УДК 519.6

О СПЕКТРЕ КОССЕРА ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

С. Д. Алгазин

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526 Москва
E-mail: algazinsd@mail.ru

Рассматривается трехмерная задача о вычислении спектра Коссера первой краевой задачи теории упругости для тела вращения. С использованием расчетных сеток, содержащих 900 и 3600 узлов, установлено, что найденная Э. и Ф. Коссера последовательность собственных значений для шара не описывает весь спектр собственных значений.

Ключевые слова: спектр Коссера, задачи на собственные значения, численный алгоритм без насыщения.

Введение. В векторном уравнении статической теории упругости для однородной изотропной среды

$$\Delta \boldsymbol{u} + \omega \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}(x), \qquad x \in \Omega \quad \text{либо} \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \tag{1}$$

($\omega = (1 - 2\sigma)^{-1}$; σ — постоянная Пуассона; Ω — тело вращения вокруг оси x^3; $x = (x^1, x^2, x^3)$) величина ω рассматривается как спектральный параметр. Целью настоящей работы является исследование спектра пучка операторов в левой части уравнения (1) при краевых условиях

$$\boldsymbol{u}\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

Изучение данной задачи, поставленной в конце XIX в. Э. и Ф. Коссера, проводилось во многих работах (см. работу [1] и библиографию к ней, а также [2]).

Основные результаты определения спектра пучка операторов получены для упругой области Ω (конечной или бесконечной) с достаточно гладкой конечной границей. В случае задачи с краевыми условиями (2) пучок операторов теории упругости имеет счетную систему собственных векторов, ортогональных в метрике интеграла Дирихле; эта система является полной в $L_2(\Omega)$ и $H_1 = \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$. Собственные числа сгущаются к трем значениям $\omega = -1$, -2, ∞; значения $\omega = -1$ и $\omega = \infty$ представляют собой изолированные собственные числа бесконечной кратности.

Изучение спектра пучка операторов теории упругости было начато в работах [3–11], в которых исследовались собственные числа и собственные векторы пучка операторов (1) при краевых условиях, указанных выше, а также при более общих условиях и содержатся приложения к решению основных задач теории упругости. Обзор работ Э. и Ф. Коссера приведен в [2].

Из закона сохранения энергии следует известное неравенство для постоянной Пуассона $-1 < \sigma < 1/2$, справедливое для любой реальной упругой среды. Для этих значений σ

известны теоремы существования, единственности и корректности основных краевых задач. Из указанных теорем следует, что спектру Коссера первой краевой задачи теории упругости могут принадлежать лишь значения ω, находящиеся вне интервала $(1/3, \infty)$, соответствующего интервалу $-1 < \sigma < 1/2$. Это утверждение справедливо и для второй задачи, если ограничиться решениями, ортогональными произвольному жесткому смещению.

Нетрудно показать, что числа $\omega_n = -(2n+1)/n$ и вектор-функции $\boldsymbol{u}_n(x) = c_n(|x|^2 - a^2)\operatorname{grad} F_n(x)$, где $F_n(x)$ — однородный гармонический полином степени n; $c_n = \mathrm{const}$ $(n = 1, 2, \dots)$, являются собственными числами и собственными векторами Коссера первой задачи для шара радиусом a.

1. Первая краевая задача для конечной области. При всех конечных значениях ω, кроме $\omega = -1$, оператор $\Delta^* = \Delta + \omega \operatorname{grad}\operatorname{div}$ является эллиптическим. Следовательно, решения первой краевой задачи теории упругости достаточно гладкие. Для того чтобы можно было использовать это свойство, ниже построен метод дискретизации первой краевой задачи теории упругости, не имеющий насыщения [12, 13]. В настоящее время наиболее распространенным методом решения задач механики деформируемого твердого тела является метод конечных элементов. При использовании этого метода в результате аппроксимации перемещения кусочно-линейной функцией получаются разрывные напряжения. Вместе с тем следует отметить, что большинство задач механики деформируемого твердого тела описывается уравнениями эллиптического типа, которые имеют гладкие решения. Представляется актуальным разработать алгоритмы, учитывающие эту гладкость. Идея создания таких алгоритмов предложена К. И. Бабенко [13]. Применение этой методики при решении эллиптических задач на собственные значения показало, что она является эффективной. Например, при решении задачи на собственные значения для уравнения Бесселя с нулевым индексом на сетке, состоящей из 23 узлов, первое собственное значение определено с точностью до 28 знаков после запятой. В отличие от классических разностных методов и метода конечных элементов, в которых зависимость скорости сходимости от числа узлов сетки является степенной, в предлагаемом методе имеет место уменьшение погрешности по экспоненциальному закону.

Обозначим через A векторный оператор $-\Delta$ при $\boldsymbol{u}\big|_{\partial\Omega} = 0$. Задача (1), (2) равносильна следующей задаче: $A^{-1}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u} - \eta\boldsymbol{u} = 0, \quad \eta = -1/\omega$.

В пространстве $H_1 = \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$ введем скалярное произведение и норму:

$$[u, v] = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_k}\,dx, \qquad |u|^2 = [u, u].$$

Заметим, что эти скалярное произведение и норма совпадают с энергетическим произведением и энергетической нормой введенного выше оператора A. В [2] доказано, что при таком выборе скалярного произведения оператор $B = -A^{-1}\operatorname{grad}\operatorname{div}$ в пространстве H_1 симметричен, неотрицателен и ограничен.

Пусть $\omega \neq -1, -2, \infty$. Тогда оператор $P_\omega = \Delta + \omega\operatorname{grad}\operatorname{div}$ является эллиптическим [2]. В этом случае собственные векторы Коссера пучка P_ω совпадают с известными собственными векторами оператора B.

1.1. *Дискретизация области.* Введем систему криволинейных координат (r, θ, φ), связанную с декартовыми координатами (x^1, x^2, x^3) соотношениями

$$x^1 = v(r,\theta)\cos\varphi, \qquad x^2 = v(r,\theta)\sin\varphi, \qquad x^3 = u(r,\theta). \tag{3}$$

Обозначим через G меридиональное сечение тела Ω и выберем функции u, v следующим образом. Пусть $\psi = \psi(z)$, $\psi = u + iv$, $z = r\exp(i\theta)$ — конформное отображение круга $|z| \leqslant 1$

на внутренность области G; r, θ, φ — сферические координаты. Тогда соотношения (3) задают отображение шара единичного радиуса на внутренность тела Ω. С помощью отображения (3) поверхность шара единичного радиуса переходит в поверхность тела Ω. При этом краевые условия, заданные на $\partial\Omega$, переносятся на поверхность шара.

Обычно при использовании криволинейных координат уравнения для векторных величин записываются в проекциях на оси собственного базиса, координатные векторы которого направлены по касательным к координатным линиям. Этот базис зависит от координат точки пространства. В данном случае применять такой подход нецелесообразно, так как отображение (3) является неоднозначным на оси x^3 (при $v = 0$ значение φ не определено). В результате в решении появляются особенности. Заметим, что при использовании сферической системы координат также возможно появление особенностей в решении. В данном случае следует в качестве искомых функций использовать проекции вектора скорости u^i ($i = 1, 2, 3$) на оси декартовой системы координат, а независимые переменные x^1, x^2, x^3 заменить с помощью (3) на r, θ, φ. Тогда частные производные по декартовым координатам x^i ($i = 1, 2, 3$) можно выразить через производные по r, θ, φ:

$$\frac{\partial U}{\partial x^1} = \alpha\cos\varphi\,\frac{\partial U}{\partial r} + \beta\cos\varphi\,\frac{\partial U}{\partial\theta} - \frac{1}{v}\,\sin\varphi\,\frac{\partial U}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial U}{\partial x^2} = \alpha\sin\varphi\,\frac{\partial U}{\partial r} + \beta\sin\varphi\,\frac{\partial U}{\partial\theta} + \frac{1}{v}\,\cos\varphi\,\frac{\partial U}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial U}{\partial x^3} = \frac{rv'_\theta}{w^2}\,\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{rv'_r}{w^2}\,\frac{\partial U}{\partial\theta},$$

где $U(x^1, x^2, x^3) = U(v\cos\varphi, v\sin\varphi, u)$; $\alpha(r,\theta) = -ru'_\theta/w^2$; $w^2 = u'^2_\theta + v'^2_\theta$; $\beta(r,\theta) = (1 + ru'_\theta v'_r/w^2)/v'_\theta$.

Так как выполняются условия Коши — Римана

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial\theta}, \qquad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial v}{\partial\theta},$$

то система координат (r, θ, φ) является ортогональной и лапласиан скалярной функции в ней имеет вид

$$\Delta\Phi = \frac{r}{vw^2}\Big[\frac{\partial}{\partial r}\Big(rv\,\frac{\partial\Phi}{\partial r}\Big) + \frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\frac{v}{r}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\Big)\Big] + \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}, \qquad w^2 = \Big(\frac{\partial v}{\partial\theta}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial\theta}\Big)^2. \tag{4}$$

В результате вместо задачи (1), (2) получаем задачу для внутренней области шара единичного радиуса (на границе шара ставятся нулевые граничные условия). Далее будем считать, что конформное отображение круга единичного радиуса на внутренность области G известно. Заметим, что существуют надежные алгоритмы численного построения конформного отображения [14].

Для дискретизации лапласиана (4) с однородным краевым условием применим методику, описанную в [12]. В результате получаем дискретный лапласиан в виде h-матрицы

$$H = \frac{2}{L}\sum_{k=0}^{l}{}'\,\Lambda_k \otimes h_k, \qquad L = 2l + 1.$$

Здесь штрих означает, что при $k = 0$ слагаемое имеет коэффициент, равный 1/2; знак "$\otimes$" — кронекерово произведение матриц; h — матрица размером $L \times L$ с элементами $h_{kij} = (\cos k)2\pi(i - j)/L$ ($i = 1, 2, \ldots, L$, $j = 1, 2, \ldots, L$); Λ_k — матрица дискретного оператора, соответствующего дифференциальному оператору

$$\frac{r}{vw^2}\Big[\frac{\partial}{\partial r}\Big(rv\,\frac{\partial\Phi}{\partial r}\Big)+\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\frac{v}{r}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\Big)\Big]-\frac{k^2}{v^2}\,\Phi,\qquad k=0,1,\ldots,l \tag{5}$$

с краевым условием

$$\Phi\big|_{r=1}=0.$$

Для дискретизации дифференциального оператора (5) с однородным краевым условием по координате θ будем использовать сетку, состоящую из n узлов: $\theta_\nu=\pi(y_\nu+1)/2$, $y_\nu=\cos\varepsilon_\nu$, $\varepsilon_\nu=(2\nu-1)\pi/(2n)$, $\nu=1,2,\ldots,n$, а также применим интерполяционную формулу

$$g(\theta)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{T_n(y)g_\nu}{n(-1)^{\nu-1}(y-y_\nu)/\sin\varepsilon_\nu},$$
$$y=\frac{2\theta-\pi}{\pi},\quad g_\nu=g(\theta_\nu),\quad \nu=1,2,\ldots,n,\quad T_n(y)=\cos\left(n\arccos y\right). \tag{6}$$

Первую и вторую производные по θ, входящие в соотношения (5), получим, дифференцируя интерполяционную формулу (6). По координате r будем использовать сетку, состоящую из m узлов: $r_\nu=(z_\nu+1)/2$, $z_\nu=\cos\chi_\nu$, $\chi_\nu=(2\nu-1)\pi/(2m)$, $\nu=1,2,\ldots,m$, а также применим интерполяционную формулу

$$q(r)=\sum_{\nu=1}^{m}\frac{T_m(r)(r-1)q_k}{m(-1)^{\nu-1}(r_\nu-1)(z-z_\nu)/\sin\chi_\nu},$$
$$q_\nu=q(r_\nu),\qquad z=2r-1. \tag{7}$$

Первую и вторую производные по r, входящие в выражение (5), найдем, дифференцируя интерполяционную формулу (7). Далее используется формула для обращения дискретного лапласиана [12]

$$H^{-1}=\frac{2}{L}\sum_{k=0}^{l}{}'\,\Lambda_k^{-1}\otimes h_k,\qquad L=2l+1.$$

1.2. *Используемая система уравнений.* Исходная система уравнений имеет вид

$$\Delta u^{(1)}+\omega\,\frac{\partial\tilde\theta}{\partial x_1}=0,\quad \Delta u^{(2)}+\omega\,\frac{\partial\tilde\theta}{\partial x_2}=0,\quad \Delta u^{(3)}+\omega\,\frac{\partial\tilde\theta}{\partial x_3}=0,$$
$$\tilde\theta=\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_1}+\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_2}+\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_3},$$
$$\alpha\cos\varphi\,\frac{\partial u^{(1)}}{\partial r}+\beta\cos\varphi\,\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\theta}-\frac{1}{v}\,\sin\varphi\,\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\varphi}+\alpha\sin\varphi\,\frac{\partial u^{(2)}}{\partial r}+\beta\sin\varphi\,\frac{\partial u^{(2)}}{\partial\theta}+$$
$$+\frac{1}{v}\,\cos\varphi\,\frac{\partial u^{(2)}}{\partial\varphi}+\frac{rv'_\theta}{w^2}\,\frac{\partial u^{(3)}}{\partial r}-\frac{rv'_r}{w^2}\,\frac{\partial u^{(3)}}{\partial\theta}=\tilde\theta. \tag{8}$$

На координатной сетке $(\theta_\nu, r_\mu, \varphi_k)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$, $k = 0, 1, \ldots, 2l$ последнее уравнение (8) можно записать в дискретном виде

$$\alpha_{\mu\nu} \cos\varphi_k \Big(\sum_{\mu_1=1}^{m} D^{(r)}_{\mu\mu_1} u^{(1)}_{\nu\mu_1 k}\Big) + \beta_{\mu\nu} \cos\varphi_k \Big(\sum_{\nu_1=1}^{n} D^{(\theta)}_{\nu\nu_1} u^{(1)}_{\nu_1\mu k}\Big) -$$
$$- \frac{1}{v_{\mu\nu}} \sin\varphi_k \Big(\sum_{k_1=0}^{2l} D^{(\varphi)}_{kk_1} u^{(1)}_{\nu\mu k_1}\Big) + \alpha_{\mu\nu} \sin\varphi_k \Big(\sum_{\mu_1=1}^{m} D^{(r)}_{\mu\mu_1} u^{(2)}_{\nu\mu_1 k}\Big) +$$
$$+ \beta_{\mu\nu} \sin\varphi_k \Big(\sum_{\nu_1=1}^{n} D^{(\theta)}_{\nu\nu_1} u^{(2)}_{\nu_1\mu k}\Big) + \frac{1}{v_{\mu\nu}} \cos\varphi_k \Big(\sum_{k_1=0}^{2l} D^{(\varphi)}_{kk_1} u^{(2)}_{\nu\mu k_1}\Big) +$$
$$+ \Big(\frac{r v'_\theta}{w^2}\Big)\Big|_{\substack{r=r_\mu\\ \theta=\theta_\nu}} \Big(\sum_{\mu_1=1}^{m} D^{(r)}_{\mu\mu_1} u^{(3)}_{\nu\mu_1 k}\Big) - \Big(\frac{r v'_r}{w^2}\Big)\Big|_{\substack{r=r_\mu\\ \theta=\theta_\nu}} \Big(\sum_{\nu_1=1}^{n} D^{(\theta)}_{\nu\nu_1} u^{(3)}_{\nu_1\mu k}\Big) = \tilde\theta_{\nu\mu k}.$$

В криволинейной системе координат (3) первые три уравнения (8) имеют вид

$$\Delta u^{(1)} + \omega\Big(\alpha \cos\varphi \frac{\partial\tilde\theta}{\partial r} + \beta \cos\varphi \frac{\partial\tilde\theta}{\partial\theta} - \frac{1}{v} \sin\varphi \frac{\partial\tilde\theta}{\partial\varphi}\Big) = 0,$$
$$\Delta u^{(2)} + \omega\Big(\alpha \sin\varphi \frac{\partial\tilde\theta}{\partial r} + \beta \sin\varphi \frac{\partial\tilde\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{v} \cos\varphi \frac{\partial\tilde\theta}{\partial\varphi}\Big) = 0, \qquad (9)$$
$$\Delta u^{(3)} + \omega\Big[\Big(\frac{r v'_\theta}{w^2}\Big)\frac{\partial\tilde\theta}{\partial r} - \Big(\frac{r v'_r}{w^2}\Big)\frac{\partial\tilde\theta}{\partial\theta}\Big] = 0.$$

Эти уравнения можно записать в дискретном виде

$$Hu^{(1)} + \omega\Big[\alpha_{\mu\nu} \cos\varphi_k \Big(\sum_{\mu_2=1}^{m} D^{(\tilde\theta, r)}_{\mu\mu_2} \tilde\theta_{\nu\mu_2 k}\Big) + \beta_{\mu\nu} \cos\varphi_k \Big(\sum_{\nu_2=1}^{n} D^{(\theta)}_{\nu\nu_2} \tilde\theta_{\nu_2\mu k}\Big) -$$
$$- \frac{1}{v_{\mu\nu}} \sin\varphi_k \Big(\sum_{k_2=0}^{2l} D^{(\varphi)}_{kk_2} \tilde\theta_{\nu\mu k_2}\Big)\Big] = 0,$$

$$Hu^{(2)} + \omega\Big[\alpha_{\mu\nu} \sin\varphi_k \Big(\sum_{\mu_2=1}^{m} D^{(\tilde\theta, r)}_{\mu\mu_2} \tilde\theta_{\nu\mu_2 k}\Big) + \beta_{\mu\nu} \sin\varphi_k \Big(\sum_{\nu_2=1}^{n} D^{(\theta)}_{\nu\nu_2} \tilde\theta_{\nu_2\mu k}\Big) +$$
$$+ \frac{1}{v_{\mu\nu}} \cos\varphi_k \Big(\sum_{k_2=0}^{2l} D^{(\varphi)}_{kk_2} \tilde\theta_{\nu\mu k_2}\Big)\Big] = 0,$$

$$Hu^{(3)} + \omega\Big[\Big(\frac{r v'_\theta}{w^2}\Big)\Big|_{\substack{r=r_\mu\\ \theta=\theta_\nu}} \Big(\sum_{\mu_2=1}^{m} D^{(\tilde\theta, r)}_{\mu\mu_2} \tilde\theta_{\nu\mu_2 k}\Big) - \Big(\frac{r v'_r}{w^2}\Big)\Big|_{\substack{r=r_\mu\\ \theta=\theta_\nu}} \Big(\sum_{\nu_2=1}^{n} D^{(\theta)}_{\nu\nu_2} \tilde\theta_{\nu_2\mu k}\Big)\Big] = 0.$$

С учетом (9) имеем

$$Hu^{(1)} + \omega[b^{(1,1)} u^{(1)} + b^{(1,2)} u^{(2)} + b^{(1,3)} u^{(3)}],$$
$$Hu^{(2)} + \omega[b^{(2,1)} u^{(1)} + b^{(2,2)} u^{(2)} + b^{(2,3)} u^{(3)}],$$
$$Hu^{(3)} + \omega[b^{(3,1)} u^{(1)} + b^{(3,2)} u^{(2)} + b^{(3,3)} u^{(3)}].$$

Формулы для $b^{(i,j)}$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$ вследствие их громоздкости в данной работе не приводятся (см. [1]).

2. Результаты численных расчетов. Расчеты проводились на сетке, состоящей из $900 = 10 \times 10 \times 9$ узлов. Таким образом, решаемая спектральная задача имеет размер 2700×2700. Сначала были проведены расчеты на персональном компьютере Pentium IV с тактовой частотой 3 ГГц и объемом оперативной памяти 1 Гбайт (время счета 769,5649 с). Затем были проведены расчеты на суперкомпьютере "Ломоносов" (время счета 79,23 с). Таким образом, достигнуто ускорение в 9,71 раза. Как отмечено выше, вычисляемые собственные значения η оператора B действительны и расположены на отрезке $[0,1]$, $\eta = 1$ и $\eta = 0$ — собственные значения бесконечной кратности, собственные значения конечной кратности могут располагаться только в окрестности значения 1/2. Доступная для реализации алгоритма сетка, состоящая из 900 узлов, позволяет получить только качественные результаты. Выбирались только действительные собственные значения. Для шара получено 380 таких значений. Наибольшие собственные значения 1,665 052 939 063 26, 1,665 052 939 063 93, по-видимому, соответствуют двукратному собственному значению. Собственные значения располагаются равномерно в интервале от этого собственного значения до нуля. Среди малых собственных значений имеются отрицательные (возмущение бесконечнократного нулевого собственного значения). Заметим, что при $\omega = -1$ ($\eta = 1$) оператор теории упругости перестает быть эллиптическим. Видимо, поэтому первое собственное значение существенно отличается от единицы. Для шара спектр Коссера включает 78 собственных значений, близких к нулю, среди которых имеются отрицательные, малые по абсолютной величине (возмущение бесконечнократного нулевого собственного значения), а также группу малых собственных значений (см. приложение в [1]).

Для области, имеющей форму, близкую к форме шара, с четырехлепестковой эпитрохоидой в меридиональном сечении получены результаты, аналогичные результатам для шара. Максимальное действительное собственное значение образовано парой значений 1,783 993 731 201 28, 1,783 993 731 201 94, по-видимому, соответствующих двукратному собственному значению. Собственные значения располагаются равномерно в интервале от этого двукратного собственного значения до нуля (см. [15]). Среди малых собственных значений имеются отрицательные (возмущение бесконечнократного нулевого собственного значения).

Для области, имеющей форму, близкую к форме шара, с 12-лепестковой эпитрохоидой в меридиональном сечении получены результаты, аналогичные приведенным выше. Максимальное действительное собственное значение образовано парой значений 1,781 656 929 251 03, 1,781 656 929 251 73, по-видимому, соответствующих двукратному собственному значению. Собственные значения располагаются равномерно в интервале от этого двукратного собственного значения до нуля (см. [15]). Среди малых собственных значений имеются отрицательные (возмущение бесконечнократного нулевого собственного значения).

Расчеты на сетке, состоящей из $3600 = 20 \times 20 \times 9$ узлов (размер конечномерной задачи $10\,800 \times 10\,800$) выполнялись на суперкомпьютере "Ломоносов". Дальнейшее увеличение сетки невозможно вследствие ограничений на размер массивов в Intel FORTRAN. Время счета составляло 5892,820 с (приблизительно 1,5 ч). Результаты всех расчетов приведены в работе [15]. В табл. 1 представлены результаты расчета простых собственных значений на двух сетках для шара. Приведем стабилизировавшиеся в процессе расчета собственные значения: 0,1179, 0,1996, 0,333 333 333 31, 0,3500, 0,4205, 0,4602, 0,7622, 0,9164, 0,9495, 0,9847, 1,0109, 1,0412, 1,0523, 1,0963, 1,2435, 1,2519, 1,3198, 1,3813. Точные собственные значения равны 0,333 333 333 333 333, 0,4, 0,428 571 428 571 429, 0,444 444 444 444 444.

В табл. 2 представлены результаты расчета простых собственных значений, полученные на двух сетках для 12-лепестковой эпитрохоиды. Приведем стабилизировавшиеся собственные значения (в скобках приведены значения для шара): 0,1262 (0,1179), 0,2097

Таблица 1

Простые собственные значения для шара

$10 \times 10 \times 9$	$20 \times 20 \times 9$	$10 \times 10 \times 9$	$20 \times 20 \times 9$
0,112 594 369 416 905	0,117 886 763 836 272	0,913 790 787 586 701	0,916 430 104 864 064
	0,120 553 157 029 062		0,923 542 672 811 246
	0,128 306 237 234 220		0,925 761 332 672 470
	0,135 821 503 325 417	0,949 245 955 800 711	0,949 451 384 438 961
	0,156 165 461 513 934		0,961 138 815 862 192
	0,164 430 991 008 905		0,964 382 987 968 188
	0,174 423 021 077 294		0,967 036 147 446 555
	0,180 835 027 495 540		0,971 818 653 793 622
0,196 756 985 477 924	0,199 635 954 889 298		0,973 826 482 027 504
	0,220 058 716 521 134		0,974 984 021 223 169
	0,259 292 189 459 337		0,981 110 897 604 900
	0,275 786 461 114 753	0,983 618 646 271 973	0,984 655 173 136 564
	0,288 062 958 848 401		0,989 258 858 600 345
	0,291 237 446 455 822		0,992 167 966 813 627
0,333 333 439 384 143	0,333 333 333 305 685		0,994 113 239 767 428
	0,340 950 756 343 344		0,995 926 091 855 059
0,362 793 797 866 190	0,349 961 063 434 808		0,998 210 694 571 484
	0,413 787 286 660 757		0,998 640 148 055 266
0,448 136 274 301 880	0,420 471 052 043 674		0,999 809 908 105 196
0,496 275 900 470 052	0,460 201 376 972 059		1,000 269 157 263 64
0,511 424 066 961 753	0,547 780 557 530 259		1,005 603 882 864 25
0,646 069 081 933 441	0,603 873 430 069 891	1,010 680 803 605 04	1,010 882 626 592 77
0,657 336 384 715 674	0,652 968 409 598 867		1,011 375 229 983 75
	0,677 073 996 521 768		1,014 985 667 101 61
	0,727 378 710 530 338		1,015 302 898 296 34
	0,753 351 632 960 754		1,021 591 438 950 86
0,766 419 667 076 877	0,762 175 298 198 329	1,052 450 647 468 97	1,041 170 233 149 54
	0,800 372 728 913 824	1,076 463 936 296 02	1,052 326 780 701 39
	0,812 856 577 652 476	1,097 262 334 253 75	1,096 320 380 530 28
	0,824 869 739 905 341		1,160 655 657 478 35
	0,843 852 864 944 329		1,187 905 942 516 33
	0,851 147 260 169 607	1,200 408 388 857 17	1,243 532 850 683 20
	0,879 041 751 346 406	1,231 360 253 087 85	1,251 934 232 170 52
		1,290 423 979 156 64	1,319 813 787 929 35
		1,374 013 404 927 74	1,381 339 157 185 60
			1,433 192 911 698 53
			1,495 391 381 190 34

Таблица 2

Простые собственные значения для 12-лепестковой эпитрохоиды ($\varepsilon = 0{,}0625^*$)

$10 \times 10 \times 9$	$20 \times 20 \times 9$	$10 \times 10 \times 9$	$20 \times 20 \times 9$
0,110 804 279 880 314		0,929 372 618 076 595	0,933 954 278 964 154
0,112 671 104 761 384			0,947 421 234 282 160
0,125 615 323 544 919	0,126 237 976 964 715		0,953 636 420 526 980
	0,128 788 316 065 724		0,964 025 176 454 848
	0,130 340 650 605 563		0,972 906 628 484 782
	0,152 821 967 181 920	0,982 060 197 901 397	0,980 832 056 392 732
	0,165 460 836 560 429	0,986 877 204 983 371	0,989 044 888 931 997
	0,171 502 812 463 290		0,991 609 063 969 919
0,202 654 236 338 402	0,209 668 576 339 935		0,997 451 173 269 537
0,237 715 767 360 373	0,265 916 847 999 614		0,997 535 407 557 866
	0,281 088 537 817 383	1,037 119 662 274 26	1,007 169 722 766 95
	0,288 313 343 089 704	1,058 186 095 154 03	1,015 303 966 667 59
	0,295 990 615 021 352	1,060 576 238 842 93	1,028 911 659 024 12
0,349 006 695 944 960	0,344 325 001 723 211		1,047 240 265 680 29
	0,458 568 247 374 905		1,079 507 372 249 10
	0,459 362 533 424 304		1,090 746 704 133 48
0,517 759 965 601 340			1,100 468 840 658 87
0,559 182 399 868 026	0,547 287 711 975 407		1,107 190 294 908 08
0,591 972 578 002 258	0,566 148 948 637 169		1,118 484 250 353 41
	0,613 338 740 408 983		1,133 384 220 268 28
	0,619 324 929 967 613		1,154 469 157 627 75
	0,629 718 180 429 766	1,207 484 973 229 83	
	0,641 022 897 769 312	1,214 474 331 427 49	
	0,653 706 550 558 114		1,327 105 580 020 39
	0,740 679 363 511 111		1,332 747 337 998 90
	0,751 742 242 802 985		1,485 872 164 987 64
	0,773 230 978 892 657		1,490 464 246 747 31
	0,785 527 884 781 166	1,520 875 362 181 40	
	0,793 174 117 108 877		
0,816 694 242 370 377	0,829 637 901 784 335	1,568 552 026 503 59	1,551 714 448 900 69
0,843 983 207 650 729	0,848 847 970 319 254		1,716 921 438 376 67
	0,858 908 470 658 364		
	0,877 741 637 448 348		

* Конформное отображение задается формулой $\psi(z) = z(1+\varepsilon z^n)$, где $n = 12$, $\varepsilon = 1/16$.

Таблица 3

Простые собственные значения для четырехлепестковой эпитрохоиды ($\varepsilon = 1/6^*$)

$10 \times 10 \times 9$	$20 \times 20 \times 9$	$10 \times 10 \times 9$	$20 \times 20 \times 9$
	0,103 540 867 969 912	0,756 397 242 359 128	0,752 524 795 195 906
	0,115 423 144 069 097		0,803 397 447 945 336
	0,116 717 233 948 770	0,823 847 218 698 065	0,844 917 732 416 287
	0,118 600 499 967 902		0,868 843 549 184 985
	0,121 716 126 192 851		0,889 250 218 386 658
	0,125 412 475 021 409		0,906 199 038 964 698
	0,154 819 716 091 806		0,920 781 689 616 224
	0,162 012 199 121 237		0,939 586 242 293 432
	0,178 942 464 034 625		0,946 749 668 183 977
0,199 027 745 544 503	0,189 536 378 042 215		0,952 912 691 609 357
	0,204 998 754 378 960		0,964 340 463 687 406
0,245 062 957 430 077	0,241 136 113 229 521		0,970 394 282 580 333
0,281 877 202 237 993	0,282 775 084 542 247	0,982 703 737 490 345	0,977 861 419 265 791
	0,286 265 097 209 682		0,978 576 348 258 642
	0,308 604 121 891 831		0,983 963 216 524 097
0,319 676 749 081 843	0,319 149 432 718 689		0,988 587 109 824 213
0,340 904 116 601 753	0,344 242 768 815 489		0,997 919 725 292 600
	0,376 718 653 963 574		0,998 089 173 141 593
	0,406 243 384 829 760		0,999 068 064 817 289
0,424 538 966 716 410	0,439 072 936 972 483		0,999 708 987 653 697
0,479 621 061 023 855	0,492 726 040 925 127		1,007 439 266 026 81
	0,535 100 613 984 472	1,030 528 019 981 47	1,013 612 679 176 83
0,570 110 573 943 037	0,546 646 809 746 255		1,023 590 794 974 58
	0,588 086 711 155 618		1,031 366 332 024 71
	0,620 521 901 910 736		1,041 462 041 275 06
0,636 300 035 468 516	0,631 005 757 842 073	1,056 631 961 440 27	1,053 899 876 468 54
	0,705 272 394 085 887		1,070 257 482 820 75
	0,728 108 446 906 794	1,118 049 479 375 67	1,123 147 342 596 42
		1,248 501 911 552 47	
		1,388 013 717 395 57	
		1,400 516 718 256 52	
		1,526 209 857 004 31	
		1,576 275 926 141 39	
			1,163 279 152 879 20
			1,192 036 155 547 15
			1,256 168 014 928 79
			1,282 225 285 153 31
			1,296 100 184 508 06
			1,325 614 919 359 81
			1,400 754 026 931 48
			1,421 285 450 100 60
			1,495 180 183 581 25
			1,519 964 722 667 68
			1,655 488 853 851 76
			1,763 608 037 485 26

* Конформное отображение задается формулой $\psi(z) = z(1 + \varepsilon z^n)$, где $n = 4$, $\varepsilon = 1/6$.

(0,1996), 0,2659, 0,3443 (0,333 333 333 31), 0,5473 (0,4205), 0,5661 (0,4602), 0,8296 (0,7622), 0,8488, 0,9340 (0,9164), 0,9808 (0,9495), 0,9890 (0,9847), 1,0072 (1,0109), 1,0153 (1,0412), 1,0289 (1,0523), 1,5517 (1,3813).

В табл. 3 представлены результаты расчета простых собственных значений на двух сетках для четырехлепестковой эпитрохоиды. Приведем стабилизировавшиеся собственные значения (в скобках приведены значения для шара): 0,1895 (0,1179), 0,2411 (0,1996), 0,2827, 0,3191 (0,333 333 333 31), 0,3442, 0,4390 (0,4205), 0,4927 (0,4602), 0,5466, 0,6310, 0,7525 (0,7622), 0,8449 (0,8488), 0,9339 (0,9164), 0,9778 (0,9847), 1,0136, 1,0538, 1,1231 (1,3813).

Проведенное исследование позволяет сделать вывод, что найденная Э. и Ф. Коссера последовательность собственных значений для шара $\eta_n = n/(2n+1)$, $n = 1, 2, \ldots$ не включает все собственные значения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алгазин С. Д.** Численные алгоритмы классической матфизики. 36. О спектре Коссера первой краевой задачи теории упругости. М., 2012. (Препр. / РАН. Ин-т проблем механики; № 1010).
2. **Михлин С. Г.** Спектр пучка операторов теории упругости // Успехи мат. наук. 1973. Т. 28, № 3. С. 43–82.
3. **Cosserat E., Cosserat F.** Sur les équations de la théorie de l'élasticité // C. R. Acad. Sci. Paris. 1898. V. 126. P. 1089–1091.
4. **Cosserat E., Cosserat F.** Sur les fonctions potentielles de la théorie de l'élasticité // C. R. Acad. Sci. Paris. 1898. V. 126. P. 1129-1132.
5. **Cosserat E., Cosserat F.** Sur la déformation infiniment petite d'un ellipsoide élastique // C. R. Acad. Sci. Paris. 1898. V. 127. P. 315–318.
6. **Cosserat E., Cosserat F.** Sur la solution des équations de l'élasticité dans le cas oú les valeurs des inconnues à la frontiére somt données // C. R. Acad. Sci. Paris. 1901. V. 133. P. 145–147.
7. **Cosserat E., Cosserat F.** Sur une application des fonctions potentielles de la théorie de l'elasticité // C. R. Acad. Sci. Paris. 1901. V. 133. P. 210–213.
8. **Cosserat E., Cosserat F.** Sur la déformation infiniment petite d'un corps élastique soumis à des forces donnees // C. R. Acad. Sci. Paris. 1901. V. 133. P. 271–273.
9. **Cosserat E., Cosserat F.** Sur la déformation infiniment petite d'un ellipsoide élastique soumis à des efforts données sur la frontiére // C. R. Acad. Sci. Paris. 1901. V. 133. P. 361–364.
10. **Cosserat E., Cosserat F.** Sur la déformation infiniment petite d'une enveloppe sphérique élastique // C. R. Acad. Sci. Paris. 1901. V. 133. P. 326–329.
11. **Cosserat E., Cosserat F.** Sur un point critique particulier de la solution des équations de l'élasticité dans le cas oú les efforts sur la frontiére sont données // C. R. Acad. Sci. Paris. 1901. V. 133. P. 382–384.
12. **Алгазин С. Д.** Численные алгоритмы классической математической физики. М.: Диалог-МИФИ, 2010.
13. **Бабенко К. И.** Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
14. **Казанджан Э. П.** Об одном численном методе конформного отображения односвязных областей. М., 1977. (Препр. / АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 82).
15. **Алгазин С. Д.** Численные алгоритмы классической матфизики. 37. Вычислительные эксперименты на суперкомпьютере “Ломоносов”. Задачи на собственные значения. М., 2012. (Препр. / РАН. Ин-т проблем механики; № 1017).

Поступила в редакцию 26/VI 2012 г.