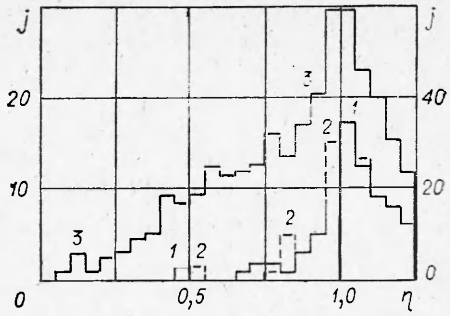
И наконец, при $\eta \geqslant |\chi|/\vartheta$ формулы для A_0, A_1, A_2 те же самые, что и в соотношениях (12).



Без вычисления эллиптических интегралов можно выделить некоторые основные свойства плотности спектра в рассматриваемых задачах. Спектр указанных задач имеет две точки сгущения, соответствующих характерным собственным числам $\eta_1 = |\chi|/\vartheta$, $\eta_2 = 1$. При $|\chi| = \vartheta$ эти точки совпадают, что приводит к резкому возрастанию плотности. Точка $\eta = 0$ является асимптотической для начала спектра. Аналогичные результаты получены в задачах колебаний оболочек отрицательной гауссовой кривизны [7].

Результаты численного эксперимента по расчету начального участка спектра по формуле (2) представлены на фигуре. Вычисленные по указанной формуле критические нагрузки упорядочивались по величине, затем группировались по интервалам длиной $\Delta\eta = 0{,}05$. Число собственных чисел, попадающих в заданный интервал, обозначено буквой j. Слева — шкала для кривых *1*, *2*, справа — для кривой *3*. Вычисления проводились при следующих значениях параметров: кривая *1* — $\chi = -0{,}005$, $\vartheta = 0{,}1$, $R/h = 400$; кривая *2* — $\chi = -0{,}01$, $\vartheta = 0{,}1$, $R/h = 400$; кривая *3* — $\chi = -0{,}333$, $\vartheta = 0{,}5$, $R/h = 1600$. На всех трех графиках хорошо выражена точка сгущения при $\eta = 1$. На кривой *3* наблюдается увеличение плотности спектра в окрестности этой точки. При дальнейшем увеличении параметра тонкостенности сгущение собственных чисел в окрестности $\eta = \eta_1$ более ярко выражено. Это связано с тем, что оценки плотности собственных чисел, полученные согласно [5], тем точнее, чем с большим числом собственных чисел мы имеем дело.

Поступила 3 III 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бендич Н. Н., Корнев В. М.** О плотности собственных значений в задачах устойчивости тонких упругих оболочек.— ПММ, 1971, т. 35, № 2.
2. **Ермоленко В. М.** О плотности собственных чисел в некоторых задачах устойчивости ортотропных оболочек.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 32. Новосибирск: изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1977.
3. **Kornev V. M., Ermolenko V. M.** Sensibility of shells to buckling disturbances in connection with parameters of critical loading spectrum.— Int. J. Engng. Sci., 1980, vol. 18.
4. **Власов В. З.** Избранные труды. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
5. **Курант Р., Гильберт Д.** Методы математической физики. Т. 1. М.— Л.: Гостехиздат, 1951.
6. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М.: Наука, 1968.
7. **Болотин В. В.** О плотности частот собственных колебаний тонких упругих оболочек.— ПММ, 1963, т. 27, № 2.

УДК 539.3

К ЗАДАЧЕ О ВОЗБУЖДЕНИИ УПРУГИХ ВОЛН В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, СОДЕРЖАЩЕМ ГОРИЗОНТАЛЬНОЕ УПРУГОЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ

М. Г. Селезнев, Т. Н. Селезнева

(*Ростов-на-Дону*)

Предлагается метод, позволяющий произвести строгий анализ волновых полей, возбуждаемых поверхностной распределенной гармонической нагрузкой в упругом полупространстве, содержащем горизонтально расположенное упругое цилиндрическое включение. Для простоты применение метода иллюстрируется на примере исследования модельной задачи об антиплоских колебаниях указанной составной упругой среды. В случае сильно заглубленного включения получены асимптотические представления решений, позволяющие в достаточно простой форме произвести анализ волнового поля в среде.

Предложенный метод без изменений может быть применен к исследованию аналогичной задачи в двумерной или трехмерной постановке. При этом существенно возрастет только громоздкость полученных соотношений.

1. Рассмотрим задачу об установившихся антиплоских колебаниях упругого полупространства $X \geqslant 0$ с плотностью ρ и модулем сдвига μ, содержащего в области $R = \sqrt{(X-h)^2 + Y^2} \leqslant a (a < h)$ упругое цилиндрическое включение с модулем сдвига μ_1, плотностью ρ_1. Включение жестко скреплено с полупространством. Сдвиговые колебания ориентированы вдоль образующей цилиндра (параллельно оси OZ). Движение среды описывается динамическими уравнениями теории упругости в перемещениях — уравнениями Ламэ, которые в случае антиплоских колебаний имеют вид [1] $\mu\Delta W(X, Y, t) = \rho\partial^2 W(X, Y, t)/\partial t^2$, где $W(X, Y, t)$ — смещение точки среды, ориентированное вдоль оси OZ, $\Delta = \partial^2/\partial X^2 + \partial^2/\partial Y^2$ — оператор Лапласа.

В установившемся режиме колебаний решение последнего уравнения ищем в виде $W(X, Y, t) = w(x, y)e^{-i\omega t}$. В этом случае уравнение для определения амплитудной функции смещения примет вид

$$\Delta w(x, y) + (\rho\omega^2/\mu)w(x, y) = 0, \quad x = X/a, \quad Y/a = y. \tag{1.1}$$

Пусть на поверхности среды заданы сдвиговые усилия:

$$x = 0, \quad \tau_{zx} = t(y)e^{-i\omega t} = \begin{cases} p(y)e^{-i\omega t}, & y \in [b, c], \\ 0, & y \overline{\in} [b, c]. \end{cases} \tag{1.2}$$

Амплитуды смещения и напряжений на бесконечности убывают и стремятся к нулю.

Первоначально рассмотрим вспомогательную задачу об установившихся антиплоских колебаниях упругого полупространства, содержащего горизонтальную цилиндрическую полость, под воздействием гармонических нагрузок, приложенных к плоской и цилиндрической поверхностям, а именно: на поверхности полупространства приложена нагрузка (1.2), а к цилиндрической полости вдоль границы $r = \sqrt{(x-H)^2 + y^2} = 1$ — нагрузка

$$\tau_{rz} = \mu\frac{\partial w}{\partial r} = Z(\varphi), \quad x = H - r\cos\varphi, \quad y = -r\sin\varphi, \quad H = h/a. \tag{1.3}$$

Здесь r, φ — цилиндрические координаты, связанные с центром отверстия ($r = R/a$; $\varphi = \operatorname{arctg}[y/(x-H)]$).

Амплитуду вектора смещения в этом случае ищем в виде

$$w(x, y) = w_1(x, y) + w_2^*(x, y). \tag{1.4}$$

Здесь $w_1(x, y)$ — решение задачи об антиплоских колебаниях однородного упругого полупространства с модулями ρ, μ под воздействием распределенной на его поверхности (вообще говоря, неизвестной) сдвиговой гармонической нагрузки $\tau_{zx} = X(y)e^{-i\omega t}$; $w_2^*(x, y) = w_2(r, \varphi)$ — решение задачи об антиплоских колебаниях бесконечного упругого пространства с цилиндрическим вырезом радиуса a, поверхность которого загружена усилием $\tau_{rz}|_{r=1} = Y(\varphi)e^{-i\omega t}$:

$$w_1(x, y) = \frac{a}{2\pi\theta\mu}\int_\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{X(\eta)}{\sqrt{\alpha^2/\theta^2 - 1}}e^{-x\sqrt{\alpha^2-\theta^2}+i\alpha(\eta-y)}d\eta d\alpha, \tag{1.5}$$

$$w_2(r, \varphi) = \frac{a}{2\pi\theta\mu}\int_0^{2\pi}Y(\xi)\sum_{m=0}^{\infty}A_m\cos[m(\varphi-\eta)]\,d\eta,$$

$$A_m = H_m^{(1)}(\theta r)\Big/\Big[H_{m-1}^{(1)}(\theta) - \frac{m}{\theta}H_m^{(1)}(\theta)\Big].$$

Здесь α, η, $\theta = \rho\omega^2a^2/\mu$; $x=X/a$; $y = Y/a$; $r = R/a$ — безразмерные параметры; $H_n^{(1)}(\xi)$ — функции Ханкеля первого рода [2]; контур σ обходит положительную точку ветвления $\alpha = +\theta$ снизу, отрицательную ($\alpha = -\theta$) — сверху, а на остальной части совпадает с вещественной осью [3].

Подставляя (1.5) в (1.4) и удовлетворяя граничным условиям $w(x, y)$ (1.2), (1.3), для определения неизвестных напряжений $X(y)$ и $Y(\varphi)$ получаем систему интегральных уравнений

$$X(y) - \frac{\varepsilon}{2\pi\theta}\int_0^{2\pi} Y(\xi)\sum_{m=0}^{\infty}\Phi_m(y,\eta)\,d\eta = t(y), \tag{1.6}$$

$$Y(\varphi) + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma\int_{-\infty}^{\infty} X(\eta)\left[\cos\varphi + \frac{i\alpha\sin\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\theta^2}}\right]\times$$

$$\times e^{-H\theta\sqrt{\alpha^2-\theta^2}(1-\varepsilon\cos\varphi)+i\alpha\sin\varphi+i\alpha\eta}d\eta d\alpha = Z(\varphi).$$

Здесь $\Phi_m(y,\eta) = \left\{\dfrac{H\theta\varphi_{1m}(y)}{\sqrt{y^2+H^2}}\cos\left[m\left(\operatorname{arctg}(-y)-\eta\right)\right] -\right.$

$$\left.-\frac{my}{y^2+H^2}\varphi_{2m}(y)\sin\left[m\left(\operatorname{arctg}(-y)-\eta\right)\right]\right\}\Big/\Delta_m;$$

$$\varphi_{1m}(y) = H_{m-1}^{(1)}\left(\theta\sqrt{y^2+H^2}\right) - \frac{m}{\theta\sqrt{y^2+H^2}}H_m^{(1)}\left(\theta\sqrt{y^2+H^2}\right);$$

$$\varphi_{2m}(y) = H_m^{(1)}\left(\theta\sqrt{y^2+H^2}\right);\quad \varepsilon = \frac{1}{H};\quad \Delta_m = H_{m-1}^{(1)}(\theta) - H_m^{(1)}(\theta)\frac{m}{\theta}.$$

Для решения исходной задачи о возбуждении антиплоских колебаний в полупространстве с упругим цилиндрическим включением выпишем выражение, описывающее волновое поле в упругом бесконечном цилиндре плотностью ρ_1, с модулем сдвига μ_1 под воздействием касательного напряжения (1.3), распределенного по поверхности цилиндра. Амплитуда смещения точек упругого цилиндра $w_3(r, \varphi)$ определяется соотношением

$$w_3(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi\theta_1\mu_1}\int_0^{2\pi} Z(\eta)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{I_k(\theta_1 r)\cos[k(\varphi-\eta)]}{I_{k-1}(\theta_1) - \frac{k}{\theta_1}I_k(\theta_1)}d\eta, \tag{1.7}$$

где $\theta_1^2 = \rho_1\omega^2a^2/\mu_1$; $I_k(\zeta)$ — модифицированная функция Бесселя [2].

Условие жесткого сцепления упругого полупространства определяет непрерывность смещений и направлений на границе раздела сред. Условие непрерывности напряжений выполняется при этом автоматически заданием равных напряжений на границе раздела вне и внутри включения. Удовлетворяя условию непрерывности перемещений

$$w(x, y) = w_1(x, y) + w_2(r, \varphi)|_{r=1} = w_3(r, \varphi)|_{r=1}, \tag{1.8}$$

$$x = H - r\cos\varphi,\quad y = -r\sin\varphi,$$

получаем уравнение, которое совместно с системой (1.6) позволяет определить функции $X(y)$, $Y(\varphi)$, $Z(\varphi)$. Следует отметить, что при $h > a$ операторы, определяющие систему (1.6), (1.8), вполне непрерывны в пространстве суммируемых функций.

Определение волнового поля после решения системы (1.6), (1.8) сводится к расчету выражений амплитудных функций (1.4), (1.5) — вне упругого включения и (1.7) — внутри включения.

2. Исследуем систему уравнений (1.6), (1.8). В случае, когда h и a соизмеримы ($h > a$), указанная система может быть сведена к квазирегулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, для решения которой можно эффективно применять численные методы; а ког-

да $h \gg a$ ($H \gg 1$, $\varepsilon \ll 1$), указанную систему можно решать асимптотическими методами, что позволяет аналитически получить решение с требуемой точностью.

Рассмотрим случай, когда нагрузка (1.2) на поверхности полупространства равнораспределена в полосе, т. е. $p(y) = p_0 = \mathrm{const}$. При этом в первом приближении получаем решение системы в виде

$$(2.1)\qquad X_0(y) = t(y),\ Y_0(\varphi) = Z_0(\varphi) = 0,$$

$$X(y) = X_0(y) + \varepsilon X_1(y) + \ldots,\ Y(\varphi) = Y_0(\varphi) + \sqrt{\varepsilon} Y_1(\varphi) + $$
$$+ \ldots,\ Z(\varphi) = Z_0(\varphi) + \sqrt{\varepsilon} Z_1(\varphi) + \ldots$$

Второе уравнение системы (1.6) при подстановке $X_0(y)$ из (2.1) дает

$$(2.2)\qquad Y(\varphi) = Z(\varphi) - \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi\theta}}\,\chi(\varphi) + O(\varepsilon),$$

где

$$\chi(\varphi) = -p_0 e^{i\frac{\pi}{4}} [G_1 \cos\varphi + G_2 \sin\varphi];\ G_1 = \frac{e^{\theta H\sqrt{1+c^2}}}{c(1+c^2)^{1/4}} - \frac{e^{i\theta H\sqrt{1+b^2}}}{b(1+b^2)^{1/4}};\ G_2 =$$
$$= \frac{e^{i\theta H\sqrt{1+c^2}}}{(1+c^2)^{1/4}} - \frac{e^{i\theta H\sqrt{1+b^2}}}{(1+b^2)^{1/4}}.$$

Подстановка $X_0(y)$ в третье уравнение системы (1.8) после вычисления входящих в выражение интегралов методом перевала [4] дает

$$(2.3)\qquad \sum_{k=0}^{\infty} \left[G_k \varkappa \{Z_k^{(c)} \cos k\varphi + Z_k^{(s)} \sin k\varphi\} \quad A_k \{Y_k^{(c)} \cos k\varphi + Y_k^{(s)} \sin k\varphi\}\right] =$$
$$= \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi\theta}}\, P_0 p_0 + O(\varepsilon),\ \varkappa = \theta\mu/(\theta_1\mu_1),$$

где

$$P_0 = \left[\left\{(1+b^2)^{1/4} e^{i\frac{\theta}{\varepsilon}\sqrt{1+b^2}}\right\}\Big/ b - \left\{(1+c^2)^{1/4} e^{i\frac{\theta}{\varepsilon}\sqrt{1+c^2}}\right\}\Big/ c\right] e^{-i\frac{\pi}{4}};$$

$$\zeta_k^{(c)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \zeta(\eta) \cos k\eta\, d\eta;\ \zeta_k^{(s)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \zeta(\eta) \sin k\eta\, d\eta.$$

Раскладывая соотношение (2.2) в ряды Фурье и разрешая совместно с (2.3), получим

$$(2.4)\qquad Z(\varphi) = p_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi\theta}} \left[\frac{P_0}{\varkappa G_0 - A_0} + \frac{A_1 (B_1 \cos\varphi + B_2 \sin\varphi)}{(\varkappa G_1 - A_1)} e^{i\frac{\pi}{4}}\right] + O(\varepsilon),$$

$$Y(\varphi) = p_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi\theta}} \left[\frac{P_0}{\varkappa G_0 - A_0} + \frac{\varkappa G_1 (B_1 \cos\varphi + B_2 \sin\varphi)}{(\varkappa G_1 - A_1)} e^{i\frac{\pi}{4}}\right] + O(\varepsilon),$$

$$X(y) = t(y) + \frac{\varepsilon p_0}{2\pi\theta} \left[\frac{P_0 e^{i\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\sqrt{y^2+1} + \frac{3\pi}{4}\right)}}{(y^2+1)^{3/4} (\varkappa G_0 - A_0)} + \frac{\varkappa G_1 (B_1 - B_2 y)\, e^{i\frac{\theta}{\varepsilon}\sqrt{y^2+1} + i\frac{\pi}{4}}}{2(y^2+1)^{5/4} (\varkappa G_1 - A_1)}\right\} +$$
$$+ O\left(\varepsilon^{3/2}\right).$$

При необходимости более точного вычисления $X(y)$, $Y(\varphi)$, $Z(\varphi)$ указанный процесс можно продолжить далее, учитывая при этом в разложении $\Phi_m(y, \eta)$ соответственно члены более высокого порядка малости по ε.

Следует отметить, что в первом приближении (2.1) имеем решение задачи для однородного упругого полупространства. Влияние возмущения, вносимого упругим включением, определяется следующим членом разложения и имеет порядок малости $\sqrt{\varepsilon}$.

Для построения формул, описывающих волновое поле в среде, подставляем полученные значения $X(y)$, $Y(\varphi)$, $Z(\varphi)$ из (2.4) в выражения $w_1(x, y)$, $w_2(r, \varphi)$ (1.4), (1.5), $w_3(r, \varphi)$ (1.7) и вычисляем входящие в них интегралы с использованием асимптотических методов [4].

Учитывая, что наиболее информативным является волновое поле, возбуждаемое источником вне упругого включения, приведем сначала алгоритм вычисления функций $w_1(x, y)$, $w_2(r, \varphi)$. Так, подставляя в первое соотношение (1.5) приближенное значение $X(y)$ (2.4) и вычисляя входящие интегралы методом перевала [4], получим

$$w_1(x, y) = \frac{ap_0}{\mu}\sqrt{\frac{1}{2\pi\theta}}\left[\frac{\{x^2+(y+b)^2\}^{1/4}}{y+b}e^{i\theta\sqrt{x^2+(y+b)^2}} - \frac{[x^2+(y+c)^2]^{1/4}}{y+c}e^{i\theta\sqrt{x^2+(y+c)^2}}\right] + O(\varepsilon),\ c, b \sim H \quad (c, b > H). \tag{2.5}$$

Аналогично для $w_2(r, \varphi)$ имеем

$$w_2(r, \varphi) = -\frac{ap_0}{2\theta\mu}\sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi\theta}}\left[\frac{2P_0H_0^{(1)}(\theta r)}{H_1^{(1)}(\theta)(\varkappa G_0 - A_0)} - \frac{\varkappa G_1 H_1^{(1)}(\theta r)(B_1\cos\varphi + B_2\sin\varphi)}{(\varkappa G_1 - A_1)\Bigl(H_0^{(1)}(\theta) - \frac{1}{\theta}H_1^{(1)}(\theta)}e^{i\frac{\pi}{4}}\right] + O(\varepsilon). \tag{2.6}$$

Амплитудная функция смещения среды вне упругого включения $w(x, y)$ определяется выражениями (1.4) с учетом (2.5), (2.6).

Следует отметить, что соотношения (2.5), (2.6) получены только в предположении малости параметра ε и при условии $c, b \gg 1$. В силу этого указанные формулы справедливы во всей области, включая границу. В соотношении (2.5) следует исключить только случай $y = \mathrm{const}$, $x \to \infty$. В последнем случае выражение для $w_1(x, y)$ имеет несколько иной вид. Если же необходимо рассчитать распределение волнового поля внутри упругого включения аналогично предыдущему, можно получить

$$w_3(r, \varphi) = -\frac{ap_0}{2\theta_1\mu_1}\sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi\theta}}\left[\frac{2P_0I_0(\theta_1 r)}{I_0(\theta_1)(\varkappa G_0 - A_0)} - \frac{A_1I_1(\theta_1 r)(B_1\cos\varphi + B_2\sin\varphi)}{(\varkappa G_1 - A_1)\left[I_0(\theta_1) - \frac{1}{\theta_1}I_1(\theta_1)\right]}e^{i\frac{\pi}{4}}\right] + O(\varepsilon).$$

Таким образом, в данной работе предложен метод, позволяющий в достаточно простой для анализа форме получить выражения, описывающие волновое поле практически во всей исследуемой области. Следует также отметить, что указанный метод без изменения может быть применен для исследования аналогичной задачи в плоской или пространственной постановке. При этом существенно увеличится только громоздкость выкладок. Так, при исследовании аналогичной задачи в плоской постановке приходится на первом этапе решать систему не трех, а шести интегральных уравнений. Однако при этом сохраняются все основные свойства элементов системы, рассмотренной в данной работе. При расчете волновых полей возникают также интегралы и суммы того же типа, что и рассмотренные выше.

Поступила 26 I 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лурье А. И.** Теория упругости. М.: Наука, 1970.
2. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974.
3. **Ворович И. И., Бабешко В. А.** Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979.
4. **Федорюк М. В.** Метод перевала. М.: Наука, 1977.