9. **Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т.** Свойства газов и жидкостей.— Л.: Химия, 1982.
10. **Дильман В. В., Найденов В. И.** О межфазной неустойчивости и влиянии градиента поверхностного натяжения на скорость хемосорбции при гравитационном течении жидкой пленки // Теор. основы хим. технологии.— 1986.— Т. 20, № 3.
11. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости.— М.: Наука, 1972.
12. **Lam T. T., Bayazitoglu Y.** Effects of internal heat generation and variable viscosity on Marangoni convection // Numer. Heat Transfer.— 1987.— V. 11, N 2.

г. Москва *Поступила 4/IV 1988 г., в окончательном варианте — 30/VI 1988 г.*

УДК 532.526

А. Н. Кудрявцев, А. С. Соловьев

УСТОЙЧИВОСТЬ СЛОЯ СДВИГА СЖИМАЕМОГО ГАЗА

При смешении двух параллельных потоков вязкого газа, движущихся с различными скоростями, вблизи границы раздела образуется течение, называемое обычно свободным слоем сдвига. Подобные течения на практике встречаются в пограничном слое струи, истекающей в затопленное пространство, в следе за несимметрично обтекаемым телом и т. п. Свободные сдвиговые течения весьма неустойчивы по отношению к малым возмущениям — слой сдвига несжимаемого газа, например, неустойчив при всех числах Рейнольдса Re [1]. Устойчивость сжимаемого слоя сдвига при конечных Re, по-видимому, ранее не исследовалась. Без учета вязкости эта задача решалась в [2—4], причем был сделан ряд дополнительных упрощений: температура во всем течении считалась постоянной, динамический профиль задавался функцией $U(y) = \operatorname{th} y$.

В данной работе при исследовании устойчивости сжимаемого слоя сдвига газ считается вязким и теплопроводным, профили скорости и температуры рассчитываются из соответствующих уравнений пограничного слоя [5]. Приближения несжимаемого или невязкого газа получаются отсюда как предельные случаи, когда число Маха $M \to 0$ или $Re \to \infty$. Расчеты проведены численно методом ортогонализации [6]. Показано, что при $M \lesssim 1$ устойчивость течения определяется волновыми возмущениями с фазовой скоростью $c_r = 0$ и нулевым критическим числом Рейнольдса Re_*. С увеличением M область неустойчивых волновых чисел сужается. При $M \gtrsim 1$, как и в невязкой задаче [3], устойчивость определяется бегущими волнами с $c_r \neq 0$ (вторая мода возмущений). Обнаружено, что для второй моды Re_* отлично от нуля и уменьшается с ростом M. Построены кривые нейтральной устойчивости, собственные функции, изучена зависимость характеристик устойчивости от M при $0 \leqslant M \leqslant 2$.

1. Рассмотрим плоское течение в слое сдвига сжимаемого вязкого теплопроводного газа. Предположим, что газ идеальный, с постоянными теплоемкостями c_V и $c_p = \gamma c_V$, вязкость μ и теплопроводность k прямо пропорциональны температуре, так что число Прандтля $\Pr = \mu c_p/k$ постоянно, вторая вязкость равна нулю. Уравнения Навье — Стокса, записанные в безразмерной форме, в этом случае имеют вид

$$(1.1)\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0, \quad \rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j},$$

$$\rho\left(\frac{\partial\theta}{\partial t} + u_j\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\right) + (\gamma-1)\rho\theta\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\gamma}{\mathrm{RePr}}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\right) + \frac{\gamma(\gamma-1)\mathrm{M}^2}{\mathrm{Re}}\sigma_{ij}e_{ij},$$

$$\mu(\theta) = \theta, \quad p = \rho\theta/\gamma\mathrm{M}^2,$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} - \frac{2}{3}\mu e_{kk}\delta_{ij}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad i,\ j,\ k = 1,\ 2,$$

$$\mathrm{M} = U_*/\sqrt{\gamma RT_*}, \quad \mathrm{Re} = \rho_* U_*\delta/\mu_*, \quad \delta = (\pi\mu X/\rho_* U_*)^{1/2}.$$

Здесь $u_1 \equiv u$ и $u_2 \equiv v$ — продольная и поперечная компоненты скорости в направлении осей $x_1 \equiv x$ и $x_2 \equiv y$ соответственно; ρ, p, θ — плотность, давление и температура газа; R — газовая постоянная. Областью изменения независимых переменных x и y является вся плоскость $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. В качестве масштаба длины взята толщина пограничного слоя между потоками δ, X — размерная продольная координата. Скорость, плотность и температура отнесены к их значениям в однородном невозмущенном потоке при $y \to \infty$ (отмеченным в (1.1) звездочкой), так что $u|_{y\to\infty} = 1$, $\theta|_{y\to\infty} = 1$. Постоянные значения скорости и температуры в другом потоке обозначим через $u|_{y\to-\infty} = m$, $\theta|_{y\to-\infty} = \varkappa$.

Для изучения устойчивости слоя сдвига ищем, как обычно, решение в виде суперпозиции основного ламинарного течения, взятого при фиксированном значении координаты $x = x_0$ (квазипараллельное приближение), и периодических по x возмущений — бегущих волн малой амплитуды:

$$\rho = \rho_0(x_0, y) + \tilde{\rho}(x, y, t),\ u = U(x_0, y) + \tilde{u}(x, y, t), \tag{1.2}$$

$$v = \tilde{v}(x, y, t),\ p = \Pi(x_0, y) + \tilde{p}(x, y, t),\ \theta = T(x_0, y) + \tilde{\theta}(x, y, t);$$

$$\{\tilde{\rho}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}, \tilde{\theta}\} = \{\boldsymbol{\rho}(y), \mathbf{u}(y), \mathbf{v}(y), \mathbf{p}(y), \boldsymbol{\theta}(y)\}e^{i\alpha(x-ct)}, \tag{1.3}$$

$$c = c_r + ic_i$$

(α — волновое число периодического возмущения с периодом $2\pi/\alpha$, c_r — фазовая скорость волны). Расчет параметров основного течения выполняется на основе теории пограничного слоя [5], давление $\Pi = 1/\gamma M^2$ постоянно, и из (1.1) следует, что $\rho_0 = 1/T$ (расчет основного течения и связь x_0 с Re см. в приложении).

Подставляя (1.2), (1.3) в (1.1) и оставляя в уравнениях только члены первого порядка малости по амплитуде возмущений, приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$D\boldsymbol{\rho} + \frac{\boldsymbol{\eta}}{T} - \frac{1}{T^2}\frac{dT}{dy}\mathbf{v} = 0, \tag{1.4}$$

$$D\mathbf{u} + \frac{dU}{dy}\mathbf{v} + i\alpha T\mathbf{p} = \frac{T}{\mathrm{Re}}\left[\mu_0\Delta\mathbf{u} + \frac{i\alpha\mu_0\boldsymbol{\eta}}{3} + \frac{dT}{dy}\left(\frac{d\mathbf{u}}{dy} + i\alpha\mathbf{v}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{dU}{dy}\boldsymbol{\theta}\right)\right],$$

$$D\mathbf{v} + T\frac{d\mathbf{p}}{dy} - \frac{T}{\mathrm{Re}}\left[\mu_0\Delta\mathbf{v} + \frac{\mu_0}{3}\frac{d\boldsymbol{\eta}}{dy} + \frac{2}{3}\frac{dT}{dy}\left(2\frac{d\mathbf{v}}{dy} - i\alpha\mathbf{u}\right) + i\alpha\frac{dU}{dy}\boldsymbol{\theta}\right],$$

$$D\boldsymbol{\theta} + \frac{dT}{dy}\mathbf{v} + (\gamma - 1)T\boldsymbol{\eta} = \frac{\gamma T}{\mathrm{Re\,Pr}}\left(\mu_0\Delta\boldsymbol{\theta} + \frac{d^2T}{dy^2}\boldsymbol{\theta} + 2\frac{dT}{dy}\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dy}\right) +$$

$$+ \frac{\gamma(\gamma-1)M^2}{\mathrm{Re}}T\left[2\mu_0\frac{dU}{dy}\left(\frac{d\mathbf{u}}{dy} + i\alpha\mathbf{v}\right) + \left(\frac{dU}{dy}\right)^2\boldsymbol{\theta}\right],$$

$$\mathbf{p} = (\boldsymbol{\theta}/T + T\boldsymbol{\rho})/\gamma M^2,\ \mu_0 = \mu(T),\ \boldsymbol{\eta} = i\alpha\mathbf{u} + d\mathbf{v}/dy,$$

$$D = i\alpha(U - c),\ \Delta = d^2/dy^2 - \alpha^2.$$

Уравнения (1.4), дополненные требованием ограниченности возмущений на бесконечности

$$|\boldsymbol{\rho}|, |\mathbf{u}|, |\mathbf{v}|, |\mathbf{p}|, |\boldsymbol{\theta}| < \infty \text{ при } |y| \to \infty, \tag{1.5}$$

образуют задачу на собственные значения для c. Течение устойчиво, если $c_i < 0$, и неустойчиво, когда $c_i > 0$. При $c_i = 0$ течение нейтрально устойчиво.

Отметим, что в невязком пределе при $\mathrm{Re} \to \infty$ система (1.4) сводится к одному уравнению для амплитуды давления [7]

$$\frac{d^2\mathbf{p}}{dy^2} - \left(\frac{2}{U-c}\frac{dU}{dy} - \frac{1}{T}\frac{dT}{dy}\right)\frac{d\mathbf{p}}{dy} + \alpha^2\left[\frac{M^2(U-c)^2}{T} - 1\right]\mathbf{p} = 0, \tag{1.6}$$

асимптотическое решение которого при $|y| \to \infty$ запишем как

$$\mathbf{p} \sim \exp\left(\pm\alpha\sqrt{1 - M^2(U-c)^2/T}\,y\right). \tag{1.7}$$

Пусть, например, $y \to -\infty$. Тогда из (1.7) видно, что если выполнено условие

$$c_i = 0,\ |m - c_r| > \sqrt{\varkappa}/M, \tag{1.8}$$

то возмущение осциллирует, не затухая при $y \to -\infty$. Аналогично в случае $y \to +\infty$ решение невязкого уравнения не затухает, если

$$c_i = 0,\ |1 - c_r| > 1/\mathrm{M}. \tag{1.9}$$

В безразмерных переменных $1/\mathrm{M}$ — скорость звука в однородном потоке при $y \to \infty$, а $\sqrt{\varkappa}/\mathrm{M}$ — при $y \to -\infty$, поэтому условия (1.8) или (1.9) характеризуют возмущения, распространяющиеся со сверхзвуковой скоростью относительно «верхнего» (или «нижнего») потока газа. Как показано в п. 3, такие «сверхзвуковые» возмущения при $\mathrm{M} \geqslant 1$ играют в полной задаче устойчивости (1.4), (1.5) определяющую роль.

2. Для численного решения уравнений (1.4) удобно переписать их в виде системы шести уравнений первого порядка [8] и выбрать в качестве новой независимой переменной переменную Дородницына φ:

$$d\mathbf{f}(\varphi)/d\varphi = G(\varphi)\mathbf{f},\ \mathbf{f} = (\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}'). \tag{2.1}$$

Штрихом здесь и ниже обозначается производная по φ, связь переменных φ и y и зависимость скорости и температуры основного течения U, T от φ даются формулами (П. 6)—(П. 9). В уравнении (2.1) G — матрица размером 6×6, отличные от нуля элементы которой представим как

$$\begin{gathered} G_{12} = 1,\ G_{21} = \mathrm{Re}D + \alpha^2T^2,\ G_{23} = \mathrm{Re}U'/T - 4i\alpha T'/3, \\ G_{24} = i\alpha T(\mathrm{Re} + \gamma \mathrm{M}^2TD/3),\ G_{25} = -i\alpha TD/3 - (U'/T)', \\ G_{26} = -U'/T,\ G_{31} = -i\alpha T,\ \ G_{33} = T'/T,\ G_{34} = -\gamma\mathrm{M}^2TD, \\ G_{35} = D,\ G_{41} = -10i\alpha T'/3Q,\ G_{42} = -i\alpha T/Q,\ G_{43} = \\ = (4T''/3T - \mathrm{Re}D - \alpha^2T^2)/Q,\ G_{44} = -4\gamma\mathrm{M}^2(2T'D + i\alpha U'T)/3Q, \\ G_{45} = (4DT'/T + 7i\alpha U')/3Q,\ G_{46} = 4D/3Q,\ Q = \mathrm{Re} + 4\gamma\mathrm{M}^2TD/3, \\ G_{56} = 1,\ G_{62} = -2(\gamma - 1)\mathrm{M}^2\mathrm{Pr}U',\ G_{63} = \mathrm{RePr}T'/T - 2i\alpha(\gamma - \\ -1)\mathrm{M}^2\mathrm{Pr}U'T,\ G_{64} = -(\gamma - 1)\mathrm{M}^2\mathrm{RePr}TD, \\ G_{65} = \mathrm{RePr}D + \alpha^2T^2 - (T'/T)' - (\gamma - 1)\mathrm{M}^2\mathrm{Pr}U'^2/T, \\ G_{66} = -T'/T. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Процедура численного решения состоит из нахождения фундаментальной системы решений (2.1) во внешней области $|\varphi| \to \infty$, продолжения собственных векторов путем численного интегрирования «внутрь» слоя сдвига и последующей склейки «верхнего» и «нижнего» общих решений в точке $\varphi = 0$.

При $|\varphi| \to \infty$ коэффициенты (2.2) постоянны, и можно искать решение, пропорциональное $e^{\lambda\varphi}$. Тогда из (2.1) получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{gathered} (\mathrm{Re}D + \alpha^2T^2)\mathbf{u} + i\alpha T(\mathrm{Re} + \gamma\mathrm{M}^2TD/3)\mathbf{p} - i\alpha DT\boldsymbol{\theta}/3 = \lambda^2\mathbf{u}, \\ -i\alpha T\mathbf{u} - \gamma\mathrm{M}^2TD\mathbf{p} + D\boldsymbol{\theta} = \lambda\mathbf{v}, \\ -i\alpha T\lambda\mathbf{u} - (\mathrm{Re}D + \alpha^2T^2)\mathbf{v} + 4D\lambda\boldsymbol{\theta}/3 = (\mathrm{Re} + 4\gamma\mathrm{M}^2TD/3)\lambda p, \\ -(\gamma - 1)\mathrm{M}^2\mathrm{RePr}TD\mathbf{p} + (\mathrm{RePr}D + \alpha^2T^2)\boldsymbol{\theta} = \lambda^2\boldsymbol{\theta}. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Покажем, что корни характеристического уравнения λ для системы (2.3) (т. е. собственные значения матрицы $G|_{|\varphi|\to\infty}$) могут быть найдены аналитически. Умножая первое уравнение на $1/T$, складывая его со вторым, умноженным на $-i\alpha$, и исключая $\mathbf{p}$ и $\boldsymbol{\theta}$ с помощью третьего уравнения (2.3), получим уравнение для завихренности $\boldsymbol{\omega}$. Оно имеет такой же вид, как и в несжимаемом газе:

$$(\mathrm{Re}D + \alpha^2T^2)\boldsymbol{\omega} = \lambda^2\boldsymbol{\omega},\ \omega = (1/T)\lambda\mathbf{u} - i\alpha\mathbf{v}. \tag{2.4}$$

Отсюда сразу определяется одно значение λ_1^2. Затем, исключив $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ из третьего и четвертого уравнений (2.3), приходим к однородной системе двух связанных уравнений для $\mathbf{p}$ и $\boldsymbol{\theta}$. Приравняв нулю ее определитель, легко убедиться, что в результате имеем уравнение, квадратное относительно λ^2, откуда находим оставшиеся корни λ_2^2 или λ_3^2. Таким образом,

$$\lambda_i^2 = \alpha^2 T^2 + \Delta_i, \; i = 1, 2, 3, \tag{2.5}$$

$$\Delta_1 = \operatorname{Re} D, \quad \Delta_{2,3} = \frac{1}{2} \Pr \Delta_1 \frac{1 + q\left(\frac{4}{3} + \frac{\gamma}{\Pr}\right)}{1 + \frac{4}{3} q\gamma} \times$$

$$\times \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4q}{\Pr} \frac{1 + \frac{4}{3} q\gamma}{\left[1 + q\left(\frac{4}{3} + \frac{\gamma}{\Pr}\right)\right]^2}} \right\}, \quad q = \frac{\mathrm{M}^2 T D}{\operatorname{Re}}.$$

Соответствующие собственные векторы $\mathbf{w}_i$ матрицы $G|_{|\varphi| \to \infty}$ получим после подстановки (2.5) в (2.1) и их компоненты $w_i{}^j$ запишем как

$$w_i^1 = 1, \; w_i^2 = \lambda_i, \; w_i^6 = \lambda_i w_i^5, \; i = 1, 2, 3, \tag{2.6}$$

$$w_1^3 = -i\alpha T/\lambda_1, \; w_1^4 = w_1^5 = w_1^6 = 0,$$

$$w_k^3 = -\frac{i\alpha T}{\lambda_k} + \frac{1}{\lambda_k}\left[D - \frac{\gamma}{(\gamma - 1)\operatorname{Re}\Pr}\left(\operatorname{Re}\Pr D + \alpha^2 T^2 - \lambda_k^2\right)\right] w_k^5,$$

$$w_k^4 = \frac{\operatorname{Re}\Pr D + \alpha^2 T^2 - \lambda_k^2}{(\gamma - 1)\mathrm{M}^2 \operatorname{Re}\Pr T D} w_k^5,$$

$$w_k^5 = \frac{\operatorname{Re} D + \alpha^2 T^2 - \lambda_k^2}{i\alpha\left[\frac{TD}{3} - \frac{(\operatorname{Re} + \gamma \mathrm{M}^2 T D/3)\left(\operatorname{Re}\Pr D + \alpha^2 T^2 - \lambda_k^2\right)}{(\gamma - 1)\mathrm{M}^2 \operatorname{Re}\Pr D}\right]}, \quad k = 2, 3.$$

В предельном случае больших Re формулы (2.5) выглядят более просто:

$$\lambda_1^2 = \alpha^2 T^2 + \operatorname{Re} D, \; \lambda_2^2 = \alpha^2 T^2 + \operatorname{Re}\Pr D, \; \lambda_3^2 = \alpha^2 T^2 + D^2 \mathrm{M}^2 T. \tag{2.7}$$

Частные решения вида $\mathbf{w}_i e^{\lambda_i \varphi}$ имеют во внешней области ясный физический смысл волн завихренности, температуры (или энтропии) и давления — трех типов элементарных возбуждений в сжимаемом теплопроводном газе [9]. Отметим, что решение для λ_3 (волна давления) при $\operatorname{Re} \to \infty$ переходит в решение невязкой задачи (ср. (1.7) с (2.7)). Общее решение (2.1) при $\varphi \to \infty$, удовлетворяющее (1.5), записывается как линейная комбинация трех частных решений:

$$\mathbf{f}|_{\varphi \to \infty} = \sum_{i=1}^{3} C_i \mathbf{w}_i e^{\lambda_i \varphi}, \tag{2.8}$$

где за λ_i следует принять то значение квадратного корня из λ_i^2, для которого $\operatorname{Real}(\lambda_i) < 0$ (в (2.5), (2.6) при этом $U = 1$, $T = 1$). Случай, когда для одного из λ_i $\operatorname{Real}(\lambda_i) = 0$, отвечает наличию непрерывного спектра в задаче (1.4), (1.5) и в этой работе не рассматривается. При $\varphi \to -\infty$ нужно положить в (2.5), (2.6) $U = m$, $T = \varkappa$ и выбрать знак квадратного корня так, чтобы $\operatorname{Real}(\lambda_i) > 0$. Обозначим собственные значения и собственные векторы матрицы $G|_{\varphi \to -\infty}$ через $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_5, \mathbf{w}_6$.

При численном решении система (2.1) интегрируется с начальными данными $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ от $\varphi = \infty$ до $\varphi = 0$, а затем — с $\mathbf{w}_4, \mathbf{w}_5, \mathbf{w}_6$ от $\varphi = -\infty$ также до $\varphi = 0$. Векторы, получаемые после интегрирования, обозначим через $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_6$. При $\varphi = 0$ собственная функция задачи должна быть линейной комбинацией как $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$, так и $\mathbf{z}_4, \mathbf{z}_5, \mathbf{z}_6$:

$$C_1\mathbf{z}_1 + C_2\mathbf{z}_2 + C_3\mathbf{z}_3 = C_4\mathbf{z}_4 + C_5\mathbf{z}_5 + C_6\mathbf{z}_6. \tag{2.9}$$

Условием существования нетривиального решения (2.9) является обращение в нуль детерминанта $F = |z_i{}^j|$:

$$F(c, \alpha, \mathrm{M}, \operatorname{Re}) = 0. \tag{2.10}$$

При интегрировании (2.1) использовалась схема Рунге — Кутта 4-го порядка точности. Чтобы избежать быстрого накопления ошибок, связанного с наличием в (1.4) малого параметра при старших производных, применялся метод ортогонализации [6]. Уравнение (2.10) при нахождении c решалось итерационным методом Ньютона.

Необходимо подчеркнуть, что при практическом проведении расчетов область сходимости итерационного метода может оказаться весьма узкой, поскольку при больших Re решение (2.1), (2.8) близко к решению невязкой задачи (1.6), (1.7) и векторы $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{z}_6$ почти линейно зависимы. Поэтому в данной работе расчеты проводились следующим образом. Константа C_6 полагалась равной единице, и одно из уравнений (обычно уравнение для p) отсоединялось от системы (2.9). Затем система пяти уравнений, матрица которой уже не содержит близких к линейной зависимости строк и столбцов, решалась относительно $C_1, \ldots, C_5$. Найденные значения констант подставлялись в оставшееся уравнение и вместо условия (2.10) требовалось выполнение этого уравнения. Граничные условия вида (2.8) накладывались при достаточно большом $|\varphi| = L$, в основной части расчетов $L = 5{,}5$. Число точек на интервале $(-L, L)$ обычно было $N = 129$, иногда при больших Re проводились расчеты с $N = 257$. Итерационный процесс, как правило, прекращался, когда изменение искомой величины на очередной итерации оказывалось меньше 10^{-6}.

3. В настоящей работе численные расчеты проведены для случая, когда смешивающиеся потоки имеют одинаковую температуру ($\varkappa = 1$) и движутся с равными противоположно направленными скоростями ($m = -1$). Выбор $m = -1$ не уменьшает общности рассмотрения, так как просто соответствует переходу в систему отсчета, движущуюся со скоростью, равной полусумме скоростей потоков. Во всех расчетах $\mathrm{Pr} = 0{,}72$, $\gamma = 1{,}4$. Результаты расчетов устойчивости представлены на рис. 1—6.

На рис. 1 в координатах α, M приведены кривые нейтральной устойчивости ($c_i = 0$) при $\mathrm{Re} = 10^3$, т. е. практически в условиях невязкой задачи. Нейтральные кривые *1* и *2* отвечают двум различным ветвям дисперсионного уравнения (2.10) — разным «модам» возмущений. Здесь же для сравнения дана нейтральная кривая *3* первой моды $\alpha^2 + \mathrm{M}^2 = 1$, найденная в [2] аналитически. Видно, что при $\mathrm{M} \leqslant 1$ выбор в невязкой задаче более простых распределений скорости и температуры основного течения вида $U(y) = \operatorname{th} y$, $T(y) = 1$ качественно не меняет поведения нейтральной кривой. В отсутствие сжимаемости ($\mathrm{M} = 0$) возмущения неустойчивы при $\alpha < \alpha_* = 0{,}915$ ($\alpha < 1$ в [2]). В целом сжимаемость при $\mathrm{M} \neq 0$ оказывает стабилизирующее действие — область неустойчивых волновых чисел (ограниченная осью $\alpha = 0$ и нейтральными кривыми) сужается с ростом M, и при $\mathrm{M} = 1$ наступает полная стабилизация первой моды. Характерное свойство первой моды, связанное с симметрией основного течения при $m = -1$, $\varkappa = 1$ (см. приложение),— равенство нулю фазовой скорости ($c_r = 0$) для всех α, Re, M и c_i, т. е. первая мода является стоячей волной. Если, кроме того, обращается в нуль еще и c_i, то в

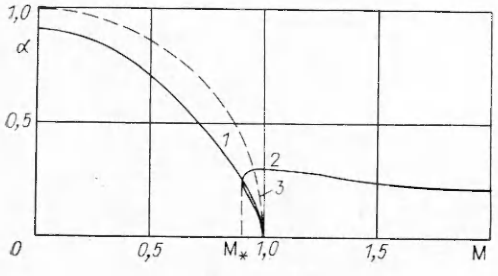

Рис. 1

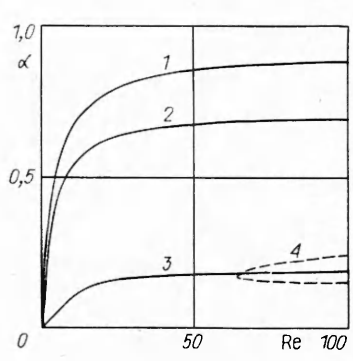

Рис. 2

слое сдвига происходит «смена устойчивости»— возникает новое стационарное состояние.

Для второй моды (кривая *2*) расчеты показывают, что $c_r \neq 0$ и меняется в соответствии с условием (1.8) в интервале $1 - 1/\mathrm{M} < c_r < 1$, так что такая волна распространяется с дозвуковой скоростью относительно «верхнего» потока и со сверхзвуковой относительно «нижнего». На первый взгляд существование подобных возмущений противоречит свойствам симметрии основного течения. Парадокс разрешается, однако, тем обстоятельством, что если $c_r + ic_i$ — собственное значение задачи (1.4), (1.5) с собственной функцией $\boldsymbol{\rho}(y)$, $\mathbf{u}(y)$, $\mathbf{v}(y)$, $\mathbf{p}(y)$, $\boldsymbol{\theta}(y)$, то при тех же α, M, Re и $-c_r + ic_i$ — собственное значение с собственной функцией $\boldsymbol{\rho}^*(-y)$, $-\mathbf{u}^*(-y)$, $-\mathbf{v}^*(-y)$, $\mathbf{p}^*(-y)$, $\boldsymbol{\theta}^*(-y)$ (звездочка обозначает комплексно-сопряженные величины). Действительно, такая подстановка переводит уравнение (1.4) в комплексно-сопряженное. Значит, вторая мода— это фактически две моды, имеющие совпадающие нейтральные кривые. Минимальное число Маха, при котором появляются нейтральные колебания с $c_r \neq 0$, $\mathrm{M}_* = 0{,}906$ (см. рис. 1), так что в сравнительно узком диапазоне $\mathrm{M}_* < \mathrm{M} < 1$ существуют три неустойчивые моды колебаний одновременно. Одна из них — стоячая волна, а две другие, имеющие одинаковые коэффициенты нарастания αc_i, бегут в противоположные стороны с равными скоростями. Ниже, говоря о второй моде, будем иметь в виду волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x. Результаты расчетов для другой бегущей волны аналогичны с очевидными изменениями.

На рис. 2 приведены нейтральные кривые для первой моды в плоскости α, Re при различных M (*1—3* — M = 0 (несжимаемый слой сдвига); 0,5; 0,95). Для полноты картины при M = 0,95 здесь же нанесена нейтральная кривая второй моды (линия *4*). Видно, что при увеличении M (кривые *2*, *3*) Re_* для первой моды остается равным нулю,— слой сдвига неустойчив в случае $\mathrm{M} < 1$ при любых Re. Влияние сжимаемости на первую моду сводится, таким образом, к уменьшению области неустойчивых волновых чисел.

На рис. 3 представлены результаты расчетов устойчивости второй моды. На рис. 3, *а* изображены нейтральные кривые *1—3* для M = 0,95; 1,2; 2,0. В отличие от первой моды $\mathrm{Re}_* \neq 0$ с ростом M оно быстро уменьшается. В наибольшей степени стабилизирующее влияние вязкости заметно при M = 0,95 (Re_* для кривой *1* превосходит Re_* кривых *2*, *3* более чем на порядок). Рис. 3, *б* показывает зависимость c_r нейтральных возмущений от Re для тех же трех значений M. Величина c_r меняется совсем незначительно при M = 1,2 или M = 2,0 (см. кривые *2* и *3* рис. 3, *б*, для первой из них c_r на верхней и нижней ветвях нейтральной кривой почти совпадают).

На рис. 4 приведена зависимость Re_* от M. Сопоставляя его с рис. 1 и 3, *а*, можно следующим образом описать качественное поведение нейтральной кривой второй моды с изменением M. При $\mathrm{M} \geqslant 1$ асимптотой ее нижней ветви служит ось $\alpha = 0$, $\mathrm{Re}_* \sim 1$. Когда $\mathrm{M} \to \mathrm{M}_*$, то Re_* быстро возрастает, нейтральная кривая сдвигается в область больших Re, а нижняя асимптота сближается с верхней (см. рис. 1). В этом диапазоне M

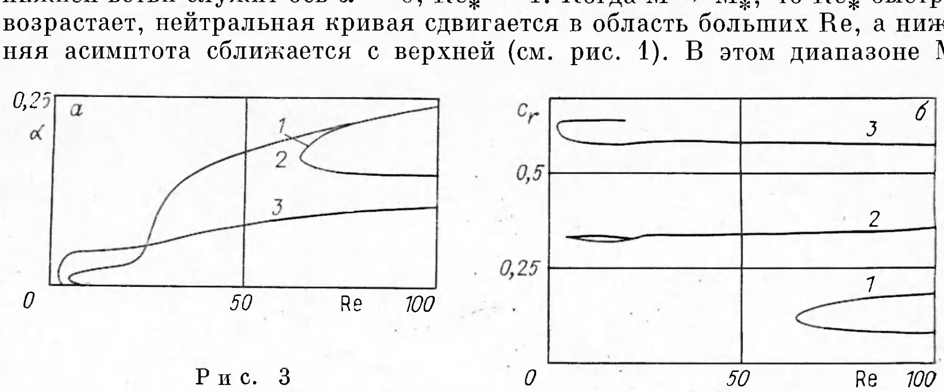

Рис. 3

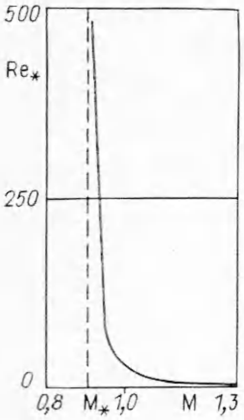

Рис. 4

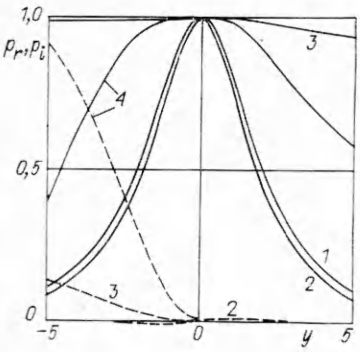

Рис. 5

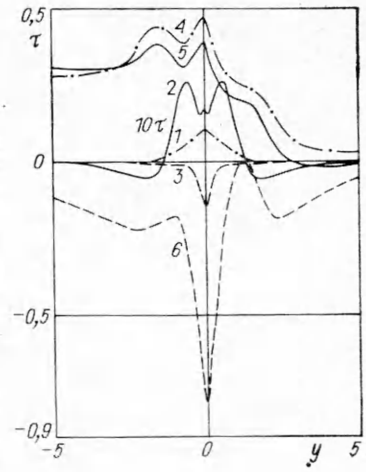

Рис. 6

влияние вязкости на колебания второй моды максимально. Если учесть также наличие первой моды, то можно прийти к заключению, что слой сдвига наиболее устойчив при $M \approx 1$. При $M=1$ первая мода полностью стабилизируется, для колебаний второй моды $Re_* = 32{,}8$.

Рис. 5 показывает поведение собственных функций возмущения давления $\mathbf{p}(y)$ (они нормированы так, что $\mathbf{p}(0) = 1$) нейтральных колебаний первой ($M = 0{,}5$) и второй ($M = 1{,}2$) мод при двух значениях Re. Кривые *1* и *2* относятся к первой моде и соответствуют $Re = 20$, $\alpha = 0{,}620$ и $Re = 100$, $\alpha = 0{,}697$. Для второй моды $Re = 20$, $\alpha = 0{,}028$, $c_r = 0{,}330$ (кривая *3*), $Re = 100$, $\alpha = 0{,}230$, $c_r = 0{,}351$ (кривая *4*). Сплошные линии — действительные части собственных функций, штриховые — мнимые (мнимая часть $\mathbf{p}(y)$ в случае *2* очень мала и на рис. 5 не показана). Видно, что поведение собственных функций двух мод совершенно различно, в частности, собственные функции второй моды практически не затухают при $y \to -\infty$, т. е. происходит излучение возмущений во внешнее течение. Хорошо заметно также, что если кривые *1* и *2*, отвечающие различным Re, отличаются друг от друга слабо, то *3* и *4* — значительно. Возмущение давления при $Re = 20$ (кривая *3*) почти не меняется поперек сдвигового слоя. Это связано с тем, что данное возмущение длинноволновое ($\alpha = 0{,}028$), с длиной волны $2\pi/\alpha$, существенно превышающей толщину слоя сдвига. Влияние вязкости на вторую моду оказывается, таким образом, значительно более сильным, чем на первую.

На рис. 6 изображены усредненные по длине волны напряжения Рейнольдса $\tau(y)$

$$\tau = -\rho_0 \overline{\mathrm{Real}\, \tilde{u}\ \mathrm{Real}\, \tilde{v}} = -(1/4)(\mathbf{u}\mathbf{v}^* + \mathbf{u}^*\mathbf{v})/T. \tag{3.1}$$

Они характеризуют обмен энергией между возмущениями и основным течением. Кривые *1—3* соответствуют $\alpha = 0{,}6$; $0{,}697$; $0{,}8$ при $M = 0{,}5$ (первая мода), *4—6* — $\alpha = 0{,}15$; $0{,}230$; $0{,}3$, $M = 1{,}2$ (вторая мода), сплошные линии показывают τ для нейтральных колебаний, штриховые — затухающих, штрихпунктирные — нарастающих ($Re = 100$). Собственные значения c для кривых *1—6* следующие: $c = 0{,}0965i$; 0; $-0{,}107i$; $0{,}310+0{,}0443i$; $0{,}330$; $0{,}342-0{,}277i$. Кривая *2* нанесена в другом масштабе ($\tau \times 10$). Заметим, что для невязких нейтральных возмущений первой моды напряжения Рейнольдса тождественно равны нулю, а для второй моды в этом случае τ испытывает скачок в точке $y = 0$, оставаясь постоянной по обе стороны от нее [3].

Приложение. Профили скорости и температуры стационарного основного течения в слое сдвига, удовлетворяющие уравнениям пограничного слоя с граничными условиями

(П.1) $$U|_{y\to\infty} = 1,\ T|_{y\to\infty} = 1,\ U|_{y\to-\infty} = m,\ T|_{y\to-\infty} = \varkappa,$$

имеют вид [5]

(П.2) $$U(\psi) = 1 + (1/2)(m - 1)(1 - \operatorname{erf}\psi);$$

(П.3) $$T(\psi) = 1 + \frac{1}{2}(\varkappa - 1)\left[1 - \operatorname{erf}\left(\psi\sqrt{\mathrm{Pr}}\right)\right] + (\gamma - 1)\mathrm{M}^2\int_\psi^\infty\left[\frac{dU(z)}{dz}\right]^{\mathrm{Pr}}\left(\int_0^z\left[\frac{dU(t)}{dt}\right]^{2-\mathrm{Pr}}dt\right)dz,$$

где ψ определяется формулой

(П.4) $$\frac{y}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\int_0^\psi T(z)\,dz.$$

Здесь переменные x и y отнесены к толщине слоя сдвига δ (см. (1.1)). Число Рейнольдса, построенное по δ, связано в этом случае с координатой x формулой

(П.5) $$\mathrm{Re} = \pi x.$$

Основное течение в задаче устойчивости рассматривается в фиксированном сечении $x = x_0$, где, согласно (П.5), $x_0 = \mathrm{Re}/\pi$. Тогда вместо (П.4) запишем

$$y = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\psi T(z)\,dz.$$

Удобнее пользоваться переменной $\varphi = 2\psi/\sqrt{\pi}$, так что

(П.6) $$y = \int_0^\varphi T\,dz.$$

Подставив U из (П.2) в (П.3), с учетом (П.6) имеем окончательные формулы для U и T:

(П.7) $$U(\varphi) = 1 + (1/2)(m - 1)[1 - \operatorname{erf}(\sqrt{\pi}\varphi/2)];$$

(П.8) $$T(\varphi) = 1 + \frac{1}{2}(\varkappa - 1)\left[1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\pi\,\mathrm{Pr}}\,\varphi/2\right)\right] + \frac{\mathrm{Pr}(\gamma - 1)\mathrm{M}^2(m - 1)^2}{4\sqrt{2 - \mathrm{Pr}}}\int_\varphi^\infty\Phi(z)\,dz;$$

(П.9) $$\Phi(z) = \exp(-\pi \mathrm{Pr} z^2/4)\operatorname{erf}\left(\sqrt{\pi(2 - \mathrm{Pr})}z/2\right).$$

Если теперь положить $m = -1$, $\varkappa = 1$, то U будет антисимметричной, а T симметричной функциями переменной φ, а следовательно, согласно (П.6), и переменной y.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bethov R., Szewczyk A.** Stability of a shear layer between parallel streams // Phys. Fluids.— 1963.— V. 6, N 10.
2. **Blumen W.** Shear layer instability of an inviscid compressible fluid // J. Fluid Mech.— 1970.— V. 40, pt 4.
3. **Blumen W., Drazin P. G., Billings D. F.** Shear layer instability of an inviscid compressible fluid. Pt 2 // J. Fluid Mech.— 1975.— V. 71, pt 2.
4. **Drazin P. G., Davey A.** Shear layer instability of an inviscid compressible fluid. Pt. 3 // J. Fluid Mech.— 1977.— V. 82, pt 2.
5. **Вулис Л. А., Кашкаров В. П.** Теория струй вязкой жидкости.— М.: Наука, 1965.

6. **Годунов С. К.** О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН.— 1961.— Т. 16, вып. 3(99).
7. **Бетчов Р., Криминале В.** Вопросы гидродинамической устойчивости.— М.: Мир, 1971.
8. **Линь Ц. Ц.** Теория гидродинамической устойчивости.— М.: ИЛ, 1958.
9. **Chu B.-T., Kovasznay L. S. G.** Non-linear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas // J. Fluid Mech.— 1958.— V. 3, N 5.

г. Новосибирск *Поступила 22/VII 1988 г.*

УДК 532.529.6; 532.516

А. Г. Петров

ЦИРКУЛЯЦИЯ ВНУТРИ ВЯЗКИХ ДЕФОРМИРОВАННЫХ КАПЕЛЬ, ДВИЖУЩИХСЯ В ГАЗЕ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ

Рассматривается движение жидкой капли в стационарном потоке, когда отношение динамической вязкости внешнего течения к вязкости внутреннего течения мало. Из установленной двухсторонней оценки для диссипации энергии внутри капли определяется внутренняя циркуляция. Из уравнения баланса сил внешнего и внутреннего давлений и поверхностного натяжения найдена связь между внутренней циркуляцией и деформацией капли. Получены уравнения колебаний капли, падающей в газе, и решена задача устойчивости. Теоретическое значение критического размера капли согласуется с опытными данными по дроблению капель.

1. Разложения по малому отношению вязкостей. Уравнения первого приближения. Рассмотрим осесимметричное обтекание жидкой капли. Жидкости внутри и вне капли считаем вязкими, несжимаемыми. Обозначим через $\mathbf{v}_+$ вектор скорости вне капли, μ_+, ν_+ — динамическую и кинематическую вязкости, ρ_+ — плотность жидкости вне капли. Соответствующие характеристики движения внутри капли отметим индексом —.

Внутри и вне капли поля скоростей подчиняются уравнениям Навье — Стокса. На поверхности капли ∂V заданы четыре условия: равенство нулю нормальных скоростей v_n, непрерывность тангенциальной скорости v_τ и касательного напряжения σ_τ, на бесконечности выполняется условие $\mathbf{v}_+ \to \mathbf{v}_\infty$. Форма капли предполагается известной. Для ее определения в п. 6 привлекается граничное условие для нормальных напряжений.

Для капель, движущихся в газе, обычно выполнено условие $\mu_+/\mu_- \ll 1$, при котором v_- существенно меньше v_∞. При большом числе Рейнольдса Re_+ внешнее течение вблизи границы имеет структуру, характерную для теории пограничного слоя на твердой поверхности. Толщина пограничного слоя $\delta_+ = l/\sqrt{\mathrm{Re}_+}$ (l — радиус шара, эквивалентного капле по объему).

Характерное значение $\sigma_{+\tau} \sim \sigma$ обратно пропорционально δ_+:

$$\sigma = \mu_+ v_\infty/\delta_+ = \mu_+ v_\infty \sqrt{\mathrm{Re}_+}/l, \quad \mathrm{Re}_+ = l v_\infty/\nu_+. \tag{1.1}$$

Касательное напряжение $\sigma_{+\tau}$ вызывает вихревое течение внутри капли, скорость которого $v_- \sim \sigma l/\mu_-$, откуда с помощью (1.1) имеем $v_- \sim R v_\infty$, $R = (\mu_+/\mu_-)\sqrt{\mathrm{Re}_+}$. Предполагая параметр R малым, решение краевой задачи ищем в виде разложений по степеням R:

$$\mathbf{v}_+ = v_\infty\left(\mathbf{v}_+^{(0)} + R\mathbf{v}_+^{(1)} + \ldots\right), \quad \mathbf{v}_- = v_\infty\left(R\mathbf{v}_-^{(1)} + \ldots\right), \tag{1.2}$$

$$\sigma_{+\tau} = \sigma\left(\tau^{(0)} + R\tau^{(1)} + \ldots\right).$$

Разложения для давлений начинаются со слагаемых, имеющих порядки $p_+ \sim \rho_+ v_\infty^2$, $p_- \sim \rho_- v_-^2 \sim \rho_- R^2 v_\infty^2$. Подставляя эти разложения в уравнения Навье — Стокса и граничные условия, найдем уравнения и граничные условия для $\mathbf{v}_\pm^{(i)}$, $p_\pm^{(i)}$ ($i = 0, 1, \ldots$). Для $\mathbf{v}_+^{(0)}$, $p_+^{(0)}$ получим краевую задачу обтекания твердого тела с условием прилипания (из ее решения определится безразмерное касательное напряжение $\tau^{(0)}$ на гра-