ПМТФ, № 6, 1961

АКУСТИЧЕСКАЯ ПРОВОДИМОСТЬ ЖЕСТКОЙ ГОРЯЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

С. С. Новиков, Ю. С. Рязанцев

(Москва)

Акустические свойства поверхности разрыва типа фронта пламени в газе теоретически исследовались в [1–4]. В [4] показано, что учет потока массы через фронт пламени и реакции фронта пламени на изменение термодинамических параметров газа в акустической волне может приводить к существенному изменению величины акустической проводимости этой поверхности, определяемому видом зависимости скорости распространения пламени от термодинамических параметров. Аналогичное рассмотрение может быть проведено и в случае горения конденсированных систем. При этом если для пламени в газе применимость подобного рассмотрения ограничивалась, в частности, тем, что даже ламинарное пламя из-за неустойчивости [5] не является плоским, а имеет ячеистую структуру [6, 7], то для горения конденсированных систем представление о плоском фронте горения вполне обосновано. Задача представляет интерес в связи с тем, что в существующих теориях резонансного горения [8, 9] величина акустической проводимости определяет граничное условие на горящей поверхности.

Проведенное ниже рассмотрение позволяет сделать следующие выводы:

1. Если стационарный закон горения вида $U = ap^\nu$ $(\nu < 1)$ выполняется в нестационарных условиях, то жесткая горящая поверхность акустически устойчива.

2. Учет возникновения энтропийной волны при взаимодействии акустической волны с горящей поверхностью существенно изменяет область акустической устойчивости.

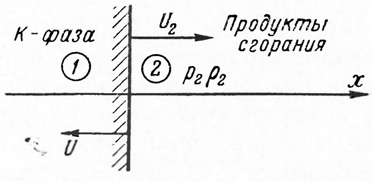
3. Усиление слабой волны давления при взаимодействии с жесткой горящей поверхностью возможно только, если нестационарный закон горения удовлетворяет некоторому условию (23) (см. ниже).

На плоском фронте горения, относительно которого предполагается, что он совпадает с поверхностью конденсированной фазы (фиг. 1), выполняются законы сохранения массы, импульса и энергии, которые в системе координат, связанной с конденсированной фазой и являющейся одновременно лабораторной системой, записываются в виде

$$\rho_1 U = \rho_2 (u_2 + U)$$

$$p_1 + \rho_1 U^2 = p_2 + \rho_2 (u_2 + U)^2 \qquad (1)$$

$$w_1 + \frac{U^2}{2} = w_2 + \frac{(u_2 + U)^2}{2}$$



Здесь p, ρ, w — давление, плотность и энтальпия, U — абсолютное значение линейной скорости горения, u_2 — скорость оттока газов, продуктов сгорания.

Если величины p_2, ρ_2, u_2 испытывают слабое возмущение δp_2, $\delta\rho_2$, δu_2, например, в слабой волне давления $(\delta p_2 \ll p_2)$, приходящей со стороны продуктов сгорания, то эти возмущения на фронте горения связаны соотношениями, получающимися варьированием уравнений системы (1). Отбрасывая квадратичные относительно вариаций члены, получим из (1) систему уравнений для вариаций

$$\begin{gathered}\rho_1\delta U + U\delta\rho_1 = \rho_2(\delta u_2 + \delta U) + \frac{\rho_1}{\rho_2}U\delta\rho_2\\ \delta p_1 + U^2\delta\rho_1 = \delta p_2 + 2\rho_1 U\delta u_2 + \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}U^2\delta\rho_2\\ \delta w_1 + U\delta U = \delta w_2 + \frac{\rho_1}{\rho_2}U(\delta u_2 + \delta U)\end{gathered}\tag{2}$$

Предполагая конденсированную фазу несжимаемой, т. е. $\rho_1 = \mathrm{const}$, и отбрасывая малые члены порядка U^2/c_2^2, где c_2 — скорость звука, что оправдано тем, что всегда выполняется $U/c_2 \ll 1$, вместо (2) получим

$$\begin{gathered}\rho_1\delta U = \rho_2(\delta u_2 + \delta U) + \frac{\rho_1}{\rho_2}U\delta\rho_2\\ \delta p_1 = \delta p_2 + 2\rho_1 U\delta u_2\\ \delta w_1 + U\delta U = \delta w_2 + \frac{\rho_1}{\rho_2}U(\delta u_2 + \delta U)\end{gathered}\tag{3}$$

Возмущения в продуктах сгорания складываются из падающей и отраженной волн давления и энтропийной волны

$$\begin{aligned}\delta p_2 &= \delta p_2^- + \delta p_2^+, & \delta\rho_2 &= \delta\rho_2^- + \delta\rho_2^+ + \delta\rho_2^\circ\\ \delta u_2 &= \delta u_2^- + \delta u_2^+ & \delta w_2 &= \delta w_2^- + \delta w_2^+ + \delta w_2^\circ\end{aligned}\tag{4}$$

Кроме того, вариации параметров на волнах связаны между собой равенствами:

падающая волна давления

$$\delta u_2^- = -\frac{\delta p_2^-}{\rho_2 c_2}, \quad \delta\rho_2^- = \frac{\delta p_2^-}{c_2^2}, \quad \delta w_2^- = \frac{\delta p_2^-}{\rho_2}\tag{5}$$

отраженная волна давления

$$\delta u_2^+ = \frac{\delta p_2^+}{\rho_2 c_2}, \quad \delta\rho_2^+ = \frac{\delta p_2^+}{c_2^2}, \quad \delta w_2^+ = \frac{\delta p_2^+}{\rho_2}\tag{6}$$

энтропийная волна

$$\delta u_2^\circ = 0; \quad \delta p_2^\circ = 0, \quad \delta w_2^\circ = -\frac{c_2^2\delta\rho_2^\circ}{\rho_2(\gamma_2 - 1)}\tag{7}$$

Здесь и в дальнейшем предполагается, что продукты сгорания — идеальный газ. Будем считать функцию $U = U(p_2 T_2)$ известной. Это позволит выразить δU через δp_2 и $\delta\rho_2^\circ$

$$\delta U = A\delta p_2 + B\delta\rho_2^\circ\tag{8}$$

Здесь

$$A = \left(\frac{\partial U}{\partial p_2}\right)_{T_2} + \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2}\frac{T_2}{p_2}\left(\frac{\partial U}{\partial T_2}\right)_{p_2}, \quad B = -\frac{c_2^2}{\rho_2 c_{p_2}(\gamma_2 - 1)}\left(\frac{\partial U}{\partial T_2}\right)_{p_2}\tag{9}$$

Из уравнений (3) — (9) может быть получено выражение для акустической проводимости, которая равна отношению нормальной составляющей акустической скорости к акустическому давлению. С указанной выше точностью относительно U/c_2 безразмерная акустическая проводимость жестокой горящей поверхности равна

$$\begin{gathered}\zeta = -\frac{\delta u_2}{\delta p_2}\rho_2 c_2 = -(\rho_1 - \rho_2)c_2 A -\\ -(\gamma_2 - 1)(\rho_1 - \rho_2)^2\frac{B}{\rho_1 c_2} + \left[\gamma_2 - (\gamma_2 - 1)\frac{\rho_2}{\rho_1}\right]\frac{\rho_1 U}{\rho_2 c_2} -\\ -(\gamma_2 - 1)(\rho_1 - \rho_2)^3\frac{ABU}{\rho_2 c_2} - (\gamma_2 - 1)^2(\rho_1 - \rho_2)^4\frac{B}{\rho_1\rho_2 c_2^2}\frac{U}{c_2}\end{gathered}\tag{10}$$

В работе [4] была получена приближенная формула для ζ, содержащая лишь первый член, что соответствует случаю больших A.

Если зависимость скорости горения от температуры продуктов сгорания слабая, т. е. $[\partial U / \partial T_2]_{p_2} \approx 0$, то формула (10) значительно упрощается

$$\zeta = -(\rho_1 - \rho_2) c_2 A + \left[\gamma_2 - (\gamma_2 - 1) \frac{\rho_2}{\rho_1}\right] \frac{\rho_1 U}{\rho_2 c_2} \tag{11}$$

Для широкого класса конденсированных систем справедлив закон горения

$$U = a p_2^{\nu} \tag{12}$$

В этом случае

$$\frac{\partial U}{\partial T_2} = 0, \qquad B = 0, \qquad A = \frac{\partial U}{\partial p_2} = \gamma_2 \nu \frac{U}{\rho_2 c_2^2}$$

Тогда

$$\zeta = \left[-\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\gamma_2 \nu + \gamma_2 - (\gamma_2 - 1) \frac{\rho_2}{\rho_1}\right] \frac{\rho_1 U}{\rho_2 c_2} \tag{13}$$

Возможность усиления, т. е. увеличения амплитуды падающей волны при отражении определяется знаком действительной части акустической проводимости. Усиление имеет место, если $\operatorname{Re} \zeta < 0$. В данном случае величина ζ — действительная и усилению соответствует $\zeta < 0$. Это условие сводится к

$$\nu > \frac{\gamma_2 - (\gamma_2 - 1) \rho_1 / \rho_2}{\gamma_2 (1 - \rho_2/\rho_1)} \approx 1 + \frac{1}{\gamma_2} \frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{14}$$

В первом приближении по ρ_2 / ρ_1 условие (14) совпадает с условием устойчивости горения конденсированных систем [10]. Так как для всех нормально горящих вторичных *ВВ* выполняется неравенство $\nu < 1$ и, следовательно, $\zeta > 0$, можно утверждать, что выполнение стационарного закона горения в нестационарных условиях гарантировало бы ослабление волны при отражении, т. е. акустическую устойчивость.

Отметим, что форма возмущений здесь, как и в [4] не конкретизировалась, и сделанный вывод справедлив для слабых волн любой формы, в том числе и гармонических. Естественно предположить, что для быстрых изменений давления, например для периодических, с большой частотой, закон горения может заметно отличаться от стационарного. Учет влияния нестационарности на процесс взаимодействия ударных волн с пламенем в газе проводился в работах [11, 12]. Нестационарность процесса горения при взаимодействии слабых гармонических волн с горящей поверхностью принята во внимание в теориях резонансного горения, развитых в [8, 9]. В этих работах учет нестационарности достигается введением в стационарный закон горения времени запаздывания процесса горения относительно мгновенных значений термодинамических параметров.

Одним из возможных методов введения времени запаздывания является метод, используемый в теории неравновесных процессов [13], в соответствии с которым скорость приближения неравновесной скорости горения к ее равновесному значению пропорциональна разности мгновенного и равновесного значений, т. е. удовлетворяет уравнению

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{\tau} (U_0 - U) \tag{15}$$

где τ — время релаксации, U_0 — стационарная скорость горения, U — мгновенная скорость горения.

Этот метод применен в работе [8]. Полагая все возмущения зависящими от времени по закону $e^{i\omega t}$ и используя уравнения (3) — (9) и (15) нетрудно показать, что наличие релаксационного времени запаздывания будет учтено, если в выражение для акустической проводимости (10) вместо A, B подставить

$$\frac{A}{1 + i\omega\tau}, \qquad \frac{B}{1 + i\omega\tau}$$

Для тех же предположений, при которых была получена формула (13), теперь получим

$$\zeta = \left[-\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\frac{\gamma_2 \nu}{1 + i\omega\tau} + \gamma_2 - (\gamma_2 - 1)\frac{\rho_2}{\rho_1}\right]\frac{\rho_1 U}{\rho_2 c_2} \tag{16}$$

Условие усиления в этом случае будет иметь вид

$$\operatorname{Re}\zeta = \left[-\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\frac{\gamma_2 \nu}{1 + \omega^2\tau^2} + \gamma_2 - (\gamma_2 - 1)\frac{\rho_2}{\rho_1}\right]\frac{\rho_1 U}{\rho_2 c_2} < 0 \tag{17}$$

Можно видеть, что наличие релаксационного времени запаздывания увеличивает акустическую устойчивость системы.

Другой метод получения нестационарного закона горения модификацией известного стационарного закона горения введением времени запаздывания был впервые сформулирован для случая горения в ж. р. д. в работе [14] и применен к горению конденсированных систем в [9]. В этом методе предполагается, что процесс горения протекает в две стадии — газификация и собственно горение — разделенные временным интервалом, равным времени индукции τ, так что

$$\dot{m}_b(t) = \left(1 - \frac{d\tau}{dt}\right)\dot{m}_i(t - \tau) \qquad (\dot{m}_i = ap^{\nu}(t)) \tag{18}$$

Здесь $\dot{m}_i$ — массовая скорость газификации, $\dot{m}_b$ — массовая скорость образования продуктов сгорания, время индукции τ определяется из уравнения

$$\int\limits_{t-\tau}^{\tau} p^m(t')\,dt' = \mathrm{const} \tag{19}$$

где m — некоторая константа, порядка единицы.

Если возмущение давления, а вместе с ним и возмущения всех термодинамических параметров и скорости оттока продуктов сгорания зависят от времени как $e^{i\omega t}$, то из уравнений (3) — (9), (18) и (19) можно получить выражение для акустической проводимости в виде

$$\zeta = \left\{(\gamma_2 - 1)\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) + 1 - \gamma_2\left[m + (\nu - m)\,e^{-i\omega\tau}\right]\right\}\frac{u_2}{c_2} \tag{20}$$

Отсюда условие усиления

$$m + (\nu - m)\cos\omega\tau > 1 - \left(1 - \frac{1}{\gamma_2}\right)\frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{21}$$

Из (21) видно, что даже при $\nu < 1$ возможно усиление при соответствующих ω и τ. Можно показать что в этом случае единичный скачок давления ослабляется, хотя периодическая волна может усиливаться.

Следует отметить, что критерии усиления (17) и (21), полученные на основе нестационарных законов горения, постулированных в [8, 9], отличаются от критериев, вытекающих непосредственно из выражений для акустической проводимости, приводимых в этих работах. Причина этих расхождений в том, что авторы [8, 9] игнорировали возникновение энтропийной волны при взаимодействии слабой волны давления с горящей поверхностью, в то время как учет последней приводит к существенному изменению выражения для акустической проводимости и, следовательно, изменению критерия акустической устойчивости.

Рассмотренные способы введения времени запаздывания являются до некоторой степени произвольными из-за отсутствия экспериментальных данных, свидетельствующих в пользу той или иной исходной гипотезы. В то же время попытки непосредственного числового расчета величины акустической проводимости горящей жесткой поверхности на основе анализа конкретной модели горения [15] не дают наглядного механизма усиления при отражении. Поэтому представляются оправданными дальнейшие поиски нестационарного закона горения.

Исходя из законов сохранения массы, импульса и энергии на фронте горения и условия акустической устойчивости можно сформулировать общее требование к такому закону. Действительно, в случае возмущению зависящих от времени как $e^{i\omega t}$, полагая, для простоты, что скорость горения зависит только от давления, можно связать мгновенные значения скорости оттока продуктов сгорания и давление у поверхности соотношением

$$\frac{\delta(\rho_2 u_2)}{\rho_2 u_2} = D\frac{\delta p_2}{p_2} \tag{22}$$

где D — некоторое комплексное число, определяемое законом горения. Найдя при помощи (3) — (8) и (22) соответствующее выражение для акустической проводимости, получим, что если при отражении падающая волна усиливается, должно выполняться неравенство

$$\operatorname{Re} D > 1 - \left(1 - \frac{1}{\gamma_2}\right)\frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{23}$$

В работе [16] указывается на необходимость учета сжимаемости конденсированной фазы при изучении свойств горящей поверхности. Полученные здесь выводы нетрудно обобщить на случай сжимаемой конденсированной фазы.

Авторы благодарны А. Д. Марголину за обсуждение, в ходе которого он показал, что условие (14) может быть получено и в рамках теории горения Я. Б. Зельдовича — А. Ф. Беляева [10, 17].

Поступила 15IV1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Бам-Зеликович Г. Д. О колебаниях газа при горении в трубах. Сб. Теорет. гидромеханика, 1952, № 9.
2. Боа Те-чу. Об образовании волн давления на поверхности плоского фронта пламени. Сб. Вопросы горения и детонационных волн. Госиздат Оборон. пром., 1958.
3. Manson N. Contribution to the hydrodynamical theory of flame vibration. Proc. Seventh Int. Cong. Appl. Mech. 1948, v. 2, p. 187.
4. Новиков С. С., Рязанцев Ю. С. Взаимодействие слабых волн давления с фронтом пламени. ДАН СССР, 1961, т. 137, вып. 6.
5. Ландау Л. Д. К теории медленного горения. ЖЭТФ, т. 14, стр. 240.
6. Маркштейн Г. Явление неустойчивости фронта пламени. Сб. Вопросы горения и детонационных волн. Госиздат Оборон. пром., 1958.
7. Ягодкин В. И. Об устойчивости разрывного фронта пламени в вязкой среде. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 7.
8. Grad H. Resonance burning in rocket motors. Comm. on Pure and Appl. Mathematics. 1949, v. 2, p. 79.
9. Чен Синь-и. Неустойчивость процесса горения, вызванная высокочастотными колебаниями в ракетах, работающих на твердом топливе. Вопросы ракетной техники. 1954, № 6.
10. Андреев К. К., Беляев А. Ф. Теория взрывчатых веществ. Оборонгиз, 1960.
11. Когарко С. М., Скобелкин В. И. Релаксационное взаимодействие ударных волн с зоной горения. ДАН СССР, 1958, т. 120, в. 6, стр. 1280
12. Когарко С. М., Скобелкин В. И., Козаков А. Н. Взаимодействие ударных волн с фронтом пламени. ДАН СССР, 1958, т. 122, вып. 6, стр. 1046.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехтеориздат. 1954.
14. Crocco L. Aspects of combustion stability in liquid propellant rocket motors. Parts I, II. Journal ARS 1951, v. 21, p. 163, 1952, v. 22, p. 7.
15. Харт, Макклюр. Неустойчивость горения; взаимодействие акустических волн с поверхностью горения твердого ракетного топлива. Вопросы ракетной техники. 1960, № 2.
16. McClure F. T., Hart R. W. and Bird G. F. Acoustic instability in solid fuel rockets. ARS Journal 1960, v. 30, p. 908.
17. Зельдович Я. Б. К теории горения порохов и взрывчатых веществ. ЖЭТФ, 1942, т. 12, стр. 498.