УДК 531.3

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ ПОЛОСТЬЮ, ИМЕЮЩЕЙ РАДИАЛЬНЫЕ РЕБРА

И. Б. Богоряд, Н. П. Лаврова

Научно-исследовательский институт прикладной математики и механики
Томского государственного университета, 634050 Томск
E-mail: adm@niipmm.tsn.tomsk.ru

Конечно-разностным методом решена краевая задача о нестационарном вихревом течении вязкой несжимаемой жидкости во вращающемся с переменной угловой скоростью цилиндрическом сосуде с радиальными ребрами. Результаты решения используются для расчета движения системы твердое тело — полость с жидкостью. Проведено сравнение полученных результатов с известными экспериментальными данными.

Ключевые слова: вязкая жидкость, радиальные ребра, вихревое течение, гидродинамические нагрузки.

Введение. Динамическое взаимодействие вращающегося твердого тела с несжимаемой жидкостью, заполняющей его полость с радиальными ребрами, изучается в работах [1–3] и др. Эти работы посвящены, прежде всего, прикладным проблемам динамики ракет-носителей и космических аппаратов, снабженных жидкостными ракетными двигателями и соответственно баками для жидкого топлива.

Подход, развитый в работах [1–3], не предполагает решения краевой задачи о вихревом движении жидкости в сосуде с ребрами для расчета гидродинамических нагрузок. Модель, предлагаемая в данных работах, является феноменологической. В частности, выражение для погонной гидродинамической нагрузки на ребро аналогично предложенному в [2] и широко используется в линейных задачах динамики твердых тел, содержащих жидкость в полостях с ребрами:

$$f_n = \rho C \sqrt{u_n}\, U_n, \qquad U_n = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{\partial u_n}{\partial \tau} \, \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}.$$

Здесь $\boldsymbol{n}$ — орт нормали к поверхности ребра; $\boldsymbol{u}$ — вектор относительной скорости жидкости, вычисленной в предположении, что ребро отсутствует; C — эмпирическая функция геометрических параметров ребер и их расположения.

В данной работе рассматривается математическая модель, отличающаяся от известных тем, что гидродинамические нагрузки на смоченную поверхность находятся из решения соответствующей краевой задачи.

Постановка задачи. Твердое тело имеет заполненную вязкой несжимаемой жидкостью полость с радиальными ребрами. Эта система обладает общей осью симметрии и вращается вокруг этой оси под действием момента внешних сил $M_x(t)$. Течение жидкости описывается уравнениями Навье — Стокса и неразрывности. Рассматриваются только цилиндрические полости: либо прямой круговой цилиндр, либо соосные цилиндры, т. е. тор

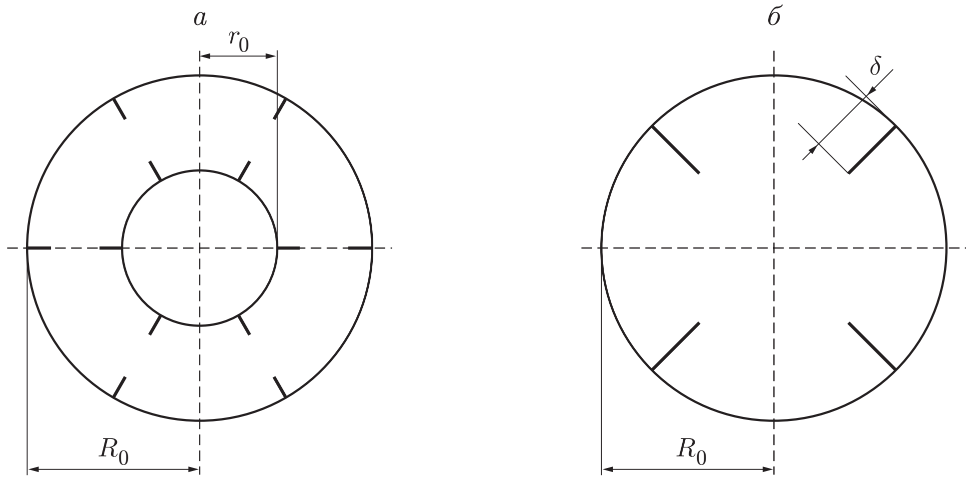

Рис. 1. Поперечные сечения полостей:
а — тор; *б* — круговой цилиндр

прямоугольного сечения (рис. 1). При этом размеры полости и чи́сла Рейнольдса предполагаются такими, чтобы днище и крышка полости не вносили заметных возмущений в течение жидкости во всем ее объеме. В силу этого течение жидкости можно считать двумерным. При таких предположениях уравнение вращения твердого тела имеет вид

$$(I^0 + I)\dot{\omega}_x + \rho\,\frac{d}{dt}\int\limits_Q r u_\theta\,dQ = M_x + M_s, \tag{1}$$

где $I^0 + I$ — суммарный момент инерции твердого тела и затвердевшей жидкости в полости; $\omega_x(t)$ — угловая скорость вращения твердого тела; u_θ — тангенциальная составляющая относительной скорости жидкости $\boldsymbol{u} = \{u_x \equiv 0, u_r, u_\theta\}$ в связанной с твердым телом системе цилиндрических координат $(0, x, r, \theta)$; d/dt — полная производная по времени в этой системе координат; Q — область, заполненная жидкостью; M_s — момент сил вязкого трения на цилиндрических поверхностях, днище и крышке полости. В той же системе отсчета записываются уравнения неразрывности и движения жидкости:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0,$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial u^2}{\partial r} - u_\theta(\operatorname{rot}_1\boldsymbol{u} + 2\omega_x) + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial r} - \nu\Big(\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\,\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\Big) = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\,(u_\theta + \omega_x r)}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial u^2}{\partial r} + u_r(\operatorname{rot}_1\boldsymbol{u} + 2\omega_x) + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial\theta} - \nu\Big(\Delta u_\theta + \frac{2}{r^2}\,\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + \frac{u_\theta}{r^2}\Big) = 0.$$

Здесь $\operatorname{rot}_1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i}_1\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{u}$; $\boldsymbol{i}_1$ — орт оси Ox.

Уравнения (1), (2), краевые условия прилипания на смоченной поверхности полости и ребер и начальные условия образуют сопряженную начально-краевую задачу о вращении твердого тела с вязкой жидкостью в его полости.

Метод расчета. Решение сопряженной задачи (1), (2) проводится разностными методами, аппроксимирующими дифференциальные уравнения с первым порядком точности по времени и пространственным координатам. Предварительно в расчетной схеме уравнение неразрывности в (2) заменяется уравнением Пуассона для давления

$$\Delta p = -2\rho\Big(\Big(\frac{\partial u_r}{\partial r}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\Big)^2 - \Big(\omega_x + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\Big)\operatorname{rot}_1\boldsymbol{u} - \omega_x^2\Big) + \rho\,\frac{\omega_x}{r}\,\frac{\partial u_r}{\partial\theta}. \tag{3}$$

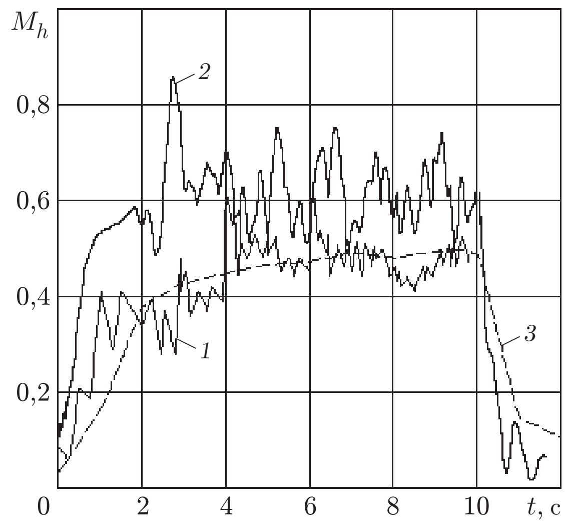

Рис. 2. Зависимость гидродинамического момента от времени:
1 — экспериментальная зависимость; *2* — расчетная зависимость; *3* — сглаженная экспериментальная зависимость

Краевые условия для уравнения Пуассона являются нормальными к смоченным поверхностям производными от давления, следующими из уравнений (2) с учетом краевых условий прилипания для вектора скорости. Для решения разностных аналогов уравнений (1)–(3) строится итеративная схема Либмана.

При равномерном распределении ребер по длине окружности поперечного сечения полости с учетом периодичности решения по углу θ интегрирование уравнений (2) проводится по области изменения координаты r от r_0 до R_0 и координаты θ от 0 до $2\pi/m$, где m — количество ребер (пар ребер).

Параметры расчетной схемы, обеспечивающие устойчивость и сходимость численного решения, определены в ходе численных экспериментов варьированием размерности сетки по пространственным переменным в диапазоне $2{\cdot}10^3 \div 1{,}2{\cdot}10^5$ ячеек и шага интегрирования по времени Δt в диапазоне $10^{-3} \div 10^{-5}$. При этом для достижения устойчивости решения на достаточно больших интервалах времени и в широком диапазоне параметров $\omega_x(t)$ и $\dot{\omega}_x(t)$ кинематическая вязкость рассмотренных жидкостей завышалась в $5 \div 10$ раз, для того чтобы число Рейнольдса, вычисленное по ширине ребра δ, имело порядок не более 10^3. Численный эксперимент выявил слабое (за исключением начального периода времени) влияние этой меры обеспечения устойчивости на искомую интегральную характеристику задачи — гидродинамический момент $M_h(t)$. Прямого экспериментального подтверждения этого вывода авторам данной работы не известно. В работе [4], где рассматриваются другие условия эксперимента — обтекание цилиндрического препятствия стационарным безграничным потоком, отмечается, что увеличение коэффициента вязкости ν приблизительно на порядок (в окрестности $\mathrm{Re} \approx 10^4$) "...не обнаруживает вообще или обнаруживает малое влияние вязкости" на число Струхаля $\mathrm{Sh} = f\delta/|u|$ (f — частота срыва вихрей), однако "...оказывает важное влияние на начало образования вихревой системы".

В силу того что представленные на рис. 2 экспериментальная и расчетная (с искусственно завышенным значением ν) зависимости $M_h(t)$ имеют наибольшее различие приблизительно в течение первых 2 с с начала процесса торможения полости (т. е. на участке формирования вихревой системы), изложенные выше качественные выводы можно распространить на условия решаемой задачи.

Результаты расчетов. Расчеты проведены для входных данных задачи, соответствующих физическим экспериментам [3, 5] по исследованию вращения твердого тела с жидкостью в двух режимах:

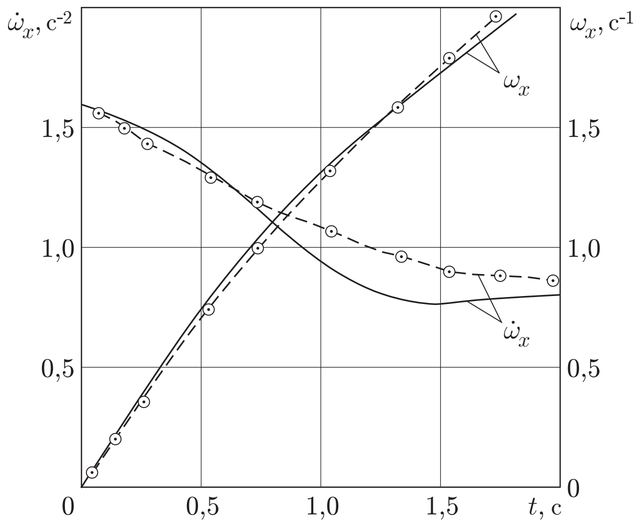

Рис. 3. Зависимости $\omega_x(t)$ и $\dot\omega_x(t)$ при раскрутке цилиндрической полости моментом постоянной величины:
штриховая линия — экспериментальные данные [3]; сплошная линия — результаты расчета

— в режиме "раскрутки":

$$u_r = u_\theta = 0, \quad \omega_x(0) = \omega_x^0 = 0, \quad \dot\omega_x(0) = \dot\omega_x^0 > 0, \qquad t = 0,$$
$$\dot\omega_x(t) > 0, \qquad t > 0;$$

— в режиме торможения:

$$u_r = u_\theta = 0, \quad \omega_x(0) = \omega_x^0 > 0, \quad \dot\omega_x(0) = \dot\omega_x^0 < 0, \qquad t = 0,$$
$$\dot\omega_x(t) < 0, \qquad t > 0.$$

На рис. 3 представлены экспериментальные и расчетные зависимости $\omega_x(t)$ и $\dot\omega_x(t)$ при вращении твердого тела с цилиндрической полостью, заполненной водой, под действием постоянного момента внешних сил $M_x = 0{,}96$ Н $\cdot$ м (режим "раскрутки"). Полость ($R_0 = 0{,}175$ м, высота $H = 0{,}4$ м) имеет четыре равноотстоящих ребра ($\delta = 0{,}034$ м). Момент инерции $I^0 + I = 1{,}03$ кг $\cdot$ м^2 (здесь учитываются моменты инерции сухого твердого тела и вращающейся части экпериментального стенда).

Расчет для режима торможения выполнен для полости в форме тора прямоугольного сечения ($R_0 = 0{,}2$ м, $r_0 = 0{,}14$ м, $H = 0{,}04$ м) с шестью парами равноотстоящих ребер ($\delta = 0{,}02$ м). Жидкость представляет собой сплав (эвтектика) Вуда при температуре 128 °C. Кинематические параметры $\omega_x(t)$ и $\dot\omega_x(t)$ заданы таким образом (начальная скорость $\omega_x^0 = 9{,}87$ с$^{-1}$, $\dot\omega_x = -0{,}983$ с$^{-2}$), чтобы полная остановка вращения твердого тела происходила в течение 10,04 с.

Экспериментальная и расчетная зависимости гидродинамического момента

$$M_h = -\rho \frac{d}{dt} \int\limits_Q r u_\theta \, dQ + M_s$$

для этих исходных данных показаны на рис. 2. В предположении, что зигзагообразный характер экспериментальной кривой обусловлен механическими вибрациями экспериментального стенда (см. [3]), эта кривая должна быть отфильтрована от указанных помех. В результате получаем гладкую, практически монотонную на отрезке $t = 0 \div 10$ с кривую *3*. В дальнейшем по сглаженной зависимости определяются значения коэффициентов согласования при идентификации математической модели [5].

Однако расчетная кривая $M_h(t)$, как и экспериментальная, имеет зигзагообразный (пульсирующий) характер. При этом как на экспериментальной, так и на расчетной кривых наблюдаются максимальные пики (крупномасштабные пульсации) с интервалом приблизительно $1 \div 2$ с и пики меньшей амплитуды (пульсации меньших масштабов) на более

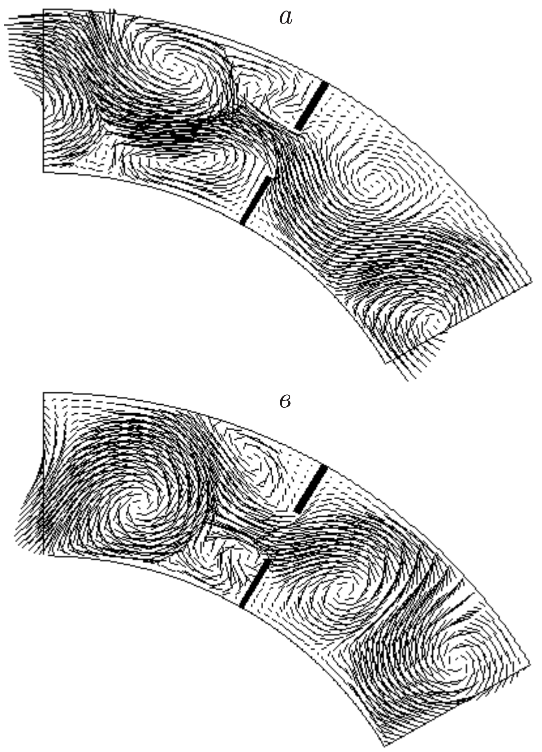

Рис. 4. Поля скоростей жидкости в различные моменты времени:
а — $t = 3$ с; *б* — $t = 4$ с; *в* — $t = 5$ с; *г* — $t = 6$ с

высокой частоте. По терминологии теории турбулентности, эти пульсации описывают детерминированный хаос, в данном случае — нерегулярный процесс перестройки вихревой системы течения жидкости: перемещение вихрей, их эволюцию и взаимодействие. На рис. 4 представлены фрагменты хронограммы поля относительных скоростей, на которых видна следующая перестройка: чередование с периодом около 1 с количества крупномасштабных вихрей справа и слева от ребер.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Рабинович Б. И.** Вихревые процессы и динамика твердого тела / Б. И. Рабинович, В. Г. Лебедев, А. И. Мытарев. М.: Наука, 1992.
2. **Роговой В. М.** Динамическая устойчивость космических аппаратов с ЖРД / В. М. Роговой, С. В. Черемных. М.: Машиностроение, 1975.
3. **Чурилов Г. А., Клишев О. П., Мытарев А. И., Рабинович Б. И.** Экспериментальное исследование тороидального МГД-элемента. Физическая и математическая модели процесса медленного торможения // Полет. 2001. № 9. С. 36–42.
4. **Ричардсон Э.** Динамика реальных жидкостей. М.: Мир, 1965.
5. **Рабинович Б. И., Клишев О. П., Мытарев А. И., Чурилов Г. А.** Математическая модель космического аппарата с полостями, частично заполненными жидкостью. Режим нестационарного вращения // Полет. 2003. № 10. С. 50–56.

Поступила в редакцию 15/XI 2005 г.,
в окончательном варианте — 18/IV 2006 г.