Теплофизика и аэромеханика, 2014, том 21, № 5

УДК 629.7.015

Метод определения характера колебательного движения летательного аппарата на основе анализа коэффициентов аэродинамических производных демпфирования

А.А. Дядькин[1], О.Н. Хатунцева[1,2]

[1]*ОАО РКК «Энергия», Королёв, Московская обл.*

[2] *МФТИ, Долгопрудный, Московская обл.*

E-mail: o1-khatun@yandex.ru

Анализ экспериментальных данных показывает, что характер колебательного движения летательных аппаратов не зависит однозначно от величины коэффициентов аэродинамических производных демпфирования. В настоящей работе предпринята попытка объяснить этот феномен. Разрабатывается методика, позволяющая адекватно характеризовать колебательное движение летательных аппаратов на основе анализа коэффициентов аэродинамических производных демпфирования.

Ключевые слова: коэффициенты аэродинамических производных демпфирования, гистерезис, динамические процессы.

Большинство линейных дифференциальных уравнений, используемых в качестве моделей для описания задач механики, на самом деле являются некоторым приближением нелинейных дифференциальных уравнений. В каких-то случаях такое приближение вполне допустимо и хорошо отражает динамику процесса. Однако достаточно часто возникают ситуации, когда расширение диапазона исследуемых параметров приводит к тому, что линейное приближение перестает адекватно работать.

Классическим примером механических систем, не подчиняющихся линейному описанию, являются системы, в фазовых портретах которых имеются предельные циклы. Одним из хорошо изученных видов нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих такой класс динамических систем с самовозбуждением, является уравнение Ван-дер-Поля: $\ddot{q} - \varepsilon\left(1 - q^2\right)\dot{q} + q = 0.$ Замена этого уравнения с нелинейным диссипативным членом на линейное уравнение $\ddot{q} - \lambda\dot{q} + q = 0$ приведет к тому, что в качестве решения мы получим либо затухающие (при $\lambda > 0$), либо возрастающие (при $\lambda < 0$) моды колебаний.

Разумеется, наилучшим способом решения задачи исследования колебаний летательных аппаратов (ЛА) было бы нахождение (или подбор) такого вида уравнения движения с нелинейными коэффициентами, которое адекватно описывало бы все режимы колебания: для разных чисел Маха, разных амплитуд и так далее. Однако такой подход практически не реализуем, в первую очередь, из-за того, что сам вид нелинейных коэффициентов уравнения движения в общем случае изменяется при изменении режимов колебания, кроме того, в некоторых случаях существуют несколько возможных режимов колебания в одном и том же диапазоне параметров.

Более реалистичным способом решения поставленной задачи представляется исследование отдельных режимов колебания и определение для каждого из них коэффициентов уравнения движения (преимущественно констант), наилучшим образом обеспечивающих соответствие решений этих уравнений экспериментальным данным. Именно такой подход применяется в аэродинамике.

Одной из основных характеристик, используемых в аэродинамике для описания динамических процессов, является комплекс аэродинамических производных демпфирования $\left(m_z^{\bar{\omega}_z}+m_z^{\bar{\dot{\alpha}}}\right)$ в уравнении движения тела, совершающего колебания (в отсутствии изменения вертикальной скорости при движении центра масс):

$$\ddot{\alpha}+\left(m_z^{\bar{\omega}_z}+m_z^{\bar{\dot{\alpha}}}\right)\frac{qSL^2}{I_zV_\infty}\dot{\alpha}+\omega_0^2\left(\alpha-\alpha_{cp.}\right)=0.$$

Метод определения комплекса аэродинамических производных демпфирования $\left(m_z^{\bar{\omega}_z}+m_z^{\bar{\dot{\alpha}}}\right)$ в численных или физических экспериментах заключается в определении степени затухания колебаний тела при осреднении по одному или нескольким периодам (или амплитудам) колебаний. Таким образом, по сути, комплекс аэродинамических производных демпфирования является коэффициентом диссипации, осредненным по периоду или амплитуде, и должен быть записан в виде: $\left(\left\langle m_z^{\bar{\omega}_z}\right\rangle+\left\langle m_z^{\bar{\dot{\alpha}}}\right\rangle\right)$, а уравнение движения представлено в виде линейного соотношения:

$$\ddot{\alpha}+\left(\left\langle m_z^{\bar{\omega}_z}\right\rangle+\left\langle m_z^{\bar{\dot{\alpha}}}\right\rangle\right)\frac{qSL^2}{I_zV_\infty}\dot{\alpha}+\omega_0^2\left(\alpha-\alpha_{cp.}\right)=0. \qquad (1)$$

Здесь $\left\langle m_z^{\bar{\omega}_z}\right\rangle=\left\langle \partial m_z/\partial\bar{\omega}_z\right\rangle=\mathrm{const}$ и $\left\langle m_z^{\bar{\dot{\alpha}}}\right\rangle=\left\langle \partial m_z/\partial\bar{\dot{\alpha}}\right\rangle=\mathrm{const}$ — производные демпфирования, осредненные по амплитуде колебания, $\bar{\omega}_z=\left(L/V_\infty\right)\omega_z$ — безразмерная угловая скорость вращения, $\bar{\dot{\alpha}}=\left(L/V_\infty\right)\dot{\alpha}$ — безразмерная скорость изменения угла атаки, $q=\rho V_\infty^2/2$ — скоростной напор, V_∞, ρ — скорость и плотность набегающего потока, S, L — характерные площадь и длина летательного аппарата, $\omega_0=\sqrt{-m_z^\alpha qSL/I_z}$ — собственная частота колебаний ЛА, I_z — момент инерции ЛА относительно оси OZ связанной системы координат с началом в центре масс, α — угол атаки набегающего потока, $\alpha_{\text{ср}}$ — значение балансировочного угла, относительно которого совершаются колебания ЛА. Осредняемые по амплитуде колебания параметры $m_z^{\bar{\omega}_z}$ и $m_z^{\bar{\dot{\alpha}}_z}$ могут являться функциями угла атаки α.

При записи уравнения (1) подразумевается, что существует однозначное соответствие между значением комплекса аэродинамических производных демпфирования и степенью затухания колебательного процесса: бóльшее (по модулю) значение комплекса аэродинамических производных демпфирования описывает колебательный процесс с более сильным затуханием — демпфированием, и наоборот. Кроме того, в литературе встречается определение коэффициента $m_z^{\bar{\omega}_z}$, выраженного через “ширину” гистерезиса, из которого следует, что в случае отсутствия гистерезисного характера колебания этот коэффициент равен нулю. В экспериментах же можно наблюдать при приблизительно одинаковых аэродинамических производных демпфирования совершенно разный характер колебательного движения ЛА и по степени затухания и по вероятности возникновения гистерезисной зависимости аэродинамических характеристик. Эти разногласия возникают из-за перехода к линейной модели уравнения движения при описании нелинейного процесса колебания ЛА.

В настоящей работе предпринята попытка разрешить это противоречие. В частности, показано, что, отсутствие гистерезисного характера колебания ЛА не влечет автоматически отсутствия диссипативного члена в уравнении (1). К тому же гистерезисный характер колебания ЛА может приводить к ослаблению демпфирования. Кроме того, при невыполнении условия для моментной характеристики $m_z^{\alpha} = \text{const}$ значение демпфирующего коэффициента $\left(\left\langle m_z^{\bar{\omega}_z}\right\rangle + \left\langle m_z^{\bar{\dot{\alpha}}}\right\rangle\right)$ является ненулевым при гармоническом (без демпфирования) характере колебаний ЛА по углу атаки набегающего потока, и поэтому при построении линеаризованной модели нелинейного процесса колебания ЛА в ограниченном диапазоне параметров уравнение (1) должно быть изменено. Остановимся на этом подробнее.

Как уже было сказано выше, ненулевая константа, стоящая в качестве множителя в уравнении движения в диссипативном члене, свидетельствует либо о наличии демпфирования (затухания), либо о наличии антидемпфирования (раскачки) колебания в зависимости от знака коэффициента диссипации. Гармонические колебания описываются уравнением движения в виде $\ddot{\alpha} + \omega_0^2\left(\alpha - \alpha_{ср.}\right) = 0.$

Покажем, какой вид приобретает комплекс аэродинамических производных демпфирования в случае гармонического характера колебания тела, чтобы понять, является ли уравнение (1) соотношением, правильно описывающим процесс колебания. Если коэффициент диссипации в уравнении движения — комплекс $\left(\left\langle m_z^{\bar{\omega}_z}\right\rangle + \left\langle m_z^{\bar{\dot{\alpha}}}\right\rangle\right)$ — окажется ненулевым при гармоническом колебании, то уравнение (1) не является корректным для описания гармонического колебания, а следовательно, не является корректным и в общем случае произвольного колебания тела.

Будем рассматривать колебания ЛА в плоскости угла атаки набегающего потока. Учитывая, что

$$m_z = \frac{I_z}{qSL}\ddot{\alpha}, \tag{2}$$

запишем:

$$m_z^{\bar{\dot{\alpha}}} = \frac{I_z}{qSL}\frac{\partial\ddot{\alpha}}{\partial\bar{\dot{\alpha}}}. \tag{3}$$

Для гармонического колебания тела можно записать зависимость $\alpha(t)$ в виде

$$\alpha = \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right), \quad \text{где} \quad \alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2. \tag{4}$$

Следовательно,

$$\dot{\alpha} = \frac{\pi}{T}\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right) = \pm\omega_0\sqrt{\left(\alpha_2 - \alpha\right)\left(\alpha - \alpha_1\right)}, \quad \text{где} \quad \omega_0 = 2\pi/T. \tag{5}$$

Переходя к новой координате $\delta\alpha = \alpha - \alpha_{\text{ср}} = \alpha - (\alpha_1 + \alpha_2)/2$, где $\alpha_{\text{ср}} = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$, получим $\dot{\alpha} = \pm\omega_0\sqrt{(\Delta\alpha/2)^2 - (\delta\alpha)^2}$, где $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$, $\delta\alpha = \alpha - (\alpha_1 + \alpha_2)/2$, или

$$\bar{\dot{\alpha}} = \pm\omega_0 \frac{L}{V_\infty}\sqrt{(\Delta\alpha/2)^2 - (\delta\alpha)^2}. \tag{6}$$

Используя уравнения (5) и (4), можно записать:

$$\ddot{\alpha} = \frac{\omega_0^2}{2}\Delta\alpha\cos(\omega_0 t) = \omega_0^2\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} - \alpha\right) = -\omega_0^2\delta\alpha. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует, что

$$\frac{\partial\ddot{\alpha}}{\partial\bar{\dot{\alpha}}} = \frac{\partial\ddot{\alpha}/\partial(\delta\alpha)}{\partial\bar{\dot{\alpha}}/\partial(\delta\alpha)} = \frac{V_\infty}{L}\frac{\omega_0^2}{\omega_0\delta\alpha\Big/\sqrt{(\Delta\alpha/2)^2 - (\delta\alpha)^2}} = \bar{\omega}_0\left(\frac{V_\infty}{L}\right)^2\sqrt{\left(\frac{\Delta\alpha/2}{\delta\alpha}\right)^2 - 1}, \text{ где } \bar{\omega}_0 = \frac{L}{V_\infty}\omega_0.$$

Подставляя это выражение в соотношение (3), получим

$$\left(m_z^{\bar{\dot{\alpha}}}(\delta\alpha)\right)_{\text{harmonic}} = \frac{I_z V_\infty^2}{qSL^3}\bar{\omega}_0\sqrt{\left(\frac{\Delta\alpha/2}{\delta\alpha}\right)^2 - 1}. \tag{8}$$

Учитывая, что безразмерная частота собственных колебаний $\bar{\omega}_0 = \sqrt{-m_z^{\alpha} qSL^3\Big/\left(I_z V_\infty^2\right)}$ или $\bar{\omega}_0 = \sqrt{-m_z^{\delta\alpha} qSL^3\Big/\left(I_z V_\infty^2\right)}$, выражение (8) можно переписать в виде

$$\left(m_z^{\bar{\dot{\alpha}}}(\delta\alpha)\right)_{\text{harmonic}} = \sqrt{-\frac{I_z V_\infty^2}{qSL^3}m_z^{\delta\alpha}}\sqrt{\left(\frac{\Delta\alpha/2}{\delta\alpha}\right)^2 - 1}.$$

Нетрудно убедиться, что если $m_z^{\delta\alpha} = m_z^{\alpha} = \text{const}$, то среднее значение $\left\langle m_z^{\bar{\dot{\alpha}}}\right\rangle_{\text{harmonic}} = \\ = \frac{1}{\Delta\alpha}\int\limits_{-\Delta\alpha/2}^{\Delta\alpha/2}\left(m_z^{\bar{\dot{\alpha}}}(\delta\alpha)\right)_{\text{harmonic}} d(\delta\alpha) = 0$. В этом случае в отсутствие аэродинамического гистерезиса (см. ниже) уравнение (1) может быть использовано для описания процесса колебания ЛА.

При невыполнении условия $m_z^{\delta\alpha} = \text{const}$, а следовательно, и условия $m_z^{\alpha} = \text{const}$ значение $\left\langle m_z^{\bar{\dot{\alpha}}}\right\rangle_{\text{harmonic}}$ будет ненулевым несмотря на гармонический характер колебания ЛА.

Для того чтобы коэффициент при диссипативном члене уравнения движения был нулевым в случае гармонического характера колебания ЛА, уравнение (1) должно быть переписано в виде:

$$\ddot{\alpha} + \left(\left(\left\langle m_z^{\bar{\omega}}\right\rangle + \left\langle m_z^{\bar{\dot{\alpha}}}\right\rangle\right) - B_{\text{harmonic}}\right)\frac{qSL^2}{I_z V_\infty}\dot{\alpha} + \omega_0^2\left(\alpha - \alpha_{\text{ср}}\right) = 0, \tag{9}$$

где

$$B_{\text{harmonic}} = \left\langle m_z^{\dot{\alpha}} \right\rangle_{\text{harmonic}} = \frac{1}{\Delta\alpha}\sqrt{\frac{I_z}{qSL}} \int_{-\Delta\alpha/2}^{\Delta\alpha/2} \sqrt{-m_z^{\delta\alpha}} \sqrt{\left(\frac{\Delta\alpha/2}{\delta\alpha}\right)^2 - 1} d\left(\delta\alpha\right). \tag{10}$$

Еще одним важным аспектом процесса аэродинамического демпфирования является аэродинамический гистерезис. Необходимость его исследования, в частности, связана с возможностью перехода с одного балансировочного угла летательного аппарата на другой в случае гистерезисного характера зависимости $m_z(\alpha)$.

Наличие или отсутствие гистерезиса в колебательном процессе напрямую не является свидетельством наличия или отсутствия демпфирования (антидемпфирования). И в том и в другом случае характер колебательного движения может быть как гармоническим, так и затухающим (с раскачкой). Это означает, что в уравнениях движения коэффициент при диссипативном члене в случае гистерезисного характера колебания тела должен быть вновь изменен. Оптимальным решением проблемы был бы подбор нелинейного коэффициента при диссипативном члене, обеспечивающим на фазовой плоскости появление предельного цикла, соответствующего экспериментальным данным исследуемой динамики процесса. Однако, как было уже сказано выше, такой путь представляется довольно сложным, а иногда и практически нереализуемым, в частности, из-за возможности реализации нескольких режимов колебаний в одном и том же диапазоне параметров.

Другим путем поиска решения задачи, рассматриваемым в настоящей работе и используемым в практической аэродинамике, является моделирование процесса колебания ЛА в терминах линеаризованного дифференциального уравнения в некотором диапазоне режимов колебания, что сводится к подбору коэффициента B_{harmonic} в уравнении (9), который должен быть записан с учетом дополнительной производной, характеризующей гистерезисный характер колебаний тела в гармоническом приближении.

Изучение гистерезиса в аэродинамике имеет довольно давнюю историю (см., например, работы [1, 2]), однако является незавершенным и по сей день. Обычно, гистерезисы подразделяют на динамические и статические. К сожалению, авторам неизвестны работы, в которых дано подробное описание отличий этих видов гистерезисов друг от друга. Из названия типов гистерезисов следует только, что первый из них зависит от скорости, а второй нет. Однако это не позволяет строить математические модели таких гистерезисов. Чтобы исправить эту ситуацию, в работах [3, 4] была дана классификация гистерезисных функций, в соответствии с которой все гистерезисные явления в аэродинамике и соответствующие им функциональные зависимости можно разделить на два типа. К первому типу относятся те явления, которые зависят и от направления изменения аргумента, и от модуля скорости изменения этого аргумента. Ко второму относятся явления, которые зависят от направления изменения аргумента, но при этом не зависят от величины (модуля) скорости изменения аргумента. Рассмотрим в отдельности физические и математические особенности явлений двух типов.

Дадим вначале более подробную характеристику явлений, относящихся к первому типу. Предположим, мы исследуем зависимость параметра m от варьируемого аргумента α. Поскольку априори известно, что исследуемые процессы зависят еще и от скорости изменения аргумента, то есть $m = m(\alpha, \dot{\alpha})$, то очевидно, что изображение зависимости исследуемой функции m только от самого аргумента α на координатной плоскости (m; α) является проекцией фазового пространства большей размерности (как минимум, трехмерного пространства) на пространство меньшей размерности (на плоскость). Поэтому, даже отвлекаясь от физики процесса, можно сказать, что в общем случае может существовать неопределенность в зависимости исследуемой функции m только

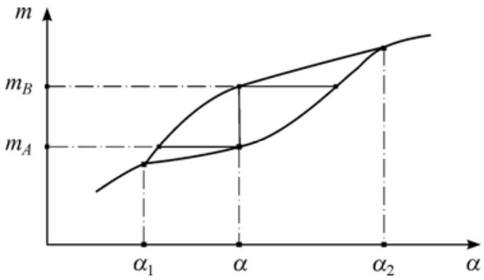

Рис. 1. Схематичное изображение гистерезисной кривой первого типа.

от одного аргумента, что, в свою очередь, может привести ее к гистерезисному виду на плоскости (m; α). Такие гистерезисные функции, как правило, имеют вид "петель" с вырожденными концами в местах изменения направления варьирования аргумента (область $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ на рис. 1). Если проводить исследование зависимости $m(\alpha)$ при малой скорости изменения аргумента $\dot{\alpha}$ ($\dot{\alpha} \to 0$), должно произойти "вырождение" гистерезисной функции в однозначную функцию $m(\alpha)$ на плоскости (m; α).

Физические аспекты, относящиеся к гистерезисным явлениям первого типа, связаны с эффектом запаздывания реакции рассматриваемой системы при воздействии на нее внешних сил. В аэродинамике таким эффектом является демпфирование, происходящее следующим образом. При положительном вращении углы атаки обтекаемых поверхностей, расположенных позади центра масс, увеличиваются, а у расположенных впереди — уменьшаются. Таким образом, вращение приводит к тому, что дополнительная подъемная сила позади центра масс летательного аппарата направлена вверх, а впереди центра масс — вниз, и появляется дополнительный (демпфирующий) момент, направленный против вращения.

Для процессов, относящихся ко второму типу гистерезисных явлений, характерно отсутствие зависимости исследуемого параметра от модуля скорости изменения варьируемого аргумента. Такие функции на плоскости (m; α), как правило, имеют вид гистерезисных функций с разрывами первого рода (см. рис. 2). Точки разрыва при изменении направления варьируемого аргумента, как правило, не совпадают. Иногда может наблюдаться некоторая корреляция и с изменением скорости варьируемого аргумента, но она носит скорее вероятностный, нежели детерминированный характер. Примером таких явлений может служить зависимость силы сопротивления обтекаемой сферы от числа Рейнольдса $C_x(\mathrm{Re})$ при переходе от ламинарного к турбулентному режиму обтекания и обратно в дозвуковом потоке, а так же изменение давления на цилиндре за угловой кромкой тел конус-цилиндр при увеличении и уменьшении числа Маха или угла атаки в районе критических чисел Маха, характеризующихся переходом от безотрывного обтекания угловой кромки к отрывному и наоборот [5]. При описании гистерезисных явлений второго типа нельзя однозначно утверждать, что зависимость $m(\alpha)$ на плоскости (m; α) является проекцией фазового пространства физических переменных большей размерности на эту плоскость. Как правило, возникновение таких явлений обусловлено возможностью существования различных режимов процесса в одном диапазоне значений варьируемого аргумента. На рис. 2 режимы "1" (до точки α_1) и "2" (после точки α_2) описываются, соответственно, ветвями

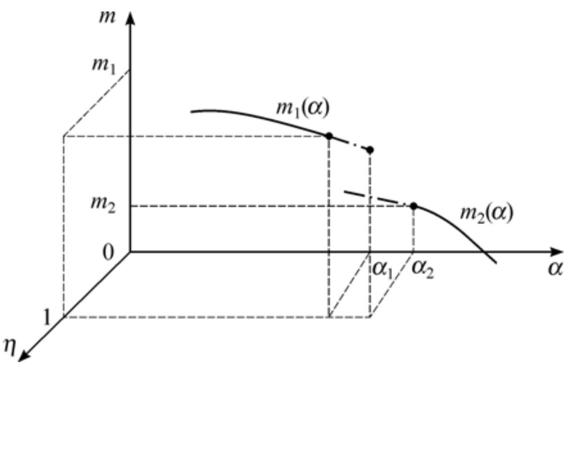

Рис. 2. Схематичное изображение гистерезисной кривой второго типа.

функции $m_1(\alpha)$ и $m_2(\alpha)$ однозначно. В области $\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$ может быть реализован как режим “1”, так и режим “2”, и переход с одного режима на другой происходит вероятностным образом. Описание гистерезисов второго типа может быть произведено в расширенном пространстве переменных [4], где в качестве дополнительной переменной используется параметр η, принимающий значение 1 при реализации одного режима и значение 0 при реализации другого режима исследуемого процесса (см. рис. 2).

Возможно также существование смешанных гистерезисных явлений, которые имеют отличительные черты явлений и первого и второго типов, например, когда ширина гистерезиса коррелирует со скоростью колебания тела, но при этом имеет место разрыв первого рода в аэродинамических характеристиках. Если исходить только из названия, такие гистерезисы должны быть отнесены к динамическим. Однако в нашей классификации это тип гистерезиса, который получается в результате интерференции гистерезисов первого и второго типов.

Уравнение (9) не дает информации о существовании или отсутствии гистерезисной зависимости аэродинамических характеристик (АХ) в колебательном процессе. Рассматривая колебательный процесс только в пространстве (α, t), невозможно его описать в полной мере, необходимо рассматривать полное фазовое пространство, в котором представлены гистерезисные зависимости.

Гистерезисный вид зависимости $m_z(\alpha)$ второго типа приведет в пространстве (α, t) к нерегулярному изменению амплитуды от времени (“биениям”) из-за нерегулярного попадания на разные ветви функции $m_z(\alpha)$ с разными производными $m_z^{\delta\alpha} = m_z^{\alpha}$ даже в процессе гармонического изменения угла $\delta\alpha(t)$ (см. соотношение (10)). К такому же эффекту в этом пространстве может приводить нелинейный вид зависимости коэффициента, стоящего в уравнении (9) перед параметром $\dot{\alpha}$. Поэтому переход от пространства большей размерности к описанию зависимости $\alpha(t)$ в пространстве (α, t) должно сопровождаться появлением нелинейных (возможно, стохастических) коэффициентов в уравнении (9), стоящих перед $\dot{\alpha}$.

Качественная оценка влияния гистерезисов второго типа на коэффициенты демпфирования может быть проведена, если в соотношении (10) в качестве производной $m_z^{\delta\alpha}$ использовать не один параметр, а два или более (в зависимости от количества ветвей разрывной функции). Это позволит оценить диапазон, в котором будут находиться значения коэффициентов демпфирования в случае реализации гистерезиса второго типа, например, при изменении положения точки отрыва потока.

В тех случаях, когда возможно существование гистерезисной зависимости $m_z(\alpha)$ первого типа, одна и та же зависимость $\alpha(t)$ в пространстве (α, t) может наблюдаться при разных значениях производной демпфирования, в зависимости от того реализовался гистерезис или нет. В случае существования гистерезиса эта производная будет больше, так как в каждой точке α из интервала $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ изменение частоты колебания ω будет приводить к дополнительному изменению момента m_z, связанному с вариацией ширины гистерезисной области (разностью значений m_z на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой $m_z(\alpha)$). Поэтому для описания зависимости $\alpha(t)$ в пространстве (α, t) с помощью уравнения (9) для процесса с гистерезисом первого типа производную демпфирования для гармонических колебаний B_{harmonic} необходимо заменить на производную демпфирования с учетом гистерезисного коэффициента:

$$B_{\text{harmonic}} = \left(\left\langle m_z^{\bar{\dot{\alpha}}} \right\rangle + \Delta m_z^{\bar{\omega}_z}{}_{\text{hyster}} \right)_{\text{harmonic}}. \tag{11}$$

Для квазистационарных гистерезисных функций первого типа в работе [4] было найдено соотношение для определения разности значений Δm величин обобщенных аэродинамических характеристик m на верхней (значение m_B) и нижней (значение m_A) ветвях гистерезисной кривой в произвольной точке α (см. рис. 1) для тела, совершающего гармонические колебания с периодом T:

$$\Delta m(\alpha, T) = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{T_1}{T} \sqrt{\left| \left(m_{\text{st}}(\alpha)\big|_{\alpha=\alpha_*} - m_{\text{st.cp}} \right) \frac{\partial m_{\text{st}}(\alpha)}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=\alpha_*} \right|} \sqrt{\left| \frac{(\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1)}{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_*} \right|}. \qquad (12)$$

Здесь $m_{\text{st}}(\alpha)\big|_{\alpha=\alpha_*}$, $\partial m_{\text{st}}(\alpha)/\partial\alpha\big|_{\alpha=\alpha_*}$ — значения стационарной функции $m_{\text{st}}(\alpha) = m(\alpha, \dot{\alpha})\big|_{\dot{\alpha}\to 0}$ и ее производной в произвольной точке α_* из диапазонов $\alpha_1 \le \alpha_* < \alpha_{\text{st. cp}}$, $\alpha_{\text{st. cp}} < \alpha_* \le \alpha_2$, где α_1 и α_2 — граничные точки гистерезисной области (точки разворота ЛА); $m_{\text{st. cp}} = m_{\text{st}}(\alpha)\big|_{\alpha=(\alpha_1+\alpha_2)/2}$ — значение стационарной функции в "серединной" точке гистерезисной области, T_1 — период квазистационарных гармонических колебаний тела в бездиссипативном случае, когда вся кинетическая энергия набегающего потока расходуется на компенсацию действия сил трения колеблющегося тела в воздухе.

Замечая, что для достаточно монотонных функций верно равенство $\sqrt{\left| \frac{m_{\text{st}}(\alpha)\big|_{\alpha=\alpha_*} - m_{\text{st. cp}}}{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_*} \frac{\partial m_{\text{st}}(\alpha)}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=\alpha_*} \right|} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{m_{\text{st}}(\alpha)\big|_{\alpha=\alpha_2} - m_{\text{st}}(\alpha)\big|_{\alpha=\alpha_1}}{\alpha_2 - \alpha_1} \right|$, соотношение (12) можно переписать в виде:

$$\Delta m(\alpha, T) \approx \frac{4}{\sqrt{6}} \frac{T_1}{T} \left| \frac{m_{\text{st}}(\alpha)\big|_{\alpha=\alpha_2} - m_{\text{st}}(\alpha)\big|_{\alpha=\alpha_1}}{\alpha_2 - \alpha_1} \right| \sqrt{\left| (\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1) \right|} \approx$$

$$\approx \frac{4}{\sqrt{6}} \frac{T_1}{T} \left| m_{\text{st}}^{\alpha} \right| \sqrt{\left| (\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1) \right|}.$$

Здесь m_{st}^{α} — производная функции $m_{\text{st}}(\alpha)$ по переменной α.

Величины $m_{\text{st}}(\alpha)\big|_{\alpha=\alpha_*}$, $\partial m_{\text{st}}(\alpha)/\partial\alpha\big|_{\alpha=\alpha_*}$ или $m_{\text{st}}(\alpha)\big|_{\alpha=\alpha_1}$, $m_{\text{st}}(\alpha)\big|_{\alpha=\alpha_2}$ могут быть получены численными методами при проведении стационарных аэродинамических расчетов, которые гораздо точнее и требуют меньших затрат времени их нестационарных аналогов.

Переходя к переменной $\delta\alpha$: $\delta\alpha = \alpha - (\alpha_1 + \alpha_2)/2$, и полагая, что $T_1/T \approx \text{St}$, $\text{St} = Lf/V_\infty$ — число Струхаля, $T_1 \sim L/V_\infty$, L — характерный размер колеблющегося тела, V_∞ — скорость набегающего потока, $T \sim f^{-1}$, f — частота вихреобразования, запишем полученное выражение в виде

$$\Delta m(\delta\alpha, T) \approx \frac{4}{\sqrt{6}} \left| m_{\text{st}}^{\delta\alpha} \right| \sqrt{\left((\Delta\alpha/2)^2 - (\delta\alpha)^2 \right)} \text{St}.$$

Здесь $m_{\text{st}}^{\delta\alpha} = m_{\text{st}}^{\alpha}$ — производная функции $m_{\text{st}}(\delta\alpha)$ по переменной $\delta\alpha$, $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ — удвоенная амплитуда колебания.

В точке нулевого отклонения от начального положения $(\delta\alpha = 0)$, то есть в "серединной" точке $\alpha = \alpha_{\text{ср}} = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$, ширина гистерезиса будет равна

$$\Delta m(\delta\alpha, T)\Big|_{\delta\alpha=0} \approx \frac{2}{\sqrt{6}}\left|m_{\text{st}}^{\delta\alpha}\right|\Delta\alpha\cdot\text{St} \approx \left|m_{\text{st}}^{\delta\alpha}\right|\Delta\alpha\cdot\text{St}. \tag{13}$$

В случае существования гистерезиса первого типа дополнительное значение производной демпфирования $\Delta m_z^{\bar{\omega}_z}{}_{\text{hyster}}$ в области $-\Delta\alpha/2 < \delta\alpha < \Delta\alpha/2$ (или $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$), обусловленное разностью значений между верхней и нижней ветвями гистерезисной кривой $m_z(\delta\alpha)$, в линейном приближении можно представить в виде

$$\Delta m_z^{\omega_z}{}_{\text{hyster}} \approx -\frac{\left\langle \Delta m_z(\delta\alpha;\bar{\omega}_z)\right\rangle - \left\langle \Delta m_z(\delta\alpha;\bar{\omega}_z(T))\right\rangle\Big|_{T\to\infty}}{\left\langle\bar{\omega}_z\right\rangle - \left\langle\bar{\omega}_z(T)\right\rangle\Big|_{T\to\infty}} \approx -\frac{\Delta m_z(\delta\alpha;\bar{\omega}_z)\Big|_{\delta\alpha=0}/2}{\left\langle\bar{\omega}_z\right\rangle}. \tag{14}$$

Здесь $\Delta m_z(\delta\alpha)\Big|_{\delta\alpha=0}$ — ширина гистерезиса в точке нулевого отклонения тела от начального положения.

Учитывая соотношение (13), выражение (14) можно переписать в виде

$$\Delta m_z^{\bar{\omega}_z}{}_{\text{hyster}} \approx -\frac{\left|m_z^{\delta\alpha}\right|\Delta\alpha}{2\left\langle\bar{\omega}_z\right\rangle}\text{St}.$$

Безразмерную угловую скорость можно представить в виде $\left\langle\bar{\omega}_z\right\rangle = \frac{L}{V_\infty}\left\langle\omega_z\right\rangle = \frac{L}{V_\infty}\frac{\Delta\alpha}{2T} = \frac{\Delta\alpha}{4\pi}\bar{\omega}_0$. Учитывая это, запишем:

$$\Delta m_z^{\bar{\omega}_z}{}_{\text{hyster}} \approx -2\pi\frac{\left|m_z^{\delta\alpha}\right|}{\bar{\omega}_0}\text{St}. \tag{15}$$

Таким образом, в случае реализации режима гармонических колебаний ЛА с собственной частотой колебаний ω_0 и гистерезисным видом зависимости $m_z(\delta\alpha)$ первого типа полная производная демпфирования (см. (11)) будет характеризоваться суммой демпфирующих коэффициентов (10) и (15):

$$B_{\text{harmonic}} = \frac{1}{\Delta\alpha}\sqrt{\frac{I_z}{qSL}}\int\limits_{-\Delta\alpha/2}^{\Delta\alpha/2}\sqrt{-m_z^{\delta\alpha}}\sqrt{\left(\frac{\Delta\alpha/2}{\delta\alpha}\right)^2 - 1}\,d(\delta\alpha) - 2\pi\frac{\left|m_z^{\delta\alpha}\right|}{\bar{\omega}_0}\text{St}. \tag{16}$$

Используя данные вычислительных или физических экспериментов для определения величины производной демпфирования $\left(\left\langle m_z^{\bar{\omega}_z}\right\rangle + \left\langle m_z^{\bar{\dot{\alpha}}}\right\rangle\right)$, а также выражения (10), (15), (16) можно определить возможный характер колебательного движения.

Разработанная методика может помочь оценить возможность появления гистерезиса аэродинамических характеристик первого типа при возникновении колебательного движения летательного аппарата следующим образом. Если сумма расчетных (или экспериментальных) коэффициентов демпфирования $\left(\left\langle m_z^{\bar{\omega}_z}\right\rangle + \left\langle m_z^{\bar{\dot{\alpha}}}\right\rangle\right)$ меньше коэффициента демпфирования, полученного для гармонических колебаний в отсутствии гистерезиса $\left\langle m_z^{\bar{\dot{\alpha}}} \right\rangle_{\text{harmonic}}$, то возможна реализация процесса антидемпфирования с увеличением амплитуды колебания. В случае равенства расчетных (или экспериментальных) коэффициентов демпфирования $\left(\left\langle m_z^{\bar{\omega}_z} \right\rangle + \left\langle m_z^{\bar{\dot{\alpha}}} \right\rangle\right)$ значению $\left\langle m_z^{\bar{\dot{\alpha}}} \right\rangle_{\text{harmonic}}$ будут реализовываться гармонические колебания. Если сумма расчетных (или экспериментальных) коэффициентов демпфирования $\left(\left\langle m_z^{\bar{\omega}_z} \right\rangle + \left\langle m_z^{\bar{\dot{\alpha}}} \right\rangle\right)$ меньше суммы коэффициентов демпфирования, полученных для гармонических колебаний $\left(\left\langle m_z^{\bar{\dot{\alpha}}} \right\rangle + \Delta m_z^{\bar{\omega}_z}{}_{\text{hyster}}\right)_{\text{harmonic}}$, но при этом больше коэффициента демпфирования, соответствующего гармоническим колебаниям без гистерезиса $\left\langle m_z^{\bar{\dot{\alpha}}} \right\rangle_{\text{harmonic}}$, то модель обладает демпфирующими свойствами на исследуемом режиме, и при этом не проявляются гистерезисные свойства зависимости $m_z(\alpha)$.

Равенство суммы коэффициентов демпфирования, полученных для гармонических колебаний $\left(\left\langle m_z^{\bar{\dot{\alpha}}} \right\rangle + \Delta m_z^{\bar{\omega}_z}{}_{\text{hyster}}\right)_{\text{harmonic}}$ и расчетных (или экспериментальных) $\left(\left\langle m_z^{\bar{\omega}_z} \right\rangle + \left\langle m_z^{\bar{\dot{\alpha}}} \right\rangle\right)$, может характеризовать переход к режиму с потерей демпфирования, имеющему автоколебательный характер движения тела с гистерезисной зависимостью функции $m_z(\alpha)$ и собственной частотой колебаний ω_0. Если сумма расчетных (или экспериментальных) коэффициентов демпфирования превосходит сумму коэффициентов демпфирования, полученных для гармонических колебаний $\left(\left\langle m_z^{\bar{\dot{\alpha}}} \right\rangle + \Delta m_z^{\bar{\omega}_z}{}_{\text{hyster}}\right)_{\text{harmonic}}$, то можно говорить о том, что модель обладает демпфирующими свойствами на исследуемом режиме. При этом затухающие колебания могут характеризоваться гистерезисными свойствами зависимости $m_z(\alpha)$.

В этой связи чрезвычайно полезными представляются разработка и внедрение расчетных методов, которые позволят определять комплексы аэродинамических производных демпфирования $\left(\left\langle m_z^{\bar{\omega}_z} \right\rangle + \left\langle m_z^{\bar{\dot{\alpha}}} \right\rangle\right)$ с целью их непосредственного сравнения со значениями коэффициентов демпфирования, полученных для гармонических колебаний с гистерезисной зависимостью и без нее. Анализ этих данных позволит более точно предсказывать поведение ЛА в режиме колебания.

Список литературы

1. **Петров К.П.** Аэродинамика тел простейших форм. М.: Факториал, 1998. 432 с.
2. **Решетин А.Г.** Аэродинамический гистерезис при обтекании спускаемого аппарата космического корабля «Союз» гиперзвуковым вязким потоком. Результаты натурных испытаний // Космонавтика и ракетостроение. 2000. № 19. 150 с.
3. **Хатунцева О.Н.** Анализ причин возникновения аэродинамического гистерезиса при летных испытаниях СА «Союз» на гиперзвуковом участке спуска // Прикладная механика и техническая физика. 2011. Т. 52, № 4. С. 52–62.
4. **Хатунцева О.Н.** Классификация гистерезисных функций. Теоретические модели и методы описания // Элек. журн. «Физико-химич. кинетика в газ. динамике». 2012. Т. 13, № 1. URL: www.chemphys.edu.ru/pdf/2012-02-29-001.pdf. 23 с.
5. **Любимов А.Н., Тюмнев Н.М., Хут Г.И.** Методы исследования течений газа и определения аэродинамических характеристик осесимметричных тел. М.: Наука, 1995. 397 с.

Статья поступила в редакцию 30 июня 2013 г., после переработки — 20 февраля 2014 г.