$

$$\Theta^*(r,\ s) = r/s + C_3 F(\sqrt{s\mathrm{Pr}/\chi^0}\, r) \text{ при } r < 1,$$

$$f^*(r,\ s) = u^*(s) r/2 + C_4 G(\sqrt{s}\, r) + C_5/r^2,$$

$$\Theta^*(r,\ s) = r/s + C_6 G(\sqrt{s\mathrm{Pr}}\, r) \text{ при } r > 1,$$

где $F(z) = (\mathrm{sh} z/z)'$; $G(z) = (e^{-z}/z)'$; $(\cdot)' = d/dz$. Функции $C_1(s), \ldots, C_6(s)$ определяются из шести уравнений (4.2), а $u^*(s)$ — из уравнения (4.5). В результате получаем

$$f^*(r,s) = \frac{\Theta^*(1,s) + 3(1+\sqrt{s})\, u^*(s)/2}{3 + \sqrt{s} + \mu^0 H(\alpha)} \frac{F(\alpha r) - F(\alpha) r}{\alpha F'(\alpha) - F(\alpha)}, \quad r < 1,$$

$$f^*(r,s) = \frac{\Theta^*(1,s) - 3[2+\mu^0 H(\alpha)]\, u^*(s)/2}{3 + \sqrt{s} + \mu^0 H(\alpha)} e^{\sqrt{s}} \times$$

$$\times \left[G(\sqrt{s} r) - \frac{G(\sqrt{s})}{r^2} \right] + \frac{1}{2} u^*(s) \left(r - \frac{1}{r^2} \right), \quad r > 1,$$

$$\Theta^*(1,s) = \frac{1}{s} \left\{ 1 + (1-\varkappa^0) \left[\varkappa^0 \frac{\beta F'(\beta)}{F(\beta)} - \frac{\gamma G'(\gamma)}{G(\gamma)} \right]^{-1} \right\};$$

$$(5.1)\qquad u^*(s) = \frac{C^*(s)\,\Theta^*(1,s) + (\rho^0 - 1)\,\eta^*(s)}{(1/2 + \rho^0)\, s + B^*(s)}.$$

Здесь $H(z) = \dfrac{z^2 F''(z)}{zF'(z) - F(z)} = \dfrac{z(z^2+6) - 3(z^2+2)\,\mathrm{th}\, z}{(z^2+3)\,\mathrm{th}\, z - 3z}$; $B^*(s) = \dfrac{3}{2}[2 + \mu^0 H(\alpha)]\, C^*(s)$; $C^*(s) = \dfrac{3(1+\sqrt{s})}{3 + \sqrt{s} + \mu^0 H(\alpha)}$;

$$\alpha = \sqrt{s/\nu^0}, \quad \beta = \sqrt{s\mathrm{Pr}/\chi^0}; \quad \gamma = \sqrt{s\mathrm{Pr}}.$$

Имеют место асимптотические формулы

$$H(z) = 3 + O(z^2),\ z \to 0; \quad H(z) = z + O(1/z),\ z \to +\infty.$$

Из асимптотики $B^*(s)$, $C^*(s)$ при $s \to +\infty$ следует, что оригиналы $B(t)$, $C(t)$ — обобщенные функции при $t = 0$. Поэтому естественно представление изображений

$$B^*(s) = B^*(0) + sb^*(s), \quad C^*(s) = C^*(\infty) + c^*(s),$$

где $B^*(0) = 3(2 + 3\mu^0)/[2(1+\mu^0)]$; $C^*(\infty) = 3/(1 + \rho^0 \sqrt{\nu^0})$, а оригиналы $b(t)$, $c(t)$ — обычные функции с асимптотикой при $t \to 0$

$$b(t) = \frac{9\rho^0 \sqrt{\nu^0}}{2(1 + \rho^0 \sqrt{\nu^0})} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + O(1),$$

$$c(t) = -\frac{3(2 - \rho^0 \sqrt{\nu^0})}{(1 + \rho^0 \sqrt{\nu^0})^2} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + O(1),$$

при $t \to \infty$

$$b(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{2+3\mu^0}{1+\mu^0}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + O\left(t^{-3/2}\right),$$

$$c(t) = -\frac{2+3\mu^0}{6(1+\mu^0)^2}\frac{1}{\sqrt{\pi t^3}} + O\left(t^{-5/2}\right).$$

В результате формула (5.1) приводит к интегродифференциальному уравнению для $u(t)$

$$(1/2 + \rho^0)\, u'(t) + \int_0^t b(t - t_1)\, u'(t_1)\, dt_1 + \tag{5.2}$$
$$+ \frac{3(2+3\mu^0)}{2(1+\mu^0)} u(t) = Z(t) + (\rho^0 - 1)\,\eta(t),$$

где $Z(t) = \dfrac{3\Theta(1, t)}{1 + \rho^0 \sqrt{\nu^0}} + \displaystyle\int_0^t c(t - t_1)\,\Theta(1, t_1)\, dt_1.$

6. Предположим, что существует предел функции $\eta(t)$ при $t \to \infty$. Тогда в силу равенства

$$\lim_{t\to\infty} \Theta(1, t) = \lim_{s\to 0} s\Theta^*(1, s) = \frac{3}{2 + \varkappa^0}$$

из (5.1) или (5.2) найдем формулу для предельной скорости

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \frac{2}{(2+\varkappa^0)(2+3\mu^0)} + \frac{2(1+\mu^0)}{3(2+3\mu^0)}(\rho^0 - 1)\lim_{t\to\infty}\eta(t).$$

Первое слагаемое совпадает со скоростью термокапиллярного дрейфа капли в стационарном случае, полученной в [4], а второе — со скоростью всплывания капли под действием архимедовых сил, представляемой формулой Адамара — Рыбчинского.

Аналогичным образом из (5.1) или (5.2) определяем ускорение капли в начальный момент времени

$$(1/2 + \rho^0)\, u'(0) = \frac{3}{1 + \rho^0\sqrt{\nu^0}} + (\rho^0 - 1)\,\eta(0).$$

Кроме того, эти уравнения дают возможность нахождения асимптотического разложения $u(t)$ по целым степеням $\sqrt{t}$ при $t \to 0$ и $t \to \infty$.

В размерных переменных уравнению (5.2) можно придать вид уравнения Ньютона для капли

$$(4/3)\pi a^3\rho^+ \mathbf{u}'(t) = \mathbf{F}_\text{М} + \mathbf{F}_\text{Б} + \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_\text{A},$$

где $\mathbf{F}_\text{М}$ — сила, вызванная эффектом присоединенных масс; $\mathbf{F}_\text{Б}$ — аналог силы Бассе; $\mathbf{F}_S$ — сила Стокса; $\mathbf{F}_T$ — термокапиллярная сила; $\mathbf{F}_\text{A}$ — сила Архимеда:

$$\mathbf{F}_\text{М} = -\frac{2}{3}\pi a^3\rho^-\mathbf{u}'(t),\quad \mathbf{F}_\text{Б} = -\frac{4}{3}\pi a\mu^- \int_0^t b\left(\frac{t - t_1}{a^2/\nu^-}\right)\mathbf{u}'(t_1)\, dt_1,$$

$$\mathbf{F}_S = -2\pi a\mu^- \frac{3\mu^+ + 2\mu^-}{\mu^+ + \mu^-}\mathbf{u}(t),\quad \mathbf{F}_T = -\frac{4}{3}\pi a^2 \frac{d\sigma}{dT} Z\left(\frac{\nu}{a^2} t\right)\mathbf{A},$$

$$\mathbf{F}_\text{A} = \frac{4}{3}\pi a^3\left(\rho^+ - \rho^-\right)\mathbf{g}(t).$$

Если $\mu^0 \to \infty$, то термокапиллярная сила исчезает, а $\mathbf{F}_\text{Б}$ превращается в обычную силу Бассе, возникающую при движении твердого сферического шарика в жидкости; здесь

$$b^*(s) = 9/(2\sqrt{s}),\quad b(t) = 9/(2\sqrt{\pi t}).$$

В другом предельном случае $\mu^0 = 0$ (дрейф пузырька газа)

$$b^*(s) = \frac{6}{\sqrt{s}(3+\sqrt{s})},\ b(t) = 6e^{9t}\operatorname{erfc}(3\sqrt{t}),$$

$$c^*(s) = -\frac{6}{3+\sqrt{s}},\ c(t) = 6\left\{3e^{9t}\operatorname{erfc}(3\sqrt{t}) - \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right\},$$

где $\operatorname{erfc} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_z^\infty e^{-z^2}dz$ — дополнительный интеграл вероятностей. Так как производная $b'(t) = 3c(t)$ суммируема на $(0, \infty)$, то после интегрирования по частям уравнение (5.2) принимает вид

$$(1/2 + \rho^0)u'(t) + 9u(t) + 3\int\limits_0^t c(t-t_1)\,u(t_1)\,dt_1 = 3\Theta(1,t) + \\ + \int\limits_0^t c(t-t_1)\,\Theta(1,t_1)\,dt_1 + (\rho^0 - 1)\,\eta(t).$$

Последнее уравнение можно свести к дифференциальному третьего порядка относительно $u(t)$. Действительно, формулу (5.1) при $\mu^0 = 0$ можно записать как

$$[(1/2 + \rho^0)s(\sqrt{s} + 3) + 9(\sqrt{s} + 1)]u^*(s) = 3(\sqrt{s} + 1)\Theta^*(1, s) + \\ + (\rho^0 - 1)(\sqrt{s} + 3)\eta^*(s) = h^*(s).$$

Умножая левую и правую части этого равенства на символ

$$R^*(s) = (1/2 + \rho^0)s(\sqrt{s} - 3) + 9(\sqrt{s} - 1)$$

и вводя обозначение для полинома третьего порядка

$$Q(s) = (1/2 + \rho^0)^2 s^2(s - 9) + 18(1/2 + \rho^0)s(s - 3) + 81(s - 1),$$

получим дифференциальное уравнение

$$Q(d/dt)u(t) = f(t),$$

где $f(t)$ — обобщенная функция, имеющая изображение $f^*(s) = R^*(s)h^*(s)$.

Теперь можно выделить регулярную часть у $f(t)$ и сингулярную при $t = 0$, в которой содержится информация о граничных условиях для $u(t)$. В результате стандартным способом совершается переход от обобщенной задачи Коши к классической.

При $\mu^0 = \infty$ соответствующее сведение осуществляется к дифференциальному уравнению второго порядка (см. [5]). Формула (5.1) приводится к виду

$$[(1/2 + \rho^0)s + (9/2)(\sqrt{s} + 1)]u^*(s) = (\rho^0 - 1)\eta^*(s)$$

и регуляризуется символом

$$R^*(s) = (1/2 + \rho^0)s - (9/2)(\sqrt{s} - 1).$$

В заключение авторы выражают признательность В. В. Пухначеву за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Napolitano L. G.** Thermodynamics and dynamics of pure interfaces.— Acta Astronautica, 1978, v. 5, N 9.
2. **Sy Francisco, Taunton J. W., Lightfoot E. N.** Transient creeping flow around spheres.— AIChE J., 1970, v. 16, N 3.
3. **Sy Francisco, Lightfoot E. N.** Transient creeping flow around fluid spheres.— AIChE J., 1971, v. 17, N 1.
4. **Братухин Ю. К.** Термокапиллярный дрейф капельки вязкой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 5.
5. **Фортье А.** Механика суспензии. М.: Мир, 1971.

Поступила 11/I 1985 г.