ПМТФ, № 5, 1973

УДК 532.54

О РЕГУЛИРОВАНИИ УРОВНЯ ГРУНТОВЫХ ВОД ПРИ ОРОШЕНИИ

Н. Н. Кочина

(Москва)

Рассмотрено решение важной, в связи с необходимостью борьбы с засолением и заболачиванием орошаемых земель, задачи о регулировании уровня грунтовых вод с учетом испарения и наличия слабопроницаемого горизонтального водоупорного слоя. Решение задачи найдено в явном виде. Показано, что асимптотически решение стремится либо к одному из двух стационарных решений задачи, либо к периодическому решению, которые также найдены в работе.

1. Математическому исследованию процессов орошения посвящены работы [1– .

В работе [6] исследовано асимптотическое поведение решений двух начально-краевых задач для уравнения теплопроводности в конечном промежутке — с нелинейной правой частью и с нелинейным граничным условием. Показано, что решение каждой из этих задач в зависимости от значений начальной функции и констант, входящих в условия задачи, стремится либо к устойчивому стационарному решению уравнения теплопроводности с граничными условиями, либо к периодическому решению соответствующей задачи. Решения этих задач характеризуются четырьмя случаями.

Используя асимптотическое поведение решения первой и второй краевых задач для параболических уравнений [7], можно показать, что эти четыре случая имеют место для более широкого класса задач.

Решение одной из начально-краевых задач получено в работе [8]. Задача об изменении с течением времени уровня грунтовых вод при поливах с учетом испарения решается в предположении, что поверхность грунтовых вод слабо изогнута, а поверхность непроницаемого водоупорного слоя горизонтальна.

На практике часто встречаются случаи, когда водоупорный слой слабопроницаем. Будем считать его горизонтальным, имеющим постоянную мощность M_0.

Считаем, что грунтовыми водами занята область между двумя каналами или дренами $0 < x < l$, уровни воды в которых равны $H_1(t)$ и $H_2(t)$. Рассматривается следующий способ регулирования уровня грунтовых вод при орошении: когда измеряемый в точке $0 < x^\circ < l$ уровень достигает величины h_*, производимый с интенсивностью me полив прекращается и начинается снова, когда h обратится в $h_{**} < h_*$.

Интенсивность испарения предполагаем равной $m\ (d_1 h + d_2)$.

Нужно считать, что либо $d_1 = 0$, $d_2 > 0$, либо $d_1 > 0$, $d_2 < 0$. В последнем случае полученные результаты будут верны для уровней грунтовых вод, не меньших величины $-d_2\ /\ d_1$.

Можно также приближенно учесть вертикальную откачку грунтовых вод, «размазывая» скважины вертикального дренажа по всей области $0 < x < l$ между дренами и перенося граничные условия на скважинах в дифференциальное уравнение добавлением фиктивного «испарения» с интенсивностью md_3, $d_3 = \mathrm{const}$ (см., например, [5]).

Задача сводится к нахождению решения неоднородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - b(h - H) + F[h(x^\circ, t)] \tag{1.1}$$

$$F[h(x^\circ, t)] = \begin{cases} c & \text{при} \quad h(x^\circ, t) < h_* \\ -d & \text{при} \quad h(x^\circ, t) > h_{**} \end{cases} \tag{1.2}$$

с граничными условиями

$$h(0, t) = H_1(t), \qquad h(l, t) = H_2(t) \tag{1.3}$$

и начальным условием

$$h(x, 0) = \varphi(x) \tag{1.4}$$

В формуле (1.2) введены обозначения

$$c = e - d_1 H - d_4, \quad d = d_4 + d_1 H, \quad d_4 = d_2 + d_3$$
$$a^2 = kH_0 / m, \quad b = k_0 / M_0 m + d_1$$

где k — коэффициент фильтрации, k_0 — коэффициент фильтрации слабопроницаемого водоупора, m — пористость, (k_0 / M_0) $(H - h)$ — скорость просачивания через водоупор, H_0 — некоторое среднее значение мощности водоносной части пласта.

Предположим, что изменениями во времени уровней воды в каналах H_1 и H_2 — величин, входящих в граничные условия (1.3), можно пренебречь и считать, что $H_1 = \text{const}$, $H_2 = \text{const}$.

Уравнение (1.1), (1.2) с условиями (1.3) при этом имеет устойчивые стационарные решения $v_0(x)$ и $w_0(x)$

$$v_0(x) = H + \frac{c}{b} + C_1 \operatorname{sh} \frac{\sqrt{b}}{a} x + C_2 \operatorname{sh} \frac{\sqrt{b}}{a} (x - l) \tag{1.5}$$
$$w_0(x) = H - \frac{d}{b} + C_3 \operatorname{sh} \frac{\sqrt{b}}{a} x + C_4 \operatorname{sh} \frac{\sqrt{b}}{a} (x - l)$$

$$C_1 = \left(H_2 - H - \frac{c}{b}\right)\left(\operatorname{sh} \frac{\sqrt{b}}{a} l\right)^{-1} \tag{1.6}$$
$$C_2 = -\left(H_1 - H - \frac{c}{b}\right)\left(\operatorname{sh} \frac{\sqrt{b}}{a} l\right)^{-1}$$

Выражения для C_3 и C_4 получаются из (1.6) заменой c / b величиной $-d / b$.

Периодическое решение задачи дается зависимостью (T_1 — продолжительность стадии полива, T — период автоколебания)

$$h(x, t) = H_1 + \frac{(H_2 - H_1)x}{l} + u_i(x, t) \qquad (i = 1, 2)$$

$$u_1(x, t) = v(x) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\lambda_n^2 t) \sin \frac{\pi n x}{l} \qquad (0 \leqslant t \leqslant T_1)$$

$$u_2(x, t) = w(x) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \exp[-\lambda_n^2 (t - T_1)] \sin \frac{\pi n x}{l} \qquad (T_1 \leqslant t \leqslant T)$$

$$\lambda_n^2 = \frac{\pi^2 a^2 n^2}{l^2} + b, \quad C_n = \frac{-\theta_n (1 - \gamma_n)}{1 - \delta_n}, \quad D_n = \frac{\theta_n (1 - \beta_n)}{1 - \delta_n}$$

$$(1.7)\qquad \beta_n = \exp(-\lambda_n^2 T_1), \quad \gamma_n = \exp[-\lambda_n^2(T - T_1)],$$

$$\delta_n = \exp(-\lambda_n^2 T)$$

$$\theta_n = v_n - w_n = \frac{2(c+d)}{b}[1-(-1)^n]\left\{\frac{1}{\pi n} - \frac{\pi n a^2}{l^2}\frac{1}{\lambda_n^2}\right\}$$

$$v(x) = v_0(x) - H_1 - (H_2 - H_1)x/l,$$

$$w(x) = w_0(x) - H_1 - (H_2 - H_1)x/l$$

Здесь v_n и w_n — коэффициенты Фурье функций $v(x)$ и $w(x)$ соответственно. Из формул (1.5) и (1.7) при $0 < x^\circ < l$ следует неравенство $v(x^\circ) - w(x^\circ) > 0$. Величины T_1 и $T_2 = T - T_1$ находятся как наименьшие корни системы двух уравнений

$$(1.8)\qquad \varphi(T_1, T_2) \equiv -\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n \frac{\beta_n(1-\gamma_n)}{1-\delta_n}\sin\frac{\pi n x^\circ}{l} = u_* - v(x^\circ)$$

$$\psi(T_1, T_2) \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\theta_n \frac{\gamma_n(1-\beta_n)}{1-\delta_n}\sin\frac{\pi n x^\circ}{l} = u_{**} - w(x^\circ)$$

$$\left(u_* = h_* - H_1 - \frac{(H_2 - H_1)x^\circ}{l}, \quad u_{**} = h_{**} - H_1 - \frac{(H_2 - H_1)}{l}x^\circ\right)$$

При $T_1 = T_2 = 0$ функции $\varphi(T_1, T_2)$ и $\psi(T_1, T_2)$ не являются непрерывными. Из вида (1.8) функций $U_* = \varphi(T_1, T_2)$ и $U_{**} = \psi(T_1, T_2)$ можно показать, что паре значений $w(x^\circ) - v(x^\circ) < U_* < 0$ и $0 < U_{**} < v(x^\circ) - w(x^\circ)$ соответствует однозначным образом пара значений T_1 и T_2 таких, что T_1 и T_2 не обращаются в нуль одновременно.

Таким образом, каждой паре значений u_* и u_{**} таких, что $w(x^\circ) < u_{**} < u_* < v(x^\circ)$, соответствует хотя бы одна пара значений $T_1 \neq 0$, $T_2 \neq 0$. Если такая пара не единственная, берем наименьшие T_1 и T_2.

Рассматривая вместо периодического решения (1.7) периодическое решение, состоящее из $2m$ частей $u_{2j+1}(x, t)$, $u_{2j+2}(x, t)$ ($j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$), можно видеть, что все куски с нечетными и четными индексами совпадают между собой ($u_{2j+1}(x, t) = u_1(x, t)$, $u_{2j+1}(x, t) = u_2(x, t)$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$). Отсюда следует единственность периодического решения (1.7).

Периодические решения параболических уравнений с нелинейной правой частью рассматривались в работах [9-11].

2. Рассмотрим начально-краевую задачу (1.1) — (1.4), считая, что выполняются неравенства

$$u_* - v(x^\circ) < 0, \quad u_{**} - w(x^\circ) > 0$$

причем $\varphi(x^\circ) < u_*$ (аналогично можно рассмотреть случай $\varphi(x^\circ) > u_*$). Решение этой задачи имеет вид

$$(2.1)\qquad u_1^{(i+1)}(x,t) = v(x) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(i+1)} \exp\left\{-\lambda_n^2\left(t - \sum_{j=0}^{i} T^{(j)}\right)\right\}\sin\frac{\pi n x}{l}$$

$$\left(\sum_{j=0}^{i} T^{(j)} \leqslant t \leqslant \sum_{j=0}^{i} T^{(j)} + T_1^{(i+1)}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots, T^{(0)} = 0\right)$$

$$u_2^{(i+1)}(x,t) = w(x) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(i+1)} \exp \times$$
$$\times \left\{ -\lambda_n^2 \left(t - \sum_{j=0}^{i} T^{(j)} - T_1^{(i+1)} \right) \right\} \sin \frac{\pi n x}{l}$$
$$\left(\sum_{j=0}^{i} T^{(j)} + T_1^{(i+1)} \leqslant t \leqslant \sum_{j=0}^{i+1} T^{(j)} \right)$$

Здесь $C_n^{(i)}$ — коэффициенты Фурье функции $\varphi(x) - v(x)$, $T_1^{(i)}$ и $T^{(i)}$ — наименьшие корни уравнений

$$u_1^{(i+1)}\left(x^\circ, \sum_{j=0}^{i} T^{(j)} + T_1^{(i+1)} \right) = u_*, \quad u_2^{(i+1)}\left(x^\circ, \sum_{j=0}^{i+1} T^{(j)} \right) = u_{**} \tag{2.2}$$

Из формул (2.1) и (2.2) следуют соотношения:

$$u_* - v(x^\circ) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(i+1)} \beta_n^{(i+1)} \sin \frac{\pi n x^\circ}{l} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.3}$$
$$u_{**} - w(x^\circ) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(i+1)} \gamma_n^{(i+1)} \sin \frac{\pi n x^\circ}{l} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

При этом

$$\beta_n^{(i)} = \exp[-\lambda_n^2 T_1^{(i)}], \qquad \gamma_n^{(i)} = \exp\{-\lambda_n^2 [T^{(i)} - T_1^{(i)}]\}$$

В силу равенств

$$u_1^{(i+1)}\left(x, \sum_{j=0}^{i} T^{(j)} \right) = u_2^{(i)}\left(x, \sum_{j=0}^{i} T^{(j)} \right) \tag{2.4}$$
$$u_2^{(i+1)}\left(x, \sum_{j=0}^{i} T^{(j)} + T_1^{(i+1)} \right) = u_1^{(i+1)}\left(x, \sum_{j=0}^{i} T^{(j)} + T_1^{(i+1)} \right)$$

получаем зависимости

$$C_n^{(i+2)} = -\theta_n + \gamma_n^{(i+1)} D_n^{(i+1)}, \qquad D_n^{(i+1)} = \theta_n + \beta_n^{(i+1)} C_n^{(i+1)} \tag{2.5}$$

Из формул (2.5) вытекают равенства

$$C_n^{(i+1)} = -\theta_n \Gamma_n^{(i,k)} + \gamma_n^{(i)} \beta_n^{(i)} \gamma_n^{(i-1)} \beta_n^{(i-1)} \ldots \gamma_n^{(i-k)} \beta_n^{(i-k)} C_n^{(i-k)} \quad (i \geqslant 1) \tag{2.6}$$
$$D_n^{(i+1)} = \theta_n B_n^{(i+1,k+1)} + \beta_n^{(i+1)} \gamma_n^{(i)} \beta_n^{(i)} \ldots \gamma_n^{(i-k)} \beta_n^{(i-k)} C_n^{(i-k)} \quad (i \geqslant 0)$$
$$(\Gamma_n^{(i,k)} = 1 - \gamma_n^{(i)} + \gamma_n^{(i)} \beta_n^{(i)} - \gamma_n^{(i)} \beta_n^{(i)} \gamma_n^{(i-1)} + \ldots$$
$$\ldots - \gamma_n^{(i)} \beta_n^{(i)} \ldots \beta_n^{(i-k+1)} \gamma_n^{(i-k)}$$
$$B_n^{(i,k)} = 1 - \beta_n^{(i)} + \beta_n^{(i)} \gamma_n^{(i-1)} - \beta_n^{(i)} \gamma_n^{(i-1)} \beta_n^{(i-1)} + \ldots$$
$$\ldots + \beta_n^{(i)} \gamma_n^{(i-1)} \ldots \beta_n^{(i-k+1)} \gamma_n^{(i-k)})$$

В формулах (2.6) за k может быть принято любое число $k \geqslant 1$.

После преобразований уравнения (2.2) с учетом (2.1) и (2.6) для достаточно больших значений i приводятся к виду

$$(2.7)\quad \beta_1^{(i+1)} = \varphi(\beta_1^{(i+1)}, \gamma_1^{(i)}, \beta_1^{(i)}, \ldots, \beta_n^{(i-k+1)}, \gamma_1^{(i-k)}, C_1'^{(i-k)}, C_2'^{(i-k)}, \ldots, C_n'^{(i-k)}, \ldots)$$

$$\gamma_1^{(i+1)} = \psi(\gamma_1^{(i+1)}, \beta_1^{(i+1)}, \gamma_1^{(i)}, \ldots, \beta_1^{(i-k+1)}, \gamma_1^{(i-k)},$$

$$C_1''^{(i-k)}, C_2''^{(i-k)}, \ldots, C_n''^{(i-k)}, \ldots)$$

где введены обозначения

$$(2.8)\quad \varphi(\beta_1^{(i+1)}, \gamma_1^{(i)}, \beta_1^{(i)}, \ldots, \beta_1^{(i-k+1)}, \gamma_1^{(i-k)}, C_1'^{(i-k)}, C_2'^{(i-k)}, \ldots, C_n'^{(i-k)}, \ldots) =$$

$$= \beta_1^{(0)} + \sum_{n=3}^{\infty} A_n \{\beta_n^{(i+1)}\Gamma_n^{(i,k)} + \beta_1^{(i+1)}\gamma_n^{(i)}B_n^{(i,k)}\} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_1^{(i+1)} - \beta_n^{(i+1)})\gamma_n^{(i)}\beta_n^{(i)} \ldots \beta_n^{(i-k+1)}\gamma_n^{(i-k)}C_n'^{(i-k)} \sin \pi n x^\circ / l$$

$$(2.9)\quad \psi(\gamma_1^{(i+1)}, \beta_1^{(i+1)}, \gamma_1^{(i)}, \ldots, \beta_1^{(i-k+1)}, \gamma_1^{(i-k)}, C_1''^{(i-k)}, C_2''^{(i-k)}, \ldots, C_n''^{(i-k)}, \ldots) =$$

$$= \gamma_1^{(0)} + \sum_{n=3}^{\infty} B_n \{\gamma_n^{(i+1)}B_n^{(i+1,k+1)} + \gamma_1^{(i+1)}\beta_n^{(i+1)}\Gamma_n^{(i,k)}\} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_1^{(i+1)} - \gamma_n^{(i+1)})\beta_n^{(i+1)}\gamma_n^{(i)}\beta_n^{(i)} \ldots \beta_n^{(i-k)}C_n''^{(i-k)} \sin \pi n x^\circ / l$$

$$(2.10)\quad \beta_1^{(0)} = q[u_* - v(x^\circ)], \quad \gamma_1^{(0)} = p[u_{**} - w(x^\circ)],$$

$$A_n = q\theta_n \sin \pi n x^\circ / l$$

$$B_n = -p\theta_n \sin \frac{\pi n x^\circ}{l}, \quad C_n'^{(i-k)} = qC_n^{(i-k)}, \quad C_n''^{(i-k)} = pC_n^{(i-k)}$$

$$p = [u_* - v(x^\circ) + \theta_1 \sin \pi x^\circ / l]^{-1}$$

$$q = [u_{**} - w(x^\circ) - \theta_1 \sin \pi x^\circ / l]^{-1}$$

В рассматриваемом случае выполняются неравенства

$$(2.11)\quad u_* - v(x^\circ) < 0, \quad u_{**} - w(x^\circ) > 0$$

Из формул (2.8) — (2.11) следует, что уравнения (2.7) при любых значениях $\beta_1^{(0)}$ и $\gamma_1^{(0)}$ имеют хотя бы по одному решению.

Если имеется несколько решений уравнений (2.7) — $\beta_1^{(i+1)}$ и $\gamma_1^{(i+1)}$, то берем наибольшие из этих значений.

Можно показать, что имеют место следующие зависимости:

$$(2.12)\quad \lim_{i\to\infty} \beta_1^{(i+1)} = \beta_1, \quad \lim_{i\to\infty} \gamma_1^{(i+1)} = \gamma_1$$

где $\beta_1 = \exp(-\lambda_1^2 T_1)$, $\gamma_1 = \exp[-\lambda_1^2(T - T_1)]$ для периодического решения (1.7). Величины $\beta_1^{(j)}$ и $\gamma_1^{(j)}$, определяющиеся из уравнений (2.7), (2.8), ограничены, если $u_* - u_{**} > \vartheta > 0$

$$(2.13)\quad \beta_{\min} < \beta_1^{(j)} < \beta_{\max}, \quad \gamma_{\min} < \gamma_1^{(j)} < \gamma_{\max}$$

Константы $\beta_{\min}, \gamma_{\min}, \beta_{\max}, \gamma_{\max}$ определяются методом последовательных приближений из уравнений, аналогичных (2.7), (2.8).

3. Вводя обозначения

$$
\begin{aligned}
(3.1)\qquad & f(\beta_1^{(i)}, \gamma_1^{(i-1)}, \beta_1^{(i-1)}, \ldots, \gamma_1^{(2)}, \beta_1^{(2)}, \gamma_1^{(1)}) = \sum_{n=3}^{\infty} A_n \{(\beta_1^{(i)})^{\mu_n} \times \\
& \times [1 - (\gamma_n^{(i-1)})^{\mu_n} + (\gamma_1^{(i-1)}\beta_1^{(i-1)})^{\mu_n} - (\gamma_1^{(i-1)}\beta_1^{(i-1)}\gamma_1^{(i-2)})^{\mu_n} + \ldots \\
& \ldots - (\gamma_1^{(i-1)}\beta_1^{(i-1)} \ldots \beta_1^{(2)}\gamma_1^{(1)})^{\mu_n}] + \beta_1^{(i)} (\gamma_1^{(i-1)})^{\mu_n} [1 - (\beta_1^{(i-1)})^{\mu_n} + \\
& + (\beta_1^{(i-1)}\gamma_1^{(i-2)})^{\mu_n} + \ldots + (\beta_1^{(i-1)}\gamma_1^{(i-2)} \ldots \beta_1^{(2)}\gamma_1^{(1)})^{\mu_n}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \zeta(\beta_1^{(i+1)}, \gamma_1^{(i)}, \beta_1^{(i)}, \ldots, \beta_1^{(2)}, \gamma_1^{(1)}, \beta_1^{(1)}, C_1'^{(1)}, C_2'^{(1)}, \ldots, C_j'^{(1)}, \ldots) = \\
& = \sum_{n=2}^{\infty} \{[\beta_1^{(i+1)} - (\beta_1^{(i+1)})^{\mu_n}] (\gamma_1^{(i)})^{\mu_n} (\beta_1^{(i)})^{\mu_n} - \\
& - [\beta_1^{(i)} - (\beta_1^{(i)})^{\mu_n}]\} (\gamma_1^{(i-1)}\beta_1^{(i-1)} \ldots \gamma_1^{(1)}\beta_1^{(1)})^{\mu_n} C_n' \sin \pi n x^\circ / l + \\
& + \sum_{n=3}^{\infty} A_n [(\beta_1^{(i+1)})^{\mu_n} - \beta_1^{(i+1)}] [\gamma_1^{(i)}\beta_1^{(i)} \ldots \gamma_1^{(2)}\beta_1^{(2)}]^{\mu_n} [1 - (\gamma_1^{(i)})^{\mu_n}]
\end{aligned}
$$

получим из уравнений (2.7), (2.8) для разности $\beta_1^{(i+1)} - \beta_1^{(i)}$ выражение

$$
\begin{aligned}
(3.2)\qquad & \beta_1^{(i+1)} - \beta_1^{(i)} = f(\beta_1^{(i+1)}, \gamma_1^{(i)}, \beta_1^{(i)}, \ldots, \gamma_1^{(3)}, \beta_1^{(3)}, \gamma_1^{(2)}) - \\
& - f(\beta_1^{(i)}, \gamma_1^{(i-1)}, \beta_1^{(i-1)}, \ldots, \gamma_1^{(2)}, \beta_1^{(2)}, \gamma_1^{(1)}) + \\
& + \zeta(\beta_1^{(i+1)}, \gamma_1^{(i)}, \ldots, \beta_1^{(1)}, C_1'^{(1)}, \ldots, C_j'^{(1)}, \ldots)
\end{aligned}
$$

Можно далее записать формулу

$$
\begin{aligned}
(3.3)\qquad & f(\beta_1^{(i+1)}, \gamma_1^{(i)}, \beta_1^{(i)}, \ldots, \gamma_1^{(3)}, \beta_1^{(3)}, \gamma_1^{(2)}) - \\
& - f(\beta_1^{(i)}, \gamma_1^{(i-1)}, \beta_1^{(i-1)}, \ldots, \gamma_1^{(2)}, \beta_1^{(2)}, \gamma_1^{(1)}) = \\
& = \xi_1^{(i)} (\beta_1^{(i+1)} - \beta_1^{(i)}) + \eta_1^{(i-1)} (\gamma_1^{(i)} - \gamma_1^{(i-1)}) + \xi_1^{(i-1)} (\beta_1^{(i)} - \beta_1^{(i-1)}) + \\
& + \eta_1^{(i-2)} (\gamma_1^{(i-1)} - \gamma_1^{(i-2)}) + \ldots + \xi_1^{(j)} (\beta_1^{(j+1)} - \beta_1^{(j)}) + \\
& + \eta_1^{(j-1)} (\gamma_1^{(j)} - \gamma_1^{(j-1)}) + \ldots + \eta_1^{(1)} (\gamma_1^{(2)} - \gamma_1^{(1)})
\end{aligned}
$$

Здесь $\xi_1^{(j)}$ ($j = 2, 3, \ldots, i$) и $\eta_1^{(j)}$ ($j = 1, 2, \ldots, i - 1$) — средние значения производных $\partial f / \partial \beta_1^{(j)}$ и $\partial f / \partial \gamma_1^{(j)}$, которые можно найти, пользуясь формулой (3.1).

Величины $\xi_1^{(j)}$ и $\eta_1^{(j)}$ можно оценить, используя неравенства (2.13).

Введем обозначения

$$
\begin{aligned}
(3.4)\qquad & q = (\beta_{\max}\gamma_{\max})^{\mu_3} \\
& \alpha = \varkappa \sum_{n=3}^{\infty} \mu_n |A_n| (\beta_{\max} - \beta_{\min}^{\mu_n}) \gamma_{\max}^{\mu_{n-1}} \\
& \beta = \chi \sum_{n=3}^{\infty} \mu_n |A_n| (\beta_{\max} - \beta_{\min}^{\mu_n}) \beta_{\max}^{\mu_{n-1}} \gamma_{\max}^{\mu_n} \\
& \varkappa_j^{(n)} = B_n^{(j, j-1)}, \quad \chi_j^{(n)} = \Gamma_n^{(j-1, j-2)}, \quad \varkappa = \max \varkappa_j^{(n)}, \quad \chi = \max \chi_j^{(n)}
\end{aligned}
$$

Из (3.1) — (3.4) получим

$$
\begin{aligned}
(3.5)\qquad & |\xi_1^{(i-1)}| < \beta, \quad |\xi_1^{(j)}| < q^{i-1-j}\beta, \quad |\xi_1^{(j-1)}| < q |\xi_1^{(j)}| \\
& |\eta_1^{(i-1)}| < \alpha, \quad |\eta_1^{(j)}| < q^{(i-1-j)}\alpha, \quad |\eta_1^{(j-1)}| < q |\eta_1^{(j)}|
\end{aligned}
$$

Пусть $|\xi_1^{(i)}| < E$, тогда из (3.3) и (3.5) получим неравенство

$$|\beta_1^{(i+1)} - \beta_1^{(i)}| < E|\beta_1^{(i+1)} - \beta_1^{(i)}| + \alpha|\gamma_1^{(i)} - \gamma_1^{(i-1)}| + \tag{3.6}$$
$$+ \beta|\beta_1^{(i)} - \beta_1^{(i-1)}| + \alpha q|\gamma_1^{(i-1)} - \gamma_1^{(i-2)}| + \beta q|\beta_1^{(i-1)} - \beta_1^{(i-2)}| + \ldots$$
$$\ldots + \beta q^{i-3}|\beta_1^{(3)} - \beta_1^{(2)}| + \alpha q^{i-2}|\gamma_1^{(2)} - \gamma_1^{(1)}| + \sigma q^{f(i-1)} \quad (f = \mu_2/\mu_3)$$
$$E = \sum_{n=3}^{\infty} \mu_n |A_n| \beta_{\max}^{\mu_n - 1} + \varkappa \sum_{n=3}^{\infty} |A_n| \gamma_{\max}^{\mu_n}$$

В формуле (3.6) введено обозначение

$$\sigma = (\beta_{\max} - \beta_{\min}) \sum_{n=3}^{\infty} |C_n'^{(1)}| \left|\sin\frac{\pi n x^\circ}{l}\right| q^{(\mu_n - \mu_3)/\mu_3} + \beta_{\max} \sum_{n=3}^{\infty} |A_n| \tag{3.7}$$

и использована оценка

$$|\zeta| < \sigma q^{f(i-1)}$$

Пусть для $j = 1, 2, \ldots, i$ выполнены неравенства

$$|\gamma_1^{(j)} - \gamma_1^{(j-1)}| < \varepsilon_1, \qquad |\beta_1^{(j)} - \beta_1^{(j-1)}| < \varepsilon_2 \tag{3.8}$$

Формула (3.6) с использованием (3.8) даст

$$|\beta_1^{(i+1)} - \beta_1^{(i)}| < \frac{\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2}{(1-E)(1-q)} + Dq^{f(i-2)} \tag{3.9}$$
$$\left(D = \left\{\sigma q^f + \alpha\varepsilon_1 + \frac{(\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2)}{1-q}\right\}\frac{1}{(1-E)}\right)$$

Аналогичная формула имеет место для разности $|\gamma_1^{(i+1)} - \gamma_1^{(i)}|$.

Пусть $\varepsilon = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Пусть существует такое число $0 < \lambda_0 < 1$, что выполняются неравенства

$$\frac{\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2}{(1-E)(1-q)} \leqslant \lambda_0\varepsilon, \qquad \frac{\gamma\varepsilon_1 + \delta\varepsilon_2}{(1-F)(1-q)} \leqslant \lambda_0\varepsilon \tag{3.10}$$

Покажем, что при $i \to \infty$ величины $\beta_1^{(i)}$ и $\gamma_1^{(i)}$, определяемые из уравнений (2.7) — (2.9), стремятся к пределам β_1 и γ_1. Для этого достаточно показать, что разности $|\beta_1^{(i+p)} - \beta_1^{(i)}|$ и $|\gamma_1^{(i+p)} - \gamma_1^{(i)}|$ стремятся к нулю при $i \to \infty$. Действительно, ограниченность величин $\beta_1^{(i)}$ и $\gamma_1^{(i)}$ при при всех i, т. е. существование величин $\beta_{\max}$ и $\gamma_{\max}$, доказана ранее.

4. Будем считать, что i — фиксированное, достаточно большое число. Покажем, что

$$|\beta_1^{(j+1)} - \beta_1^{(j)}| < \varepsilon\lambda^{n-1}, \qquad |\gamma_1^{(j+1)} - \gamma_1^{(j)}| < \varepsilon\lambda^{n-1} \tag{4.1}$$

для

$$j = \frac{n(n+1)}{2}i - 1, \qquad \frac{n(n+1)}{2}i - 2, \ldots, \qquad \frac{(n-1)n}{2}i$$

Для $j = 1, 2, \ldots, i$ по предположению

$$|\beta_1^{(j+1)} - \beta_1^{(j)}| < \varepsilon, \qquad |\gamma_1^{(j+1)} - \gamma_1^{(j)}| < \varepsilon \quad (n = 1)$$

Из соотношений (3.9) следует, что при $j = i, i+1, \ldots, 3i - 1$

$$|\beta_1^{(j+1)} - \beta_1^{(j)}| < \lambda_0\varepsilon + Dq'^{i-2}, \quad |\gamma_1^{(j+1)} - \gamma_1^{(j)}| < \tag{4.2}$$
$$< \lambda_0\varepsilon + Gq'^{i-2} \quad (q' = q^f)$$

Неравенства

$$(4.3) \qquad |\beta_1^{(j+1)} - \beta_1^{(j)}| < \lambda\varepsilon, \quad |\gamma_1^{(j+1)} - \gamma_1^{(j)}| < \lambda\varepsilon \quad (0 < \lambda < 1)$$

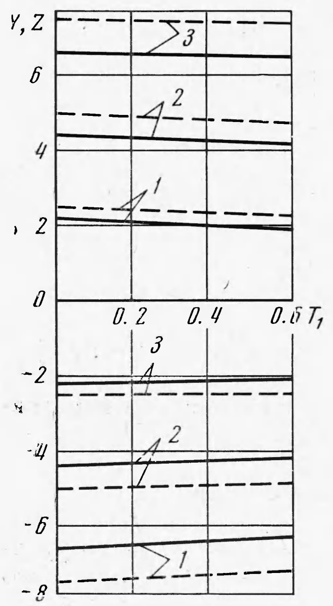
будут выполнены, если

$$(4.4) \qquad \lambda_0\varepsilon + Mq'^{i-2} < \lambda\varepsilon \qquad (M = \max(D, G))$$

При достаточно большом i

$$q'^{i-2} < (\lambda - \lambda_0)M^{-1}\varepsilon$$

где $0 < \lambda < 1$ и $0 < \lambda_0 < \lambda < 1$, так что неравенство (4.4) выполняется.



Аналогично можно показать, что для любого j выполнены неравенства (4.1).

Пользуясь (4.1), можно оценить разность $|\beta_1^{(j+p)} - \beta_1^{(j+1)}|$ при любом $p = 1, 2 \ldots$

С помощью неравенства

$$|\beta_1^{(j+p)} - \beta_1^{(j+1)}| \leqslant |\beta_1^{(j+p)} - \beta_1^{(j+p-1)}| + |\beta_1^{(j+p-1)} - \beta_1^{(j+p-2)}| + \ldots + |\beta_1^{(j+2)} - \beta_1^{(j+1)}|$$

можно показать, что выполнен необходимый и достаточный признак существования предела β_1 последовательности $\beta_1^{(j)}$. Аналогично доказывается существование предела γ_1 последовательности $\gamma_1^{(j)}$.

Пусть уровни воды в каналах или дренах зависят от времени $H_i = H_i(t)$ $(i = 1, 2)$, причем

$$\lim_{t\to\infty} H_i(t) = H_{i\infty}, \qquad \lim_{t\to\infty} H_i'(t) = 0$$

Указанные выше четыре случая поведения решений соответствующих начально-краевых задач верны и для этой задачи, если в формулах (1.5) — (1.8) заменить величины H_i на $H_{i\infty}$ $(i = 1,2)$. В четвертом случае, когда выполнены неравенства $u_{*\infty} - v_\infty(x^\circ) < 0$, $u_{**\infty} - w_\infty(x^\circ) > 0$, аналогичные (2.11), имеют место зависимости (2.12) и решение асимптотически стремится к периодическому (1.7) с указанной выше заменой.

Влияние перетоков показано на фигуре, где построены графики функций

$$Y = \frac{\varphi(T_1, T_2)}{c+d} < 0, \qquad Z = \frac{\psi(T_1, T_2)}{c+d} > 0$$

вычисленных согласно (1.8) в зависимости от T_1 для $x^\circ / l = 0.5$, $\Delta = T / T_1$ (сплошные кривые для $b = 1/_{60}$, пунктирные — для $b = 0$). Кривая *1* соответствует значению $\Delta = 4$, кривая *2* — $\Delta = 2$, кривая *3* — $\Delta = 4/_3$.

Поступила 26 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полубаринова-Кочина П. Я., Пряжинская В. Г., Эмих В. Н.* Математические методы в вопросах орошения. М., «Наука», 1969.
2. *Веригин Н. Н.* Некоторые вопросы химической гидродинамики, представляющие интерес для мелиорации и гидротехники. Изв. АН СССР, ОТН, 1953, № 10.
3. *Веригин Н. Н., Шапинская Г. П.* Промывание засоленных почв без дренажа. Труды координационных совещаний по гидротехнике, вып. 35. М., «Энергия», 1967.
4. *Ананян А. К.* Дренаж при освоении содовых солончаков. М., «Колос», 1971.
5. *Шульгин Д. Ф., Машарипов Р.* Численное решение мелиоративного дренажа на больших массивах. Тезисы докл. научн. конф. ун-та, Ташкент, 1966.
6. *Кочина Н. Н.* О некоторых нелинейных задачах уравнения теплопроводности. ПМТФ, 1972, № 3.
7. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М., «Мир», 1968.
8. *Кочина Н. Н.* Об изменении уровня грунтовых вод при поливах. ПМТФ, 1971, № 4.
9. *Горьков Ю. П.* О периодических решениях параболических уравнений. Дифференциальные уравнения, 1966, т. 2, № 7.
10. *Колесов Ю. С.* О периодических решениях одного класса дифференциальных уравнений с гистерезисной нелинейностью. Докл. АН СССР, 1967, т. 176, № 6.
11. *Колесов Ю. С.* Периодические решения релейных систем с распределенными параметрами. Матем. сб., 1970, т. 83, № 3.