

ветствуют $Re = 1000$; результаты для $Re = 100$ несущественно отличаются от представленных и на график не нанесены.

Последнее замечание относится и к фиг. 3, 4, которые характеризуют распределение объемных сил в жидкости и построены для $Re = 1000$. На фиг. 3 дано распределение компонент сил из (11) по поверхности шара. Здесь сплошные кривые соответствуют f_θ , штриховые — f_r , штрихпунктирные — \tilde{f}_θ ; цифры 1 и 2 относятся соответственно к $m = 4$ и 10. Из компонент поля $\tilde{\mathbf{f}}$, описывающего трехмерную добавку в силовое поле (11), здесь приведены лишь \tilde{f}_θ , так как $\tilde{f}_r, \tilde{f}_\alpha$ пренебрежимо малы — их максимальные по модулю значения (по результатам расчетов), достигаемые в точках $\theta \approx 30$ и 66° соответственно, равны $2,2 \cdot 10^{-3}$ и $4,6 \cdot 10^{-2}$ при $m = 4$ и еще меньше при $m = 10$. Фиг. 4 иллюстрирует характер спадания f_θ (сплошные кривые) и \tilde{f}_θ (штриховые линии) по радиусу в плоскости $\theta = \pi/2$ (цифры 1, 2, как на фиг. 3). Видно, что затухание \tilde{f}_θ происходит значительно быстрее, чем f_θ , причем при $m = 4$ \tilde{f}_θ спадает немонотонно.

На фиг. 5, 6 представлены распределения давления (сплошные линии) и завихренности (штриховые линии) в самодвижущемся режиме соответственно для $Re = 100$ и 1000. Видно, что во всех случаях обтекание безотрывное и характеризуется наличием больших положительных значений завихренности на всей поверхности шара, качественное поведение кривых полностью аналогично полученным в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Шатров В. И., Яковлев В. И. Изменение гидродинамического сопротивления шара, приводимого в движение электромагнитными силами.— ПМТФ, 1981, № 6.
2. Lin C. L., Lee S. C. Transient state analysis of separated flow around a sphere.— Computers and Fluids, 1973, vol. 1, N 3.

Поступила 19/XII 1983 г.

УДК 532.526

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЛОКАЛЬНЫХ ЛАМИНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ

В. В. Боголепов, И. И. Липатов

(Москва)

Локальные изменения формы поверхности летательного аппарата, созданные специально или возникающие естественным образом, могут значительно влиять на теплопередачу, сопротивление трения, определять состояние течения в пограничном слое. Анализ предельных решений уравнений Навье — Стокса при $Re \rightarrow \infty$ (Re — число Рейнольдса), проведенный в [1, 2], показал, что возможны различные режимы ламинарного течения около плоских неровностей, характеризующиеся различием в соотношении сил вязкости и сил инерции, в характере взаимодействия течения около неровности с внешним невязким течением.

Для описания таких режимов течения в [1, 2] использован метод сращиваемых асимптотических разложений, сформулированы постановки соответствующих краевых задач и получены результаты численного решения. Впоследствии были получены результаты исследования конкретных режимов или форм неровностей [3—9].

На практике чаще встречаются пространственные, а не плоские неровности; интерес к исследованию обтекания таких неровностей связан также с задачами обтекания элементов рельефа земной поверхности. Результаты исследования обтекания пространственных неровностей представлены в [10—16]. Но изучены не все возможные режимы течения около пространственных неровностей.

В данной работе исследовано обтекание неровностей, длина которых меньше или равна толщине пограничного слоя, а также более длинных неровностей, течение около которых не взаимодействует с течением во внешнем невязком потоке.

1. Рассматривается стационарное обтекание пространственной неровности, находящейся на дне ламинарного пограничного слоя на расстоянии l от передней кромки плоской поверхности (фиг. 1).

Система координат выбрана таким образом, что ось Ox направлена вдоль вектора скорости невозмущенного потока, ось Oy направлена по нормали к поверхности, а ось Oz перпендикулярна осям Ox и Oy . Предполагается, что выше по течению от неровности профиль скорости в ламинарном пограничном слое имеет только компоненты в направлениях Ox и Oy .

Последнее справедливо, если боковые кромки плоской поверхности расположены достаточно далеко от неровности. Для декартовых координат, соответствующих им компонентом вектора скорости, полной энтальпии, плотности, давления, динамического коэффициента вязкости выбраны следующие обозначения:

$$x_l, y_l, z_l, u_\infty, u_\infty v, u_\infty w, u_\infty^2 H, \rho_\infty \rho, \rho_\infty u_\infty^2 p, \mu_\infty \mu$$

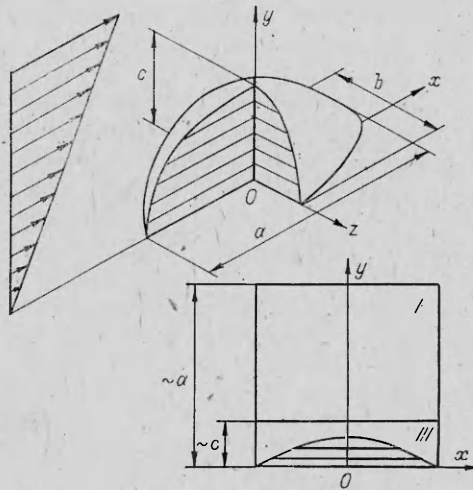
(индексом ∞ обозначены размерные величины в невозмущенном потоке). Рассматривается предельное состояние течения при больших, но докритических числах Рейнольдса ($Re = \rho_\infty u_\infty l / \mu_\infty$), при которых сохраняется ламинарный режим.

Предполагается, что поперечный размер неровности b одинаков по порядку величины с продольным размером a (течение около узких неровностей $b = o(a)$ будет исследовано ниже). Следует отметить, что задача об обтекании неровности, размеры которой удовлетворяют соотношению $a = o(b)$, сводится к двумерной задаче и к пространственной задаче об обтекании неровности, имеющей одинаковые продольный и поперечный размеры. Предполагается также, что при заданных величинах a и b толщина неровности c такова, что в области возмущенного течения вблизи неровности силы вязкости не меньше по порядку величины, чем силы инерции. Используя представление профиля скорости в пограничном слое вблизи поверхности тела $u \sim y/\delta_0$ и оценки величин членов, описывающих влияние сил вязкости и инерции в уравнении продольного импульса, получим

$$(1.1) \quad c \leq O(a\varepsilon^{1/3}), \quad \delta_0 = \varepsilon = Re^{-1/2}.$$

При выводе неравенства (1.1) предполагалось также, что градиент давления, индуцируемый неровностью, велик ($\partial p / \partial x \gg 1$).

Согласно работам [1, 2], результаты которых при $a = O(b)$ можно обобщить на случай пространственных течений, структура течения около неровности зависит от соотношения длины неровности a и толщины пограничного слоя перед неровностью $\delta_0 = O(Re^{-1/2})$. Из рассмотрения неравенства (1.1) следует, что при $a > O(\varepsilon^{3/2})$ $c = o(a)$, поэтому наибольший характерный размер области возмущенного течения определяется размерами a или b . Если в течении возникает область отрыва, то предполагается, что ее размер также не превосходит характерного размера a . Область течения с одинаковыми характерными размерами по осям Ox , Oy и Oz и равными a (область I) содержит струйки тока внешнего невязкого безвихревого течения, струйки тока невозмущенного пограничного слоя или струйки тока пристеночного сдвигового течения, если продольный размер неровности a больше по порядку величины толщины пограничного слоя δ_0 , равен этой величине или асимптотически меньше соответственно. Течение в области I оказывается слабозмущенным, поскольку выпол-



Ф и г. 1

нение неравенства (1.1) предполагает, что нелинейные изменения происходят в пристеночной области III с толщиной, равной толщине неровности $c = o(a)$ при $a > O(\varepsilon^{3/2})$, т. е. на дне области I.

Решение краевой задачи, описывающей течение в области I, позволяет установить связь между изменением толщины вытеснения пограничного слоя (или толщины его пристеночной области) и индуцированным изменением давления, которое заранее неизвестно и должно определяться в процессе совместного решения краевых задач в характерных областях течения. Если продольный размер неровности a превосходит толщину пограничного слоя δ_0 , то при дозвуковом внешнем течении краевая задача для области I сводится к уравнению Лапласа с однородными условиями на больших расстояниях от неровности или к гиперболическому уравнению линейной теории сверхзвуковых течений. Вклад в изменение толщины вытеснения пограничного слоя формируется в общем случае как за счет толщины неровности, так и за счет изменения толщины области с нелинейными изменениями функций течения, прилегающей к неровности. Такой режим течения рассмотрен в [10] для гиперзвукового внешнего течения в предположении о малости параметра гиперзвукового взаимодействия и в [11] для дозвукового внешнего течения. В данной работе изучено обтекание более коротких неровностей. В [1, 2] показано, что если продольный размер неровности a меньше размера $a_0 = O(\varepsilon^{3/4})$, при котором вклад в изменение толщины вытеснения за счет толщины неровности и за счет изменения толщины области пристеночного нелинейного течения одинаков, то реализуется режим «компенсации». При таком режиме в первом приближении возмущения в области I отсутствуют.

При $a > O(\delta_0)$ возмущенное течение состоит из трех областей, при этом толщина области II равна толщине пограничного слоя перед неровностью. Оказывается, что из-за малости изменений функций в области II изменение ее толщины меньше по порядку величины, чем изменение толщины пристеночной области, если только нет сильного охлаждения поверхности или интенсивного отсоса. Роль области II заключается в передаче изменения толщины области III в область I. В «компенсационном» режиме увеличение или уменьшение толщины неровности компенсируется соответствующим уменьшением или увеличением толщины области нелинейного течения, так что суммарная толщина остается неизменной, а возмущения в областях II и I отсутствуют.

«Компенсационный» режим, как это следует из результатов [1, 2], приводит к условию

$$(1.2) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, y_1 = 0, z) = 0, \quad y_1 = y/a.$$

В области III, характерные размеры которой совпадают с размерами неровности, вводятся координаты

$$(1.3) \quad (x, y, z) = (ax_3, \varepsilon a^{1/3}y_3, az_3)$$

и представления функций

$$(1.4) \quad (u, v, w, p, \rho, \mu) = (a^{1/3}u_3, \varepsilon a^{-1/3}v_3, a^{1/3}w_3, p_\infty/\rho_\infty u_\infty^2 + a^{2/3}p_3, \rho_w, \mu_w).$$

Подстановка разложений (1.3), (1.4) в систему уравнений Навье — Стокса и предельный переход

$$(1.5) \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad a \rightarrow 0, \quad b = O(a)$$

приводят к системе уравнений вида

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \rho_w u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \rho_w v_3 \frac{\partial u_3}{\partial y_3} + \rho_w w_3 \frac{\partial u_3}{\partial z_3} + \frac{\partial p_3}{\partial x_3} &= \mu_w \frac{\partial^2 u_3}{\partial y_3^2}, \\ \rho_w u_3 \frac{\partial w_3}{\partial x_3} + \rho_w v_3 \frac{\partial w_3}{\partial y_3} + \rho_w w_3 \frac{\partial w_3}{\partial z_3} + \frac{\partial p_3}{\partial z_3} &= \mu_w \frac{\partial^2 w_3}{\partial y_3^2}, \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial y_3} + \frac{\partial w_3}{\partial z_3} &= 0 \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$(1.7) \quad \begin{aligned} u_3 &= d_0 y_3, \quad w_3 = 0 \quad \text{при } x_3 \rightarrow -\infty, \\ u_3 &= w_3 = v_3 = 0 \quad \text{при } y_3 = c\varepsilon^{-1} a^{-1/3} f(x_3, z_3), \\ u_3 &= d_0 y_3, \quad w_3 = 0 \quad \text{при } y_3 \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Распределение давления $p_3(x_3, z_3)$ заранее неизвестно и для его определения служит дополнительное краевое условие, накладываемое на функцию u_3 при $y_3 \rightarrow \infty$ ($u_3 - d_0 y_3 = \varphi(p_3)$). В частности, условие (1.2) эквивалентно условию $\varphi \equiv 0$. Замена переменных в краевой задаче (1.6), (1.7)

$$\begin{aligned} y_3 &= (\tilde{y}_3 + f) c a^{-1/3} \varepsilon^{-1}, \quad x_3 = \rho_w d_0 c^3 \varepsilon^{-3} a^{-1} \mu_w^{-1} \tilde{x}_3, \\ v_3 &= \left(\tilde{v}_3 + \tilde{u}_3 \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_3} + \tilde{w}_3 \frac{\partial f}{\partial \tilde{z}_3} \right) c^{-1} \mu_w \varepsilon a^{1/3} \rho_w^{-1}, \quad u_3 = c d_0 \varepsilon^{-1} a^{-1/3} \tilde{u}_3, \\ z_3 &= \rho_w d_0 c^3 \varepsilon^{-3} a^{-1} \mu_w^{-1} \tilde{z}_3, \quad w_3 = c d_0 \varepsilon^{-1} a^{-1/3} \tilde{w}_3, \quad p_3 = \rho_w c^2 d_0^2 \varepsilon^{-2} a^{-2/3} \tilde{p}_3 \end{aligned}$$

приводит к краевой задаче вида

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \tilde{u}_3 \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_3} + \tilde{v}_3 \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{y}_3} + \tilde{w}_3 \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{z}_3} + \frac{\partial \tilde{p}_3}{\partial \tilde{x}_3} &= \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{y}_3^2}, \\ \tilde{u}_3 \frac{\partial \tilde{w}_3}{\partial \tilde{x}_3} + \tilde{v}_3 \frac{\partial \tilde{w}_3}{\partial \tilde{y}_3} + \tilde{w}_3 \frac{\partial \tilde{w}_3}{\partial \tilde{z}_3} + \frac{\partial \tilde{p}_3}{\partial \tilde{z}_3} &= \frac{\partial^2 \tilde{w}_3}{\partial \tilde{y}_3^2}, \\ \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_3} + \frac{\partial \tilde{v}_3}{\partial \tilde{y}_3} + \frac{\partial \tilde{w}_3}{\partial \tilde{z}_3} &= 0, \\ \tilde{u}_3 = \tilde{y}_3, \quad \tilde{w}_3 = 0 \quad \text{при } \tilde{x}_3 \rightarrow -\infty, \quad \tilde{u}_3 = \tilde{w}_3 = \tilde{v}_3 = 0 \quad \text{при } \tilde{y}_3 = 0, \\ \tilde{u}_3 = \tilde{y}_3, \quad \tilde{w}_3 = 0 \quad \text{при } \tilde{y}_3 \rightarrow \infty, \quad \tilde{u}_3 - \tilde{y}_3 = \varphi(\tilde{p}_3) + f(\tilde{x}_3, \tilde{z}_3). \end{aligned}$$

2. При малой в масштабах (1.3) толщине неровности краевая задача (1.8) может быть линеаризована. Вводится следующее представление функций:

$$(2.1) \quad \tilde{u}_3 = \tilde{y}_3 + \lambda U, \quad \tilde{v}_3 = \lambda V, \quad \tilde{p}_3 = \lambda P, \quad \tilde{w}_3 = \lambda W, \quad y_3 = Y, \quad x_3 = X,$$

где $f = \lambda F$, $\lambda \ll 1$. Для переменных (2.1) краевая задача (1.8) имеет вид

$$(2.2) \quad \begin{aligned} Y \partial U / \partial X + V + \partial P / \partial X &= \partial^2 U / \partial Y^2, \\ Y \partial W / \partial X + \partial P / \partial Z &= \partial^2 W / \partial Y^2, \\ \partial U / \partial X + \partial V / \partial Y + \partial W / \partial Z &= 0, \\ U = F, \quad W = 0 \quad \text{при } Y \rightarrow \infty, \\ U = W = 0 \quad \text{при } X \rightarrow -\infty, \\ U = W = V = 0 \quad \text{при } Y = 0. \end{aligned}$$

Дифференцирование первого уравнения краевой задачи (2.2) по переменным X и Y и второго уравнения по переменным Z и Y после сложения этих уравнений приводит с учетом уравнения неразрывности к уравнению

$$(2.3) \quad Y \partial s / \partial X = \partial^2 s / \partial Y^2$$

с граничными условиями для функции $s = -\partial^2 V / \partial Y^2$

$$(2.4) \quad \begin{aligned} s = 0 \quad \text{при } X \rightarrow -\infty, \quad s = 0 \quad \text{при } Y \rightarrow \infty; \\ \partial s / \partial Y = \partial^2 P / \partial X^2 + \partial^2 P / \partial Z^2 \quad \text{при } Y = 0, \\ \int_0^\infty s dY = \frac{\partial}{\partial X} [\varphi(P) + F(X, Z)] \end{aligned}$$

($\varphi \equiv 0$, если рассматривается «компенсационный» режим течения). Уравнение (2.3) для функции $s(X, Y, Z)$ является уравнением параболического

типа. Анализ последних двух краевых условий (2.4) показывает, что распределение давления описывается уравнением эллиптического типа.

Исходная система уравнений Навье — Стокса, из которой получено уравнение (2.3), представляет собой систему уравнений эллиптического типа для функций u, v, w, p . Переход при $Re \rightarrow \infty$ к системе уравнений пространственного пограничного слоя приводит, как показано в [17], к системе уравнений параболического типа. Система уравнений (2.3), (2.4), полученная из системы уравнений Навье — Стокса в результате предельного перехода, содержит эллиптическое уравнение только для функции P , т. е. эта система занимает в некотором смысле промежуточное место между системой уравнений пространственного пограничного слоя и системой уравнений Навье — Стокса.

Для решения краевой задачи (2.2) можно применить преобразование Фурье по переменным X и Z :

$$U_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(X, Y, Z) e^{-i\alpha X - i\omega Z} dX dZ,$$

которое дает

$$Y i \alpha U_1 + V_1 + i \alpha P_1 = U_1'', \quad Y i \alpha W_1 + i \omega P_1 = W_1'', \quad i \alpha U_1 + V_1' + i \omega W_1 = 0, \\ U_1(\alpha, Y, \infty) = F_1(\alpha, \omega), \quad Y \rightarrow \infty.$$

Замена переменных $Y = Y_1(i\alpha)^{-1/3}$ позволяет получить для функции

$$f_1 = (i\alpha)^{1/3} (i\alpha U_1 + i\omega W_1)'$$

уравнение

$$Y_1 f_1 = f_1''$$

решением которого, затухающим при $Y_1 \rightarrow \infty$, является функция Эйри [18]

$$f_1 = c_1 \text{Ai}(Y_1).$$

Используя краевые условия, получим соотношения

$$c_1 \int_0^{\infty} \text{Ai}(Y_1) dY_1 = (i\alpha)^{4/3} F_1(\alpha, \omega), \quad c_1 \text{Ai}'(0) = -P_1 \frac{\alpha^2 + \omega^2}{(i\alpha)^{1/3}},$$

откуда следует выражение для функции P_1

$$P_1 = -3 \text{Ai}'(0) (i\alpha)^{5/3} F_1 / (\alpha^2 + \omega^2).$$

Используя обратное преобразование Фурье, имеем формулу для возмущения давления

$$P = -\frac{3 \text{Ai}'(0)}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(i\alpha)^{5/3} F_1(\alpha, \omega) e^{i\alpha X + i\omega Z} d\alpha d\omega}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Для $F = \exp(-X^2 - Z^2)$ этот интеграл сводится к следующему:

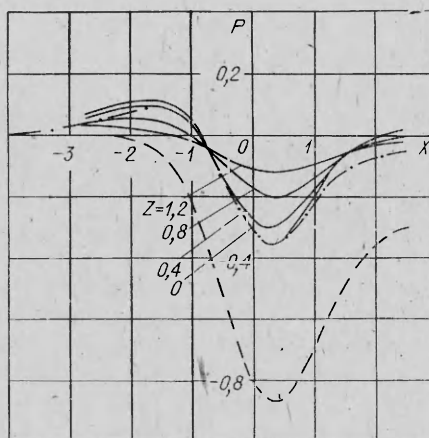
$$(2.5) \quad P = -\frac{3 \text{Ai}'(0)}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{r^{5/3} e^{-r^2/4 - \omega^2/4} \cos \omega Z \cos \left(rX + \frac{5}{6} \pi \right) dr d\omega}{\omega^2 + r^2}.$$

На фиг. 2 представлены результаты расчета распределения давления $P(X, Z)$ (см. (2.5)), где штриховой линией изображено распределение давления, соответствующее плоскому течению около неровности с формой $F = \exp(-X^2)$.

Можно отметить, что переход к плоскому течению сопровождается перераспределением давления — уменьшением давления по абсолютной величине выше по течению и ростом ниже по течению от неровности. В плоском течении при $X < 0$ для финитной неровности возмущения давления

выше по течению от неровности отсутствуют и допустимо лишь изменение уровня давления.

Для гиперзвукового течения в режиме сильного взаимодействия этот факт установлен в [19]. «Компенсационный» режим течения предполагает сохранение суммарной толщины, образованной неровностью и толщиной вытеснения течения над неровностью. В плоском течении, следовательно, появление возмущения давления связано с изменением толщины тела. Это явление объясняется также отсутствием при $W = 0$ ненулевых собственных решений краевой задачи (2.2), удовлетворяющих условию затухания при $X \rightarrow -\infty$.



Ф и г. 2

В пространственном течении ситуация коренным образом меняется. В течении при отсутствии неровности рост давления в продольном направлении может сопровождаться растеканием в поперечном направлении, так что увеличение толщины вытеснения из-за роста давления может компенсироваться уменьшением толщины вытеснения из-за растекания. Система уравнений (2.2) имеет, как показано в [13], собственные решения вида $P = \sin \alpha Z \exp(\alpha X)$. Следовательно, изменение формы неровности по Z будет приводить к появлению компонента скорости W и при неизменной суммарной толщине вытеснения к изменению в продольном направлении давления, что объясняет возможность передачи возмущений давления вверх по потоку в пространственном «компенсационном» течении.

Если для краевой задачи (2.3) ввести новые переменные

$$X = X, Y = g(X)N, s = h(X)\psi(X, N, Z),$$

то она примет вид

$$(2.6) \quad \psi'' = -g^2 g' N^2 \psi' + \frac{g^3 h'}{h} N \psi + g^3 N \psi, \quad \psi(X, \infty, Z) = 0, \quad \int_0^\infty \psi dN = \frac{F^*}{gh},$$

где

$$\partial/\partial X = (\quad)' \quad \text{и} \quad \partial/\partial N = (\quad)'.$$

Для неровностей вида

$$F(X, Z) = \text{const} \sim X^{(\beta+4)/3}$$

краевая задача (2.6) сводится к автомодельной

$$(2.7) \quad \psi'' + N^2 \psi' - \beta N \psi = 0, \quad \psi(\infty) = 0, \quad \int_0^\infty \psi dN = 1,$$

и тогда

$$\partial s / \partial Y|_{Y=0} \sim \psi'(0) X^{(\beta-1)/3}.$$

Краевая задача (2.7) является типичной задачей со взаимодействием. Обычно такие задачи решаются методом пристрелки краевого условия при $N = 0$ (см., например, [7]). Однако вид второго краевого условия (2.7) позволяет включить его в разностную схему и эффективно использовать метод прогонки (подобный метод решения аналогичных краевых задач использовался в [20]).

Из решения краевой задачи (2.7) получается, что при $\beta = -4$ основной определитель разностной схемы обращается в нуль. Очевидно, это является условием существования нетривиального решения при $X \rightarrow -\infty$ для финитных неровностей (или вообще для неровностей с $F^* = 0$).

Численное решение краевой задачи (2.3), (2.4) было получено также для неровности $F = e^{-x^2 - z^2}$. На фиг. 2 для сравнения штрихпунктирной линией показано распределение давления по линии симметрии неровности. Некоторое отличие результатов наблюдается только при удалении от вершины неровности из-за различных способов задания краевых условий для давления $P(X, Z)$ при проведении аналитических и разностных расчетов.

3. Из полученных выше результатов следует, что распределение давления в возмущенной области течения описывается уравнением эллиптического типа. Используя это уравнение, можно получить оценку для поперечного градиента давления $\partial p / \partial z = O(ba^{-4/3})$. Поскольку такой же порядок сохраняет и продольный градиент давления $\partial p / \partial x$, перепад давления в продольном направлении оказывается равным по порядку величины $O(ba^{-1/3})$. Из уравнений поперечного импульса и неразрывности можно получить оценку для поперечного компонента скорости $w = O(ba^{-2/3})$.

Сравнение членов в уравнении для продольного импульса показывает, что в первом приближении градиент давления $\partial p / \partial x$ в этом уравнении отсутствует. Таким образом, при $b = o(a)$ исходная краевая задача разбивается на две задачи. Первая из них описывает течение в области с характерными размерами

$$y = O(c), \quad x = O(a), \quad z = O(b).$$

Система уравнений для этой области представляет собой систему (1.8), в первом уравнении которой отсутствует член $\partial p_3 / \partial x_3$. Решение этой системы позволяет определить градиент давления $\partial p_3 / \partial z_3 (z_3 = 0)$.

Вторая задача описывает течение в области с характерными размерами $x = O(a)$, $y = O(c)$, $z = O(a)$.

Следует отметить, что возмущения функций u , v в этой области оказываются меньшими, чем в области вблизи неровности. Течение здесь описывается линейной системой уравнений (2.2), в которой распределение давления получается в результате решения системы (2.2) с учетом краевого условия для поперечного градиента давления $\partial p_3 / \partial z_3 |_{z_3=0}$ и компонента скорости $w_3 (z_3 = 0)$, полученного из решения задачи в области, прилегающей к неровности.

В пределе при $b \rightarrow 0$ поперечный размер и толщина неровности могут оказаться одного порядка $b = O(c)$. Для такого режима течения независимые переменные и функции течения представимы в виде

$$(3.1) \quad (x, y, z, u, v, w, p, \rho) = (\bar{a}\bar{x}, \varepsilon a^{1/3}\bar{y}, \varepsilon a^{1/3}\bar{z}, a^{1/3}\bar{u}, \varepsilon^{-1/3}\bar{v}, \varepsilon a^{-1/3}\bar{w}, \varepsilon^2 a^{-2/3}\bar{p}, \rho_w).$$

Подстановка разложений (3.1) в систему уравнений Навье — Стокса и предельный переход (1.5) приводят к следующей системе уравнений:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} &= \nu_w \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right), \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \cdot \frac{1}{\rho_w} &= \nu_w \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} \right), \\ \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} &= \nu_w \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{z}^2} \right), \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} &= 0, \quad \nu_w = \mu_w / \rho_w \end{aligned}$$

с краевыми условиями вида

$$\begin{aligned} \bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0 \quad \text{при} \quad \bar{y} = c\varepsilon^{-1}a^{-1/3}f, \quad \bar{u} = d_0\bar{y}, \quad \bar{v} = \bar{w} = \bar{p} = 0, \\ \bar{y}^2 + \bar{z}^2 \rightarrow \infty, \\ \bar{u} = d_0\bar{y}, \quad \bar{w} = \bar{v} = 0, \quad \bar{x} \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Эта система уравнений с другими краевыми условиями была получена в [21], где изучено ламинарное несжимаемое течение в окрестности линии пересечения двух плоскостей.

Выше предполагалось, что толщина неровности c равна по порядку величины $O(\epsilon a^{1/3})$. Выполнение этого условия обеспечивало одинаковое влияние сил вязкости и сил инерции на течение вблизи неровности. Если $c = O(\epsilon a^{1/3})$, влияние сил вязкости становится преимущественным, а влияние сил инерции сказывается в приближениях более высокого порядка малости. В зависимости от соотношения ширины неровности b и других параметров задачи могут реализовываться тогда следующие режимы обтекания неровности.

При $O(\epsilon a^{1/3}) < b < O(a)$ наибольшим характерным размером в направлении OY остается величина, равная $\epsilon a^{-1/3}$. Течение описывается линейной системой уравнений (2.2), в которой отсутствует продольный градиент давления.

При $b = O(\epsilon a^{1/3})$ характерные размеры возмущенной области в направлениях OY и OZ совпадают. Течение в этом случае описывается линейаризованной системой уравнений (3.2), которая имеет вид

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \bar{y} \partial \bar{u}_1 / \partial \bar{x} + \bar{v}_1 &= \nu_w (\partial^2 \bar{u}_1 / \partial \bar{y}^2 + \partial^2 \bar{u}_1 / \partial \bar{z}^2), \\ \bar{y} \partial \bar{v}_1 / \partial \bar{x} + \partial \bar{p}_1 / \partial \bar{y}_3 &= \nu_w (\partial^2 \bar{v}_1 / \partial \bar{y}^2 + \partial^2 \bar{v}_1 / \partial \bar{z}^2), \\ \bar{y} \partial \bar{w}_1 / \partial \bar{x} + \partial \bar{p}_1 / \partial \bar{z} &= \nu_w (\partial^2 \bar{w}_1 / \partial \bar{y}^2 + \partial^2 \bar{w}_1 / \partial \bar{z}^2), \\ \partial \bar{u}_1 / \partial \bar{x} + \partial \bar{v}_1 / \partial \bar{y} + \partial \bar{w}_1 / \partial \bar{z} &= 0, \end{aligned}$$

где $\bar{u} = \bar{y} + \lambda \bar{u}_1$, $\bar{v} = \lambda \bar{v}_1$, $\bar{w} = \lambda \bar{w}_1$, $\lambda \ll 1$,

$$f = c^{-1} \lambda \epsilon a^{1/3} F,$$

с граничными условиями

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \bar{u}_1 = -F(x, z), \bar{v}_1 = \bar{w}_1 = 0 & \quad \text{при } \bar{y} = 0, \\ \bar{u}_1 = \bar{v}_1 = \bar{w}_1 = 0 & \quad \text{при } \bar{y} \rightarrow \infty, \\ \bar{u}_1 = \bar{v}_1 = \bar{w}_1 = 0 & \quad \text{при } \bar{x} \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Уменьшение ширины неровности приводит к тому, что при $O(c) < b < O(\epsilon a^{1/3})$ влияние сил инерции сказывается лишь во втором приближении и возмущенное течение в области с характерными размерами $x \sim O(a)$, $y \sim z \sim O(b)$ описывается системой уравнений (3.3) и краевых условий (3.4) с нулевыми конвективными членами в первых трех уравнениях.

В трех рассмотренных выше режимах неровность приводила к линейным изменениям продольной скорости. Наконец, при $b = O(c)$ высота неровности и характерный размер возмущенной области течения в направлении OY совпадают. Течение в этом случае описывается системой уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z_0^2} = 0, \quad \frac{\partial p_0}{\partial z_0} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial z_0^2}, \\ \frac{\partial p_0}{\partial y_0} = \frac{\partial^2 v_0}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial z_0^2}, \quad \frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \frac{\partial v_0}{\partial y_0} + \frac{\partial w_0}{\partial z_0} = 0, \end{aligned}$$

где

$$u_0 = u \epsilon c^{-1}, \quad v_0 = \epsilon a c^{-2} v, \quad w_0 = \epsilon a c^{-2} w, \quad x_0 = a^{-1} x, \quad y_0 = c^{-1} y, \quad z_0 = c^{-1} z,$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u_0 = w_0 = v_0 = 0 & \quad \text{при } y_0 = f, \\ u_0 = y_0, \quad p_0 = v_0 = w_0 = 0 & \quad \text{при } y_0^2 + z_0^2 \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Возвращаясь к анализу неровностей, имеющих одинаковые размеры в направлениях OX и OZ , нужно отметить, что при $a = O(\epsilon^{3/2})$ из равенства (1.1) следует, что характерные размеры неровности во всех направлениях одинаковы. Течение тогда описывается системой уравнений Навье — Стокса для несжимаемой жидкости.

Пример численного решения такой системы уравнений, описывающей обтекание неровности на дне ламинарного пограничного слоя, дан в [14]. Вырождение, которое претерпевает эта система уравнений при уменьшении параметров, характеризующих неровность, здесь не рассматривается. Для изучения таких режимов течения и получения решений описанных выше краевых задач необходимы дальнейшие исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголепов В. В., Нейланд В. Я. Обтекание малых неровностей на поверхности тела сверхзвуковым потоком вязкого газа.— Тр. ЦАГИ, 1971, вып. 1363.
2. Боголепов В. В., Нейланд В. Я. Исследование локальных возмущений вязких сверхзвуковых течений.— В кн.: Проблемы аэродинамики. М.: Наука, 1975.
3. Зубов А. В. Влияние единичной шероховатости на течение жидкости в пограничном слое.— Учен. зап. ЦАГИ, 1971, т. 2, № 1.
4. Smith F. T. Laminar flow over a small hump on a flat plate.— J. Fluid Mech., 1973, vol. 57, p. 4.
5. Боголепов В. В. Расчет взаимодействия сверхзвукового пограничного слоя с тонким препятствием.— Учен. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 6.
6. Боголепов В. В. Обтекание малой цилиндрической выпуклости на поверхности пластины сверхзвуковым потоком вязкого газа.— Учен. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 2.
7. Лыжин Д. О. Обтекание плавной ступеньки сверхзвуковым потоком вязкого газа в режиме свободного взаимодействия.— Учен. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, № 4.
8. Казаков А. В. Численное исследование обтекания малых неровностей на поверхности пластины сверхзвуковым потоком вязкого газа.— Тр. ЦАГИ, 1978, вып. 1910.
9. Казаков А. В. Расчет обтекания малой каверны и уступа на поверхности пластины сверхзвуковым потоком вязкого газа.— Тр. ЦАГИ, 1978, вып. 1910, 1976.
10. Липатов И. И. Пространственное обтекание малой неровности ламинарным пограничным слоем.— Учен. зап. ЦАГИ, 1980, т. 11, № 2.
11. Smith F. T., Sykes R. I., Brighton P. W. M. A two-dimensional boundary layer encountering a three-dimensional hump.— J. Fluid Mech., 1977, vol. 83, p. 1.
12. Sykes R. I. Stratification effects in boundary layer flow over hills.— Proc. Roy. Soc. Lond., 1978, A 361, N 1705.
13. Липатов И. И. Обтекание локальных пространственных неровностей на дне ламинарного пограничного слоя в режиме слабого гиперзвукового взаимодействия.— Тр. ЦАГИ, 1980, вып. 2079.
14. Mason P. J., Sykes R. I. Three-dimensional numerical integrations of the Navier — Stokes equations for flow over surface mounted obstacles.— J. Fluid Mech., 1979, vol. 91, p. 3.
15. Smith F. T. A three-dimensional boundary layer separation.— J. Fluid Mech., 1980, vol. 99, p. 1.
16. Sykes R. I. On three-dimensional boundary layer flow over surface irregularities.— Proc. Roy. Soc. Lond., 1980, A 373, N 1754.
17. Wang. On the determination for three-dimensional boundary layer equations.— J. Fluid Mech., 1971, vol. 48, p. 2.
18. Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.
19. Stewartson K., Williams P. G. Self-induced separation.— Proc. Roy. Soc. Lond., 1969, A 312, N 1509.
20. Коваленко А. А., Нейланд В. Я. Сильное взаимодействие пограничного слоя с гиперзвуковым потоком при локальных возмущениях граничных условий.— Учен. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 2.
21. Rubin S. G., Grossman B. Viscous flow along a corner: numerical solution of the corner layer equations.— Quart. Appl. Math., 1971, vol. 29, N 2.

Поступила 19/IX 1983 г.