УДК 539.0

СТРОГО СОПРЯЖЕННЫЕ ТЕНЗОРЫ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ

С. Н. Коробейников

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

В классе сопряженных по мощности тензоров напряжений и деформаций вводится подкласс строго сопряженных тензоров, а именно тензоров, удовлетворяющих требованию преобразования по одному и тому же закону при перемещении окрестности материальной частицы как жесткого целого. Показано преимущество использования строго сопряженных тензоров напряжений и деформаций при формулировке вариационных принципов для тел из гиперупругого материала.

Введение. В настоящее время в механике сплошной среды используются различные тензоры напряжений и деформаций. Первые попытки поставить в соответствие определенному тензору деформаций некоторый тензор напряжений, используя мощность внутренних сил, сделаны в [1]. Определения сопряженных по мощности тензоров напряжений и деформаций приведены в [2–7]. В настоящей работе предлагается ввести подкласс сопряженных по мощности тензоров напряжений и деформаций, удовлетворяющих требованию преобразования по одному и тому же закону сопряженных тензоров напряжений и деформаций при жестких движениях окрестности материальной частицы. Показано, что при несоблюдении такого ограничения некоторые известные функционалы для вариационных уравнений нелинейной теории упругости не обладают свойством инвариантности по отношению к жестким движениям входящих в подынтегральные выражения слагаемых.

1. Кинематика деформирования. Пусть $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{x}$ — векторы положения материальной частицы деформируемого тела в отсчетной и текущей конфигурациях соответственно, $\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}$ — вектор перемещения этой частицы. Введем несимметричные тензоры градиентов деформации F и перемещения H, а также транспонированные к ним тензоры $\bar{F}$ и $\bar{H}$ [3, 5–8]:

$$F \equiv \boldsymbol{x}\nabla, \qquad H \equiv \boldsymbol{u}\nabla, \qquad \bar{F} \equiv \nabla\boldsymbol{x}, \qquad \bar{H} \equiv \nabla\boldsymbol{u}. \tag{1.1}$$

Эти тензоры связаны между собой соотношениями

$$F = g + H, \qquad \bar{F} = g + \bar{H}, \qquad \bar{F} = F^{\text{т}}, \qquad \bar{H} = H^{\text{т}}. \tag{1.2}$$

Здесь g — метрический (единичный) тензор; ∇ — оператор Гамильтона в метрике отсчетной конфигурации тела; индекс т обозначает транспонирование. В декартовой системе отсчета с ортонормированными базисными векторами $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{k}_3$ оператор Гамильтона определяется как $\nabla \equiv \boldsymbol{k}_i \partial/\partial X_i$, а тензоры F, $\bar{F}$, H и $\bar{H}$ имеют следующие представления:

$$F = x_{i,j}\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{k}_j, \qquad \bar{F} = x_{j,i}\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{k}_j, \qquad H = u_{i,j}\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{k}_j, \qquad \bar{H} = u_{j,i}\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{k}_j,$$

где $(\cdot)_{,i} \equiv \partial(\cdot)/\partial X_i$; X_i, x_i, u_i ($i = 1, 2, 3$) — компоненты векторов $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{u}$ соответственно; здесь и далее по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00525) и программы “Университеты России — фундаментальные исследования” (грант № 1795).

Несимметричные тензоры F, $\bar{F}$, H и $\bar{H}$ характеризуют деформацию окрестности материальной частицы, включающую ее искажение и поворот. Рассмотрим симметричный тензор деформаций Грина — Лагранжа, определяющий искажение окрестности материальной частицы [5–8]:

$$E \equiv \frac{1}{2}(\bar{F}\cdot\bar{F}^{\text{т}} - g) = \frac{1}{2}(\bar{H} + \bar{H}^{\text{т}} + \bar{H}\cdot\bar{H}^{\text{т}}) = \frac{1}{2}(F^{\text{т}}\cdot F - g) = \frac{1}{2}(H + H^{\text{т}} + H^{\text{т}}\cdot H). \quad (1.3)$$

Здесь и далее точка между тензорами обозначает скалярное (внутреннее) произведение тензоров.

2. Тензоры напряжений. Обозначим через s симметричный тензор истинных напряжений Коши. Введем тензоры условных напряжений, которые выражаются через тензор s и введенные выше кинематические тензоры [2–9]:

$$\tau \equiv Js, \qquad S \equiv F^{-1}\cdot\tau\cdot\bar{F}^{-1}, \qquad P \equiv \tau\cdot\bar{F}^{-1}, \qquad \bar{P} \equiv F^{-1}\cdot\tau = P^{\text{т}},$$

где $J \equiv \rho/\bar{\rho} = \det F$; ρ, $\bar{\rho}$ — массовые плотности материала в отсчетной и текущей конфигурациях; τ — симметричный тензор напряжений Кирхгофа; S — симметричный второй тензор напряжений Пиола — Кирхгофа; P — несимметричный первый тензор напряжений Пиола — Кирхгофа; $\bar{P}$ — несимметричный тензор напряжений Лагранжа.

3. Сопряженные тензоры напряжений и деформаций. Мощность внутренних сил единицы массы тела определяется в виде [1–7, 9]

$$w \equiv \frac{1}{\bar{\rho}}\, s : d = \frac{1}{\rho}\,\tau : d, \quad (3.1)$$

где $d \equiv (l + l^{\text{т}})/2$ — симметричный тензор скорости деформаций; $l = \dot{F}\cdot F^{-1}$ — тензор градиента скорости [6, 10]; точка обозначает материальную производную; “ : ” — двойное скалярное произведение произвольных тензоров второго ранга A и B: $A : B \equiv \operatorname{tr}(A\cdot B^{\text{т}})$; $\operatorname{tr} h$ — первый инвариант тензора второго ранга h.

Определение 1. Назовем тензор напряжений A и тензор деформаций B *сопряженными по мощности*, если выполняется равенство

$$A : \dot{B} = \tau : d.$$

Справедливы равенства [2–9]

$$\tau : d = S : \dot{E} = \bar{P} : \dot{\bar{F}} = P : \dot{F} = \bar{P} : \dot{\bar{H}} = P : \dot{H}, \quad (3.2)$$

т. е. пары тензоров напряжений и деформаций

$$(S, E), \qquad (\bar{P}, \bar{F}), \qquad (P, F), \qquad (\bar{P}, \bar{H}), \qquad (P, H) \quad (3.3)$$

являются сопряженными. Можно также вводить другие пары сопряженных тензоров напряжений и деформаций [1–7].

Рассмотрим два движения тела, определяемых законами $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t)$, $\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{X}, t)$, где t — монотонно возрастающий параметр деформирования. Если для некоторой материальной частицы существует такая окрестность, в которой выполнено равенство

$$\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{X}, t) = Q(t)\cdot\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t) + \boldsymbol{c}(t),$$

то движение этой окрестности от $\boldsymbol{x}$ к $\boldsymbol{x}^*$ (или наоборот) называется *жестким* [5, 6, 8, 10]. Здесь $Q(t)$ — собственно ортогональный тензор ($Q^{\text{т}} = Q^{-1}$, $\det Q = 1$), соответствующий повороту этой окрестности, а вектор $\boldsymbol{c}(t)$ — ее перемещению.

Определение 2. Назовем тензоры напряжений и деформаций *строго сопряженными*, если сопряженные по мощности тензоры напряжений и деформаций при жестких движениях окрестности материальной частицы преобразуются по одному и тому же закону.

При жестких движениях окрестности материальной частицы введенные тензоры напряжений и деформаций преобразуются по следующим формулам [5, 6, 8, 10, 11]:

$$\begin{aligned} &E^* = E, \qquad \bar{F}^* = \bar{F}\cdot Q^{\mathrm{T}}, \qquad F^* = Q\cdot F, \qquad d^* = Q\cdot d\cdot Q^{\mathrm{T}},\\ &S^* = S, \qquad \bar{P}^* = \bar{P}\cdot Q^{\mathrm{T}}, \qquad P^* = Q\cdot P, \qquad \tau^* = Q\cdot\tau\cdot Q^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Выведем законы преобразования тензоров $\bar{H}$ и H при жестких движениях окрестности материальной частицы. Из (1.2) и (3.4) получаем соотношения

$$\bar{F}^* = g^* + \bar{H}^*, \qquad \bar{F}^* = (g + \bar{H})\cdot Q^{\mathrm{T}}. \tag{3.5}$$

Учитывая равенство $g^* = g$, из (3.5) получаем

$$\bar{H}^* = Q^{\mathrm{T}} - g + \bar{H}\cdot Q^{\mathrm{T}}, \qquad H^* = \bar{H}^{*\mathrm{T}} = Q - g + Q\cdot H. \tag{3.6}$$

Из (3.4) и (3.6) следует, что из сопряженных пар тензоров в (3.3) строго сопряженными являются (S, E), $(\bar{P}, \bar{F})$, (P, F).

4. Определяющие соотношения гиперупругого материала. В классификации определяющих соотношений для конечных (больших) деформаций различают три типа упругих материалов [9, 12]: гиперупругие, упругие и гипоупругие. При малых деформациях тела из линейного упругого материала все три формулировки эквивалентны [9]. Следуя [9, 12], приведем определение гиперупругого материала.

Определение 3. Материал тела называется *гиперупругим*, если существуют естественная конфигурация тела (в которой напряжения и деформации равны нулю) и такая аналитическая функция $W(E)$, образуемая по отношению к естественной конфигурации, что для всех точек тела справедливо равенство

$$\dot{W} = w. \tag{4.1}$$

Из законов термодинамики следует механический смысл функции W: эта функция является *потенциальной энергией деформаций* единицы массы тела. Удобно ввести *удельную потенциальную энергию деформаций* $\bar{W}(E)$ [9] (потенциальную энергию деформаций единицы объема тела в отсчетной конфигурации):

$$\bar{W} \equiv \rho W. \tag{4.2}$$

Из (4.1), (4.2), (3.1) и (3.2) следуют определяющие соотношения гиперупругого материала

$$S = \frac{d\bar{W}}{dE}. \tag{4.3}$$

Альтернативные формы записи определяющих соотношений гиперупругого материала можно получить, используя другие сопряженные пары тензоров напряжений и деформаций. Используя (1.3), получаем выражения удельной потенциальной энергии деформаций

$$\bar{E}(\bar{F}) \equiv \bar{W}[E(\bar{F})], \quad \tilde{E}(F) \equiv \bar{W}[E(F)], \quad \hat{E}(\bar{H}) \equiv \bar{W}[E(\bar{H})], \quad \check{E}(H) \equiv \bar{W}[E(H)]. \tag{4.4}$$

Из (4.1), (4.2), (3.1), (3.2) и (4.4) следуют представления определяющих соотношений гиперупругого материала [5, 7, 9, 12–15]

$$\bar{P} = \frac{d\bar{E}(\bar{F})}{d\bar{F}}, \qquad P = \frac{d\tilde{E}(F)}{dF}, \qquad \bar{P} = \frac{d\hat{E}(\bar{H})}{d\bar{H}}, \qquad P = \frac{d\check{E}(H)}{dH}. \tag{4.5}$$

5. Уравнения движения. Уравнения движения с граничными условиями записываются с помощью тензора напряжений $\bar{P}$ [5, 6, 9, 12–15]:

$$\nabla\cdot\bar{P} + \rho\boldsymbol{f} = \rho\ddot{\boldsymbol{u}} \ \text{ в } \ V, \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^p \ \text{ на } \ S_u, \qquad \boldsymbol{N}\cdot\bar{P} = \boldsymbol{T}^p \ \text{ на } \ S_T \tag{5.1}$$

или P [8]:

$$P\cdot\nabla + \rho\boldsymbol{f} = \rho\ddot{\boldsymbol{u}} \ \text{ в } \ V, \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^p \ \text{ на } \ S_u, \qquad P\cdot\boldsymbol{N} = \boldsymbol{T}^p \ \text{ на } \ S_T. \tag{5.2}$$

Здесь V — отсчетная конфигурация тела; S_u, S_T — части поверхности S ($S = S_u \cup S_T$), ограничивающей область V, на которых заданы соответственно компоненты вектора перемещения $\boldsymbol{u}$ и вектора напряжений $\boldsymbol{T} \equiv \boldsymbol{N} \cdot \bar{P} = P \cdot \boldsymbol{N}$; $\boldsymbol{N}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S; $\nabla \cdot \bar{P}$, $P \cdot \nabla$ — обозначения операций дивергенции тензоров $\bar{P}$ и P соответственно (в декартовой системе отсчета $\nabla \cdot \bar{P} = \bar{P}_{ji,j}\boldsymbol{k}_i$, $P \cdot \nabla = P_{ij,j}\boldsymbol{k}_i$); $\boldsymbol{f}$ — вектор массовой силы; верхний индекс p обозначает заданную величину.

Уравнения движения с использованием тензора напряжений S получаются при подстановке в систему (5.1) выражений

$$\bar{P} = S \cdot \bar{F} = S \cdot (g + \nabla \boldsymbol{u}) \tag{5.3}$$

или в систему (5.2) выражений

$$P = F \cdot S = (g + \boldsymbol{u}\nabla) \cdot S.$$

6. Системы уравнений гиперупругости. Различные формы записи замкнутых систем уравнений, описывающих деформирование тела из гиперупругого материала, получаются при использовании соответствующей сопряженной пары тензоров напряжений и деформаций. В таблице перечислены уравнения, составляющие эти замкнутые системы, для рассмотренных пар сопряженных тензоров.

Пара	Уравнения
S, E	(5.1), (5.3), (4.3), (1.3), (1.1)
$\bar{P}, \bar{F}$	(5.1), (4.5), (1.2), (1.1)
P, F	(5.2), (4.5), (1.2), (1.1)
$\bar{P}, \bar{H}$	(5.1), (4.5), (1.1)
P, H	(5.2), (4.5), (1.1)

7. Удельная дополнительная энергия. Предположим, что определяющие соотношения (4.3), (4.5) можно обратить:

$$E = E(S), \quad \bar{F} = \bar{F}(\bar{P}), \quad F = F(P), \quad \bar{H} = \bar{H}(\bar{P}), \quad H = H(P).$$

Тогда, воспользовавшись преобразованием Лежандра, можно ввести функции — *удельные дополнительные энергии*

$$\bar{W}_c = S : E - \bar{W}, \quad \bar{E}_c = \bar{P} : \bar{F} - \bar{E}, \quad \tilde{E}_c = P : F - \tilde{E}, \quad \hat{E}_c = \bar{P} : \bar{H} - \hat{E}, \quad \check{E}_c = P : H - \check{E}, \tag{7.1}$$

так что обращенные определяющие соотношения можно записать в виде [5, 9, 14]

$$E = \frac{d\bar{W}_c(S)}{dS}, \quad \bar{F} = \frac{d\bar{E}_c(\bar{P})}{d\bar{P}}, \quad F = \frac{d\tilde{E}_c(P)}{dP}, \quad \bar{H} = \frac{d\hat{E}_c(\bar{P})}{d\bar{P}}, \quad H = \frac{d\check{E}_c(P)}{dP}. \tag{7.2}$$

Из (7.1) следует

$$\begin{gathered} \bar{W} = \underline{S : E} - \bar{W}_c, \qquad \bar{E} = \underline{\bar{P} : \bar{F}} - \bar{E}_c, \qquad \tilde{E} = \underline{P : F} - \tilde{E}_c, \\ \hat{E} = \bar{P} : \bar{H} - \hat{E}_c, \qquad \check{E} = P : H - \check{E}_c. \end{gathered} \tag{7.3}$$

Используя (3.4), для жестких движений получаем

$$S^* : E^* = S : E, \qquad \bar{P}^* : \bar{F}^* = \bar{P} : \bar{F}, \qquad P^* : F^* = P : F.$$

Таким образом, для строго сопряженных пар тензоров напряжений и деформаций подчеркнутые слагаемые в правых частях (7.3) являются инвариантными (не изменяющимися при жестких движениях) величинами. Удельная потенциальная энергия деформаций в левых частях (7.3) — инвариантная величина. Следовательно, удельные дополнительные энергии $\bar{W}_c$, $\bar{E}_c$, $\tilde{E}_c$ — инвариантные величины. В общем случае первые члены в правых частях четвертой и пятой формул в (7.3) не являются инвариантными величинами, поэтому удельные дополнительные энергии $\hat{E}_c$ и $\check{E}_c$ также неинвариантные величины.

8. Вариационные принципы нелинейной теории упругости. Проанализируем различные варианты записи функционалов двух известных вариационных принципов нелинейной теории упругости (для статических задач в предположении $\ddot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}$) — принципа стационарности полной потенциальной энергии и принципа стационарности дополнительной энергии. Далее предполагается, что векторы внешних сил $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{T}^p$ не зависят от вектора перемещений $\boldsymbol{u}$.

Для всех рассмотренных пар сопряженных тензоров функционал полной потенциальной энергии тела из гиперупругого материала в классе достаточно гладких полей перемещений $\boldsymbol{u}$, удовлетворяющих кинематическим граничным условиям в (5.1), (5.2), имеет один и тот же вид

$$I(\boldsymbol{u}) \equiv \int\limits_V [E(\boldsymbol{u}) - \rho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{u}]\, dV - \int\limits_{S_T} \boldsymbol{T}^p \cdot \boldsymbol{u}\, dS.$$

Здесь $E(\boldsymbol{u}) \equiv \bar{W}[E(\nabla \boldsymbol{u})] = \bar{E}[\bar{F}(\nabla \boldsymbol{u})] = \tilde{E}[F(\boldsymbol{u}\nabla)] = \hat{E}(\nabla \boldsymbol{u}) = \check{E}(\boldsymbol{u}\nabla)$.

Вариационное уравнение принципа стационарности полной потенциальной энергии записывается в виде [5, 9, 14]

$$\delta I(\boldsymbol{u}) = 0. \tag{8.1}$$

Уравнениями Эйлера и естественными граничными условиями вариационного уравнения (8.1) являются уравнения равновесия и статические граничные условия в (5.1) или (5.2) с учетом зависимостей $\bar{P} = \bar{P}(\nabla \boldsymbol{u})$ или $P = P(\boldsymbol{u}\nabla)$, которые получаются при выполнении определяющих соотношений гиперупругого материала в (4.5) и кинематических связей в (1.1), (1.2).

Вариационный принцип стационарности дополнительной энергии имеет смысл рассматривать только для несимметричных сопряженных пар тензоров напряжений и деформаций [14]. Рассмотрим функционал (дополнительную энергию), предложенный в [16], в классе достаточно гладких полей тензора напряжений Лагранжа $\bar{P}$, удовлетворяющих уравнениям равновесия ($\ddot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}$) и статическим граничным условиям в (5.1):

$$\bar{J}(\bar{P}) \equiv \int\limits_V \bar{E}_c(\bar{P})\, dV - \int\limits_{S_u} \boldsymbol{N} \cdot \bar{P} \cdot \boldsymbol{x}\, dS. \tag{8.2}$$

Вариационное уравнение принципа дополнительной энергии записывается в виде [15, 16]

$$\delta \bar{J}(\bar{P}) = 0. \tag{8.3}$$

Уравнением Эйлера вариационного уравнения (8.3) является уравнение совместности, которое представляет собой второе уравнение в (7.2), где $\bar{F} \equiv \nabla \boldsymbol{x}$.

Если вместо варьируемых полей тензора напряжений Лагранжа $\bar{P}$ использовать соответствующие поля первого тензора напряжений Пиола — Кирхгофа P, удовлетворяющие уравнениям равновесия и статическим граничным условиям в (5.2), то функционал (8.2) нужно заменить функционалом

$$\tilde{J}(P) \equiv \int\limits_V \tilde{E}_c(P)\, dV - \int\limits_{S_u} \boldsymbol{x} \cdot P \cdot \boldsymbol{N}\, dS. \tag{8.4}$$

Уравнением Эйлера вариационного уравнения $\delta \tilde{J}(P) = 0$ является третье уравнение в (7.2), где $F \equiv \boldsymbol{x}\nabla$.

Рассмотрим функционал [14]

$$\hat{J}(\bar{P}) \equiv \int\limits_V \hat{E}_c(\bar{P})\, dV - \int\limits_{S_u} \boldsymbol{N} \cdot \bar{P} \cdot \boldsymbol{u}\, dS. \tag{8.5}$$

Уравнением Эйлера вариационного уравнения $\delta \hat{J}(\bar{P}) = 0$ является четвертое уравнение в (7.2), где $\bar{H} \equiv \nabla \boldsymbol{u}$.

Для вариационного уравнения $\delta\check{J}(P) = 0$ с функционалом

$$\check{J}(P) \equiv \int\limits_V \check{E}_c(P)\,dV - \int\limits_{S_u} \boldsymbol{u}\cdot P\cdot \boldsymbol{N}\,dS \tag{8.6}$$

уравнением Эйлера является пятое уравнение в (7.2), где $H \equiv \boldsymbol{u}\nabla$.

Отметим, что в функционалах (8.2), (8.4) подынтегральные выражения в объемном интеграле являются инвариантными величинами, а в (8.5), (8.6) — неинвариантными.

Заключение. В работе введено понятие строго сопряженных тензоров напряжений и деформаций, использование которых не приводит к неинвариантным выражениям для дополнительной энергии. Сопряженная пара тензоров $(\bar{P}, \bar{H})$, не входящая в класс строго сопряженных, используется в некоторых исследованиях (см., например, [9, 13–15]). Предпочтительным при рассмотрении гиперупругих материалов является использование строго сопряженных пар $(\bar{P}, \bar{F})$ [5, 6, 12, 16] или (P, F) [8, 11].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Новожилов В. В.** О принципах обработки результатов статических испытаний изотропных материалов // Прикл. математика и механика. 1951. Т. 15, № 6. С. 709–722.
2. **Хилл Р.** Об определяющих неравенствах для простых материалов. 1 // Механика. 1969. № 4. С. 94–109.
3. **Hill R.** Aspects of invariance in solid mechanics // Advances in applied mechanics / Ed. by C.-S. Yih. N. Y.: Acad. Press, 1978. V. 18. P. 1–75.
4. **Xiao H.** Unified explicit basis-free expressions for time rate and conjugate stress of an arbitrary Hill's strain // Intern. J. Solids Structures. 1995. V. 32, N 22. P. 3327–3340.
5. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
6. **Поздеев А. А., Трусов П. В., Няшин Ю. И.** Большие упругопластические деформации. М.: Наука, 1986.
7. **Черных К. Ф., Литвиненкова З. Н.** Теория больших упругих деформаций. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1988.
8. **Curnier A.** Computational methods in solid mechanics. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994.
9. **Fung Y. C.** Foundations of solid mechanics. Englewood Cliffs (New Jersey): Prentice-Hall, 1965.
10. **Herrmann W.** Inelastic constitutive relations // High-pressure shock compression of solids / Ed. by J. R. Asay, M. Shahinpoor. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1992. P. 115–185.
11. **Левитас В. И.** Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наук. думка, 1987.
12. **Прагер В.** Введение в механику сплошных сред. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
13. **Хилл Р.** О единственности и устойчивости в теории конечных упругих деформаций // Механика. 1958. № 3. С. 53–65.
14. **Васидзу К**. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987.
15. **Новожилов В. В.** Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958.
16. **Зубов Л. М.** Принцип стационарности дополнительной работы в нелинейной теории упругости // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34, № 2. С. 241–245.

Поступила в редакцию 18/VI 1999 г.