

УДК 539.3; 534.113

## ИССЛЕДОВАНИЕ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАНИЙ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК, РАСПОЛОЖЕННЫХ ВБЛИЗИ ГРАФИТОВЫХ ЛИСТОВ

М. Седи́ги, А. Ягу́тян

Университет Шахида Чамрана, Ахваз, Иран  
E-mails: hmsedighi@gmail.com, a.yaghootian@scu.ac.ir

Излагается новый асимптотический метод исследования динамической неустойчивости процесса притягивания заземленной на торцах углеродной нанотрубки, расположенной вблизи графитовых листов. Выведены нелинейные уравнения колебаний нанотрубки, возбуждаемых электрическим полем. С учетом межмолекулярных сил Ван-дер-Ваальса методом разложения по параметру исследованы динамическая неустойчивость нанотрубки и зависимость собственной частоты от амплитуды колебаний. Показано, что для получения приемлемых результатов достаточно в разложении решения удержать два члена. Проведено сравнение полученного аналитического решения с численным решением. Установлено, что точками равновесия автономной системы являются центр и неустойчивое седло, а фазовые картины движения углеродной нанотрубки содержат периодические и гомоклинические орбиты.

**Ключевые слова:** метод разложения по параметру, частотная кривая, углеродные нанотрубки, нелокальная теория упругости, силы притяжения Ван-дер-Ваальса, неустойчивость процесса притягивания, графитовые листы.

DOI: 10.15372/PMTF20160110

**Введение.** Углеродные нанотрубки применяются в нанодетекторах и других наноустройствах, в частности в атомно-силовых микроскопах [1]. Исследование колебаний нанобалок с различными видами закреплений является актуальным, поскольку такие балки используются в качестве нанодатчиков и наноприводов.

При исследовании конструкций, имеющих малые (наномасштабные) размеры и подвергаемых электростатическому воздействию, необходимо дополнительно учитывать такие эффекты, как эффект Ван-дер-Ваальса [2]. Электростатические силы Ван-дер-Ваальса возникают при поляризации диполей на межатомных расстояниях. В работах [2–5] представлены результаты исследований нелинейного поведения нанотрубок и неустойчивости процесса их притягивания. Однако зависимость амплитуды от нелинейной частоты и критерии неустойчивости процесса притягивания не были получены. В работе [2] с использованием модифицированной модели сплошной среды изучена зависимость между молекулярной силой и вызываемым ею смещением, а также устойчивость свободно опертой консоли (углеродной нанотрубки), расположенной над листом из графита и используемой в качестве зонда или привода.

В [5] с помощью метода декомпозиции Адомиана исследована устойчивость углеродной нанотрубки в виде консоли, используемой в качестве детектора. В [6] с использованием нелинейного выражения для кривизны и с учетом инерционных и электростатических сил изучено нелинейное поведение углеродных нанотрубок, движущихся под действием электростатических сил. В работе [7] с помощью модели распределенных параметров определены длина зоны отрыва и минимальная ширина зазора в автономных нанопереклещателях, находящихся под действием межмолекулярных и электростатических сил. В [8] методом гомотопического возмущения исследовано влияние сил Ван-дер-Ваальса на процесс притягивания электростатических приводов, распределение в них напряжений и их устойчивость. В [9] с использованием методов магнитной гидродинамики изучены механические свойства пластинчатого графита и графена. При описании атомной структуры графита учитывались силы как связанного, так и несвязанного взаимодействия. В работе [10] методом конечных элементов с использованием потенциала Морзе изучено влияние внутреннего пространства трубы на силы притягивания кресло- и зигзагообразных нанотрубок с двойными стенками. В [11] предложена параметризованная модель сплошной среды для определения напряжения срабатывания электромеханического переключателя, представляющего собой нанотрубку. В [12] с использованием модели молекулярной механики выбраны энергетически оптимальные углеродные нанотрубки с двойными стенками и исследованы их бесконечно малые деформации при растяжении, кручении, радиальном расширении (сжатии) и изгибе.

В работе [13] с использованием потенциала третьей модели молекулярной механики изучены осевые, крутильные и радиальные формы пульсаций свободных ненапряженных спиралевидных углеродных нанотрубок. Потенциальная энергия взаимодействия двух бесконечно длинных параллельных углеродных нанотрубок в различных устройствах вычислена в [14]. В [15] проведен анализ изгиба углеродных нанотрубок с одинарными стенками, изготовленных из функционально-градиентного материала. Для дискретизации дифференциальных уравнений использовался метод гармонических дифференциальных квадратур. В [15] также исследовано влияние различных параметров (показателя степени, внешнего и внутреннего радиусов, длины нанотрубки) на поведение нанотрубок.

В [16] для изучения динамики углеродных нанотрубок с одинарными стенками на основе градиентных теорий упругости построена градиентная теория оболочек, учитывающая деформации сдвига в первом приближении. Там же исследовано влияние на различные моды колебаний углеродных нанотрубок с одинарными стенками поперечного сдвига, отношения внутреннего радиуса к внешнему, волновых чисел окружных и аксиальных колебаний и параметра, характеризующего длину трубки.

Результаты нелинейного анализа движения нанотрубок, используемых в различных электромеханических наносистемах, приведены в работе [17]. Изучено поведение нанотрубок, заземленных на одном или двух торцах, при воздействии электростатических сил. Отмечена необходимость учета нелинейных кинематических эффектов при определении напряжения активации наноустройств.

В последнее время построены новые аналитические решения нелинейных дифференциальных уравнений, не содержащих малый параметр [18–27]. В [28] для решения нелинейных задач предложен эффективный метод разложения по параметру.

В настоящей работе вычисляется нелинейная частотно-амплитудная зависимость для углеродных нанотрубок, расположенных вблизи слоев графита, при воздействии электростатического напряжения с учетом сил притяжения Ван-дер-Ваальса. Исследовано влияние амплитуды колебаний на неустойчивость процесса притягивания углеродных нанотрубок. С использованием метода разложения по параметру проводится исследование асимптотики решений нелинейных уравнений. Полученные результаты сравниваются с результатами численного решения.

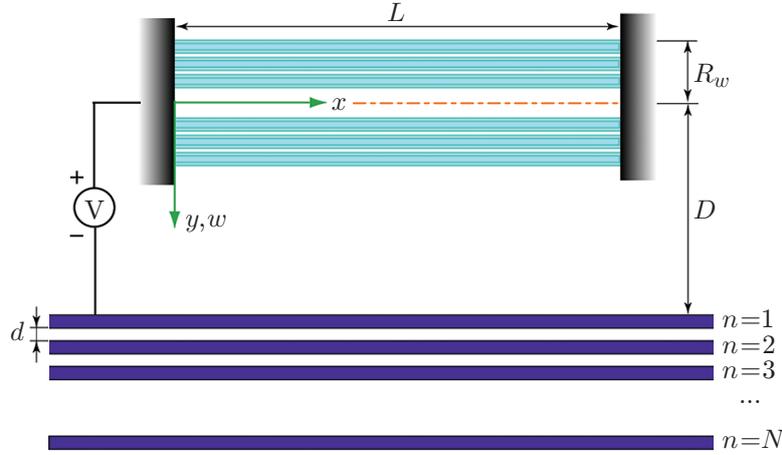


Рис. 1. Схема заземленной многослойной углеродной нанотрубки, расположенной над графитовыми листами

**1. Математическая формулировка задачи.** На рис. 1 показана расположенная вблизи поверхности, состоящей из  $N$  графитовых слоев, и заземленная на двух торцах многослойная углеродная нанотрубка. Расстояние между слоями  $d = 3,35 \text{ \AA}$ . Многослойная нанотрубка состоит из  $N_w$  слоев. Через  $R_w$  обозначен средний радиус нанотрубки, через  $L$  — ее длина, через  $D$  — расстояние между нанотрубкой и поверхностью. Проводящая нанотрубка расположена на электродной подложке, вследствие чего создается разность потенциалов между трубкой и электродом.

В соответствии с нелокальной теорией упругости закон Гука записывается в следующем виде [29]:

$$\sigma_{xx} - (e_0 a)^2 \frac{d^2 \sigma_{xx}}{dx^2} = E \varepsilon_{xx}. \quad (1)$$

Здесь  $x$  — радиальная координата (см. рис. 1);  $e_0 a$  — масштабный коэффициент;  $a$  — внутренняя характеристика длины трубки;  $e_0$  — константа, определяемая для каждого материала на основе экспериментальных данных [30]. Выражения для изгибающего момента и деформации имеют вид

$$M = \int y \sigma_{xx} dS, \quad \varepsilon = -y \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (2)$$

где  $w(x, t)$  — смещение точек трубки в направлении  $y$ ;  $M$  — изгибающий момент;  $S$  — площадь поперечного сечения трубки. Из (1), (2) получаем

$$M - (e_0 a)^2 \frac{d^2 M}{dx^2} = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (3)$$

С учетом осевой сжимающей силы  $F(w)$  уравнение равновесия записывается в виде

$$V - \frac{dM}{dx} + F(w) \frac{dw}{dx} = 0, \quad (4)$$

где в соответствии с [31]

$$F(w) = \frac{Ebh}{2l} \int_0^L (w')^2 dx + N_0. \quad (5)$$

Дифференцируя уравнение (4) по  $x$  и используя уравнение (3), получаем

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = F(w) \frac{d^2 w}{dx^2} - q, \quad (6)$$

где  $q$  — распределенная поперечная нагрузка:

$$q = q_{vdW} + F_e, \quad (7)$$

$q_{vdW}$  — межмолекулярная сила на единицу длины углеродной нанотрубки, выражение для которой в случае большого числа графитовых слоев может быть представлено в виде [3]

$$q_{vdW} = \frac{C_6 \sigma^2 \pi^2 N_w R_w}{d(D-w)^4}, \quad (8)$$

$C_6$  — константа, характеризующая силы внутреннего притяжения (в случае взаимодействия атомов углерода  $C_6 = 15,2 \text{ эВ} \cdot \text{Å}^6$ );  $F_e$  — равномерная электростатическая сила. При получении выражения для электростатической силы используется емкостная модель. Выражение для емкости  $C$  углеродной нанотрубки на единицу ее длины в соответствии с [32] записывается следующим образом:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\text{ch}^{-1}((D-w)/R_w)}, \quad (9)$$

$$F_e = \frac{1}{2} \frac{d(CV^2)}{dD} = \frac{\pi\epsilon_0 V^2}{\sqrt{(D-w)(D-w+2R_w)} (\text{ch}^{-1}((D-w)/R_w))^2}$$

( $V$  — напряжение активации;  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 \cdot \text{Н}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}$  — проводимость в вакууме). Подставляя (6) в (3), в соответствии с нелокальной моделью упругой балки получаем уравнение колебаний углеродной нанотрубки

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + \left( \frac{EA}{2l} \int_0^L (w')^2 dx + N_0 \right) \frac{d^2}{dx^2} \left( w - (e_0 a)^2 \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \rho A w_{tt} =$$

$$= (q_{vdW} + F_e) \left( 1 - (e_0 a)^2 \frac{d^2 (q_{vdW} + F_e)}{dx^2} \right). \quad (10)$$

Для уравнения (10) ставятся следующие кинематические краевые условия:

$$w(0, t) = 0, \quad w'(0, t) = 0, \quad w(L, t) = 0, \quad w'(L, t) = 0.$$

Уравнение (9) можно упростить, полагая

$$\frac{1}{\sqrt{(D-w)(D-w+2R_w)} (\text{ch}^{-1}((D-w)/R_w))^2} \approx \frac{1}{(D-w) (\text{ch}^{-1}((D-w)/R_w))^2}. \quad (11)$$

В уравнении (11) принято, что  $D + 2R_w - w \approx D - w$ .

Дальнейшее упрощение (9) можно выполнить, приняв

$$\frac{1}{(D-w) (\text{ch}^{-1}((D-w)/R_w))^2} = \frac{1}{D-w} \frac{1}{(\ln[(D-w)/R_w + \sqrt{((D-w)/R_w)^2 - 1}])^2}$$

при  $(D-w)/R_w \gg 1$ . Таким образом, для электростатической силы получаем выражение

$$F_e = \frac{\pi\epsilon_0 V^2}{(D-w) \ln^2(2(D-w)/R_w)}.$$

Нелинейные выражения для  $q_{vdW}$ ,  $F_e$  в уравнении (10) можно разложить в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} q_{vdW} &= \frac{C_6 \sigma^2 \pi^2 N_w R_w}{dD^4} \left[ 1 + 4 \frac{w}{D} + 10 \left( \frac{w}{D} \right)^2 + 20 \left( \frac{w}{D} \right)^3 + 35 \left( \frac{w}{D} \right)^4 \right], \\ F_e &= \frac{\pi \varepsilon_0 V^2}{D} \left[ \alpha_0 + \alpha_1 \frac{w}{D} + \alpha_2 \left( \frac{w}{D} \right)^2 + \alpha_3 \left( \frac{w}{D} \right)^3 + \alpha_4 \left( \frac{w}{D} \right)^4 \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\alpha_0, \dots, \alpha_4$  — константы:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{\ln^2(2\lambda)}, \quad \alpha_1 = \frac{2}{\ln^3(2\lambda)} + \frac{1}{\ln^2(2\lambda)}, \\ \alpha_2 &= \frac{2}{\ln^3(2\lambda)} + \left( \frac{1}{\ln^4(2\lambda)} + \frac{\ln(2\lambda) + 2}{\ln^4(2\lambda)} \right) + \frac{1}{\ln^2(2\lambda)}, \\ \alpha_3 &= \left( \frac{1}{\ln^4(2\lambda)} + \frac{\ln(2\lambda) + 2}{\ln^4(2\lambda)} \right) + \frac{2}{\ln^3(2\lambda)} + \left( \frac{\ln(2\lambda) + 2}{\ln^5(2\lambda)} + \frac{2 \ln^2(2\lambda) + 3 \ln(2\lambda) + 3}{3 \ln^5(2\lambda)} \right) + \frac{1}{\ln^2(2\lambda)}, \\ \alpha_4 &= \frac{1}{\ln^2(2\lambda)} + \left( \frac{\ln(2\lambda) + 2}{\ln^5(2\lambda)} + \frac{2 \ln^2(2\lambda) + 3 \ln(2\lambda) + 3}{3 \ln^5(2\lambda)} \right) + \\ &+ \left( \frac{1}{6} \frac{11 \ln^2(2\lambda) + 18 \ln(2\lambda) + 3 \ln^3(2\lambda) + 12}{\ln^6(2\lambda)} + \frac{2 \ln^2(2\lambda) + 3 \ln(2\lambda) + 3}{3 \ln^6(2\lambda)} + \frac{1}{4} \frac{(\ln(2\lambda) + 2)^2}{\ln^6(2\lambda)} \right) + \\ &+ \left( \frac{1}{\ln^4(2\lambda)} + \frac{\ln(2\lambda) + 2}{\ln^4(2\lambda)} \right) + \frac{2}{\ln^3(2\lambda)}. \end{aligned}$$

Введем следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} t, \quad \bar{w} = \frac{w}{D}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \lambda = \frac{D}{R_w}, \quad \beta = \frac{\pi \varepsilon_0 V^2 L^4}{EID}, \\ \alpha &= \frac{C_6 \sigma^2 \pi^2 N_w R_w L^4}{dEID^5}, \quad f_0 = \frac{N_0 L^2}{EI}, \quad \gamma_0 = \frac{e_0 a}{L}, \quad r = \frac{D^2 A}{I}. \end{aligned}$$

Представим выражение для прогиба в виде  $\bar{w}(\bar{x}, \tau) = q(\tau)\varphi(\bar{x})$ , где  $\varphi(\bar{x})$  — первая собственная мода колебаний балки с защемленными концами:

$$\varphi(\bar{x}) = \operatorname{ch}(\lambda \bar{x}) - \cos(\lambda \bar{x}) - \frac{\operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda}{\operatorname{sh} \lambda - \sin \lambda} (\operatorname{sh}(\lambda \bar{x}) - \sin(\lambda \bar{x})),$$

$\lambda = 4,73$  — корень характеристического уравнения для первой моды.

Подставляя выражения (12) для  $q_{vdW}$  и  $F_e$  в уравнение (10) и используя метод Бубнова — Галеркина, получаем нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} + \beta_1 q(\tau) + \beta_2 (q(\tau))^2 + \beta_3 (q(\tau))^3 + \beta_4 (q(\tau))^4 + \beta_5 = 0, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 504 - 12\beta^2 \alpha_0 \alpha_1 \gamma_0^2 - 48\beta \alpha_0 \alpha \gamma_0^2 - 4\alpha - 48\alpha^2 \gamma_0^2 - 12f_0 - 504f_0 \gamma_0^2 - \beta \alpha_1 - 12\beta \alpha \alpha_1 \gamma_0^2, \\ \beta_2 &= -0,727\beta^2 \alpha_1^2 \gamma_0^2 - 5,818\alpha \gamma_0^2 \beta \alpha_1 - 7,27\beta \alpha_0 \gamma_0^2 \alpha - 18,9\gamma_0^2 \alpha^2 - 0,0524\beta \alpha_2 - \\ &- 0,727\beta^2 \alpha_0 \gamma_0^2 \alpha_2 - 0,727\alpha \gamma_0^2 \beta \alpha_2 - 0,524\alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_3 &= -0,0576\alpha - 0,003\beta\alpha_3 - 4,8r\gamma_0^2 - 0,098\beta^2\alpha_2\gamma_0^2\alpha_1 - 0,391\alpha\beta\gamma_0^2\alpha_2 - 0,84\beta\alpha\alpha_0\gamma_0^2 - \\ &\quad - 0,04\beta^2\alpha_0\gamma_0^2\alpha_3 - 4,75\gamma_0^2\alpha^2 - 0,114r - 0,97\alpha\beta\gamma_0^2\alpha_1 - 0,04\alpha\beta\gamma_0^2\alpha_3, \\ \beta_4 &= -0,084\beta\alpha\alpha_0\gamma_0^2 - 0,0057\alpha - 0,121\alpha\beta\gamma_0^2\alpha_1 - 0,0002\beta\alpha_4 - 0,006\beta^2\alpha_1\gamma_0^2\alpha_3 - 0,933\alpha^2\gamma_0^2 - \\ &\quad - 0,0024\alpha\beta\gamma_0^2\alpha_4 - 0,0024\beta^2\alpha_0\gamma_0^2\alpha_4 - 0,0242\alpha\beta\gamma_0^2\alpha_3 - 0,0727\alpha\beta\gamma_0^2\alpha_2 - 0,0037\beta^2\alpha_2^2\gamma_0^2, \\ \beta_5 &= -21\alpha - 21\beta\alpha_0.\end{aligned}$$

**2. Основные положения метода разложения по параметру.** Для уравнения колебаний (13) многослойной углеродной нанотрубки поставим следующие начальные условия:

$$q(0) = A, \quad \dot{q}(0) = 0.$$

Свободные колебания системы являются периодическими функциями, которые могут быть записаны через собственные функции  $\cos(m\omega\tau)$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Найдем зависимость частоты  $\omega$  от амплитуды  $A$ .

В основе используемого метода лежит разложение решения уравнения и его коэффициентов по некоторому параметру. Если требуется получить периодическое решение уравнения (13), то его нужно искать в виде следующего ряда по параметру  $p$ :

$$q(\tau) = q_0(\tau) + pq_1(\tau) + p^2q_2(\tau) + \dots \quad (14)$$

Аналогично коэффициенты 1 и  $\beta_1$  в уравнении (13) представляются в виде рядов [28]

$$\beta_1 = \omega^2 - pb_1 - p^2b_2 + \dots, \quad 1 = pc_1 + p^2c_2 + \dots, \quad (15)$$

где  $b_i, c_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) — коэффициенты, которые необходимо определить. При  $p = 0$  уравнение (13) становится линейным дифференциальным уравнением, из которого можно найти приемлемое приближение для уравнения при  $p = 1$ . Подставляя (14), (15) в уравнение (13), имеем

$$\begin{aligned}\ddot{q}_0 + p\ddot{q}_1 + (\omega^2 - pb_1)(q_0 + pq_1 + p^2q_2) + (pc_1 + p^2c_2)[\beta_2(q_0 + pq_1)^2 + \\ + \beta_3(q_0 + pq_1)^3 + \beta_4(q_0 + pq_1)^4 + \beta_5] = 0.\end{aligned} \quad (16)$$

Сохраняя в уравнении (16) члены при одинаковых степенях параметра  $p$ , получаем последовательность линейных уравнений. Первое из этих уравнений и начальные условия имеют вид

$$\ddot{q}_0(\tau) + \omega^2q_0(\tau) = 0, \quad q_0(0) = A, \quad \dot{q}_0(0) = 0. \quad (17)$$

Подставляя общее решение задачи (17)

$$q_0(t) = A \cos(\omega\tau) \quad (18)$$

в правую часть второго уравнения указанной выше последовательности уравнений, получаем

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1(\tau) + \omega^2q_1(\tau) = \left(b_1A - \frac{3}{4}c_1\beta_3A^3\right) \cos(\omega\tau) + \left(-\frac{1}{2}c_1\beta_4A^4 - \frac{1}{2}c_1\beta_2A^2\right) \cos(2\omega\tau) - \\ - \frac{1}{2}c_1\beta_2A^2 - \frac{3}{8}c_1\beta_4A^4 - \frac{1}{4}c_1\beta_3A^3 \cos(3\omega\tau) - c_1\beta^5 - \frac{1}{8}c_1\beta_4A^4 \cos(4\omega\tau).\end{aligned} \quad (19)$$

Для того чтобы исключить секулярный член из правой части уравнения (19), пропорциональный  $\cos(\omega\tau)$ , необходимо приравнять к нулю коэффициент при  $\cos(\omega\tau)$ :

$$b_1A - \frac{3}{4}c_1\beta_3A^3 = 0. \quad (20)$$

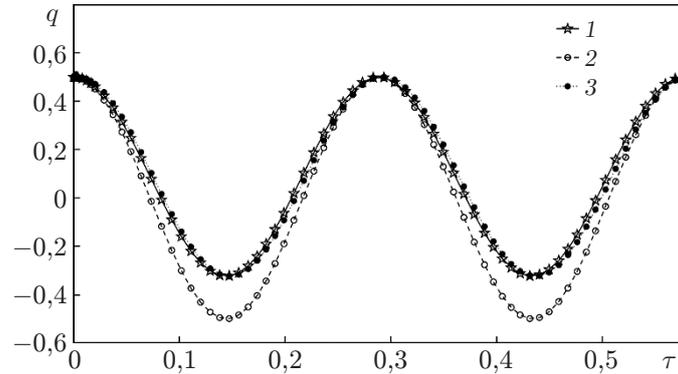


Рис. 2. Зависимость безразмерной амплитуды от безразмерного времени при  $\alpha = 1,75$ ,  $\lambda = 10$ ,  $\beta = 2$ ,  $\gamma_0 = 0,2$ ,  $f_0 = 0,1$ :  
 1 — численное решение, 2 — аналитическое решение с аппроксимацией первого порядка, 3 — аналитическое решение с аппроксимацией второго порядка

Пренебрегая в уравнениях (15) членами более высокого порядка и решая эти уравнения относительно  $b_1$ ,  $c_1$ , получаем

$$\beta_1 = \omega^2 - pb_1, \quad b_1 = \omega^2 - \beta_1, \quad 1 = pc_1, \quad c_1 = 1. \tag{21}$$

Из уравнений (20), (21) находим  $\omega$ :

$$\omega(A) = \pm \sqrt{\beta_1 + (3/4)\beta_3 A^2}. \tag{22}$$

Подставляя выражение (22) для  $\omega$  в уравнение (18), имеем

$$q_0(t) = A \cos \left( \sqrt{\beta_1 + (3/4)\beta_3 A^2} \tau \right).$$

Решая уравнение (19) относительно  $q_1(t)$ , получаем приближение второго порядка для  $q(\tau)$ :

$$\begin{aligned} q(\tau) = q_0(\tau) + q_1(\tau) = & A \cos(\omega\tau) + \frac{24\beta_4 A^4 + 40\beta_2 A^2 - 15\beta_3 A^3 + 120\beta_5}{120\omega^2} \cos(\omega\tau) + \\ & + \frac{80A^2(\beta_4 A^2 + \beta_2) \cos(2\omega\tau) + 15\beta_3 A^3 \cos(3\omega\tau) + 4\beta_4 A^4 \cos(4\omega\tau) - 480\beta_5}{480\omega^2} + \\ & + \frac{-240\beta_2 A^2 - 180\beta_4 A^4 + 45\beta_3 A^3 \cos(\omega\tau)}{480\omega^2}. \end{aligned}$$

**3. Результаты исследования и их обсуждение.** На рис. 2 приведена зависимость безразмерной амплитуды от безразмерного времени, полученная численным методом Рунге — Кутты четвертого порядка и методом разложения по параметру. Из приведенных результатов следует, что второе приближение для  $q(\tau)$ , полученное методом разложения по параметру, хорошо согласуется с численным решением.

На рис. 3 представлена зависимость основной безразмерной частоты от безразмерной амплитуды при различных значениях параметра Ван-дер-Ваальса  $\alpha$ . Из представленных результатов следует, что этот параметр существенно влияет на собственную частоту и неустойчивость процесса притягивания. С увеличением амплитуды колебаний собственная частота уменьшается до значения, соответствующего неустойчивости процесса притягивания. Вблизи этого значения незначительное увеличение амплитуды вызывает динамическую неустойчивость углеродной нанотрубки. В то же время при увеличении безразмерного параметра  $\alpha$  возникает периодическое движение в небольшом диапазоне амплитуд колебаний.

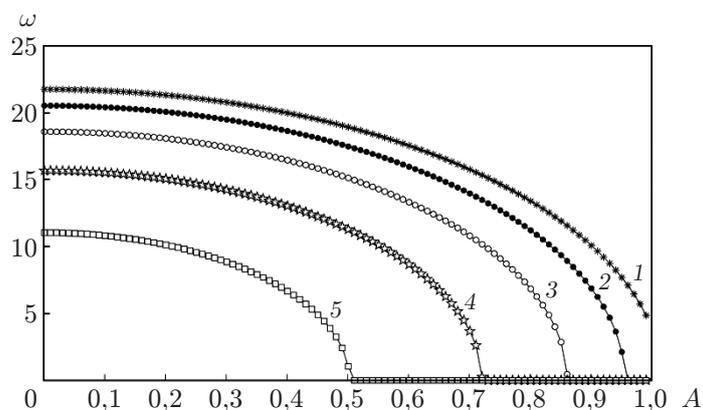


Рис. 3. Зависимость основной безразмерной частоты от безразмерной амплитуды углеродной нанотрубки при различных значениях параметра Ван-дер-Ваальса  $\alpha$ :

1 —  $\alpha = 2,5$ , 2 —  $\alpha = 5$ , 3 —  $\alpha = 7,5$ , 4 —  $\alpha = 10$ , 5 —  $\alpha = 12,5$

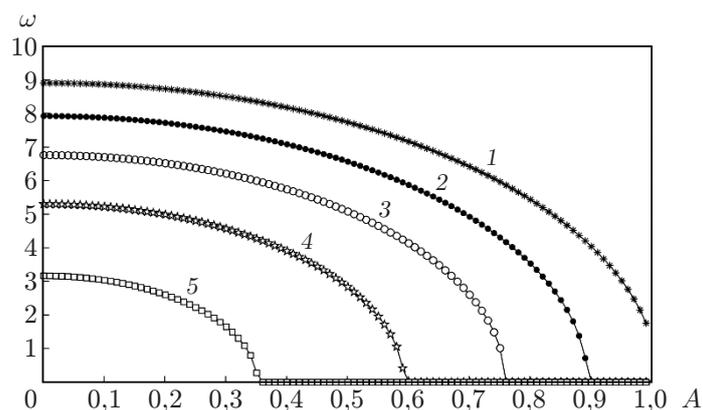


Рис. 4. Зависимость основной безразмерной частоты от безразмерной амплитуды углеродной нанотрубки при различных значениях параметра напряжения активации  $\beta$ :

1 —  $\beta = 15$ , 2 —  $\beta = 20$ , 3 —  $\beta = 25$ , 4 —  $\beta = 30$ , 5 —  $\beta = 35$

Зависимость основной безразмерной частоты от безразмерной амплитуды углеродной нанотрубки при различных значениях параметра напряжения активации  $\beta$  приведена на рис. 4. С увеличением параметра  $\beta$  уменьшается основная частота и увеличивается диапазон значений безразмерной амплитуды, в котором наблюдается неустойчивость процесса притягивания.

Зависимость основной безразмерной частоты от безразмерной амплитуды углеродной нанотрубки с заземленными торцами при различных значениях параметра  $\lambda$  приведена на рис. 5. С увеличением параметра  $\lambda$  увеличивается диапазон значений безразмерной амплитуды, в котором наблюдается неустойчивость процесса притягивания.

На рис. 6 представлена зависимость основной безразмерной частоты от безразмерной амплитуды при различных значениях нелокального параметра  $\gamma_0$ . С увеличением параметра  $\gamma_0$  основная частота уменьшается и увеличивается диапазон значений безразмерной амплитуды, в котором имеет место неустойчивость процесса притягивания.

На рис. 7 приведены фазовые картины для углеродной нанотрубки, полученные при различных начальных условиях и различных значениях параметра напряжения актива-

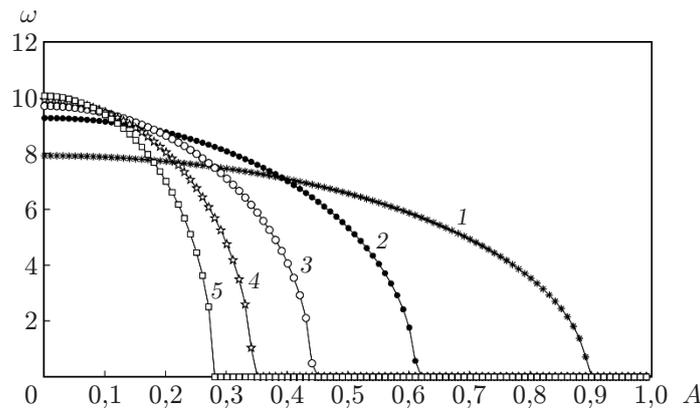


Рис. 5. Зависимость основной безразмерной частоты от безразмерной амплитуды углеродной нанотрубки при различных значениях параметра напряжения  $\lambda$ : 1 —  $\lambda = 10$ , 2 —  $\lambda = 20$ , 3 —  $\lambda = 30$ , 4 —  $\lambda = 40$ , 5 —  $\lambda = 50$

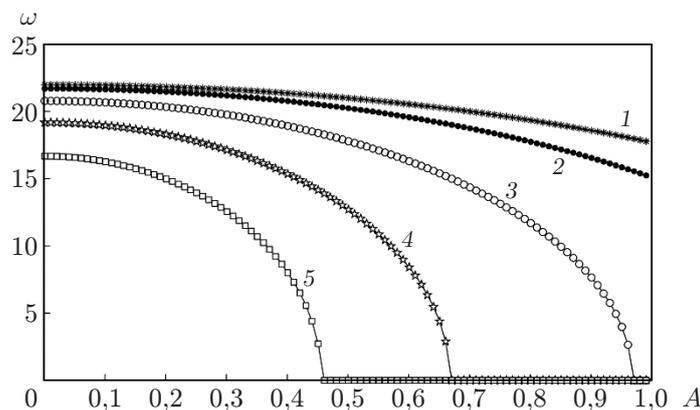


Рис. 6. Зависимость основной безразмерной частоты от безразмерной амплитуды углеродной нанотрубки при различных значениях безразмерного параметра  $\gamma_0$ : 1 —  $\gamma_0 = 0$ , 2 —  $\gamma_0 = 0,1$ , 3 —  $\gamma_0 = 0,2$ , 4 —  $\gamma_0 = 0,3$ , 5 —  $\gamma_0 = 0,4$

ции  $\beta$  и параметра  $\alpha$ , характеризующего межмолекулярные силы. При отсутствии сил Ван-дер-Ваальса при любых начальных условиях движение нанотрубки является периодическим, если  $\beta = 0$  (см. рис. 7,а). В этом случае в центре фазовой плоскости существует устойчивая точка. Если учитываются влияние межмолекулярных сил ( $\alpha = 5$ ) и параметр  $\beta = 0$ , то в центре фазовой плоскости появляется неустойчивая седловая точка (см. рис. 7,б).

Фазовая картина для углеродной нанотрубки с учетом сил притяжения Ван-дер-Ваальса ( $\beta = 20$ ) приведена на рис. 7,в. В этом случае в центре фазовой плоскости существует точка равновесия, вблизи которой имеются периодические и гомоклинические орбиты, начинающиеся в седловой точке и в нее возвращающиеся. Нанопривод совершает периодические колебания вблизи точки равновесия и падает на подложку за седловой точкой. При увеличении параметра напряжения активации до значения  $\beta = 30$  неустойчивая седловая и центральная точки сближаются (см. рис. 7,г). Это означает, что при небольших амплитудах колебаний процесс притягивания является неустойчивым. На рис. 7,д показаны траектории движения углеродной нанотрубки при  $\beta = 36,45$ . В этом случае гомоклинические орбиты отсутствуют, центральная точка сливается с седловой точкой и конструкция становится динамически неустойчивой при любых начальных условиях.

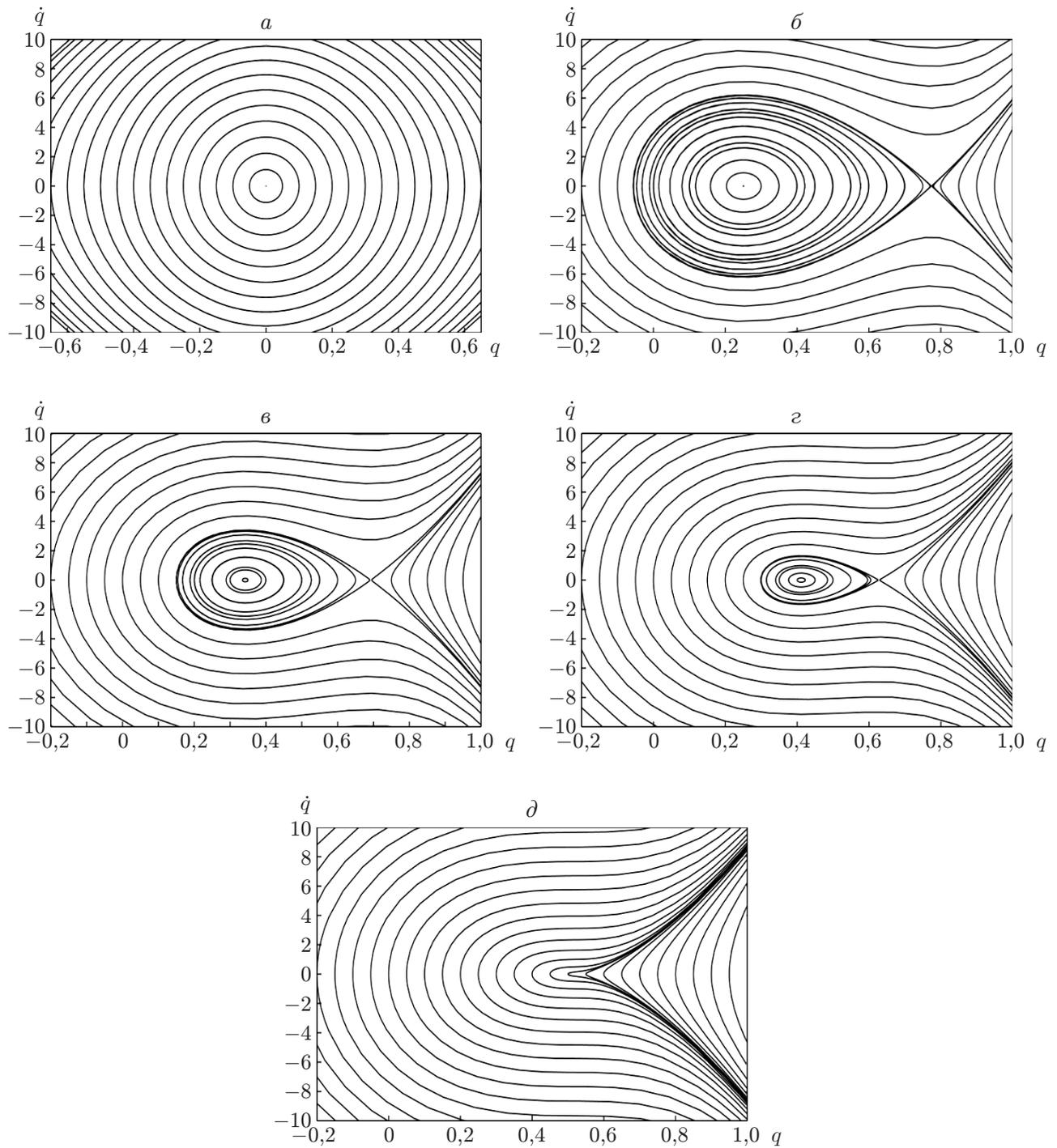


Рис. 7. Фазовая картина для углеродной нанотрубки при различных значениях параметров  $\alpha, \beta$ :

*a* —  $\alpha = 0, \beta = 0$ , *б* —  $\alpha = 5, \beta = 0$ , *в* —  $\beta = 20$ , *г* —  $\beta = 30$ , *д* —  $\beta = 36,45$

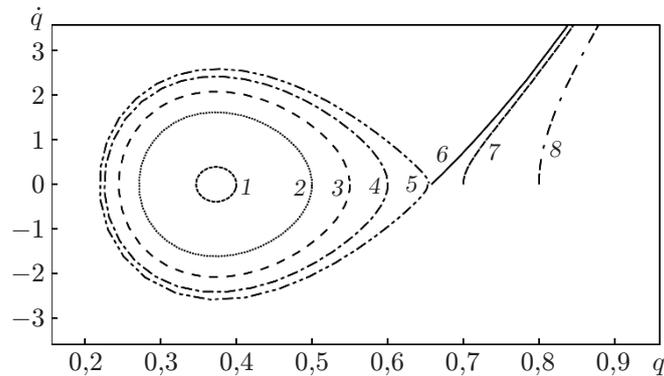


Рис. 8. Фазовая картина при различных начальных значениях амплитуды:  
 1 —  $A = 0,4$ , 2 —  $A = 0,5$ , 3 —  $A = 0,55$ , 4 —  $A = 0,6$ , 5 —  $A = 0,65$ , 6 —  $A = 0,664$ ,  
 7 —  $A = 0,7$ , 8 —  $A = 0,8$

На рис. 8 для некоторого набора характерных параметров приведена фазовая картина движения углеродной нанотрубки при различных значениях безразмерной начальной амплитуды. При значениях начальной амплитуды, меньших значения, соответствующего неустойчивому процессу, их изменение оказывает несущественное влияние на динамическое поведение нанотрубки. С увеличением начальной амплитуды период периодического движения трубки увеличивается. В окрестности начального значения амплитуды, соответствующего неустойчивому движению ( $A \approx 0,664$ ), несущественное изменение начальной амплитуды приводит к значительному изменению характера движения нанотрубки, которое становится динамически неустойчивым.

**Закключение.** Выведены уравнения колебаний нелокальной углеродной нанотрубки с учетом сил Ван-дер-Ваальса, с использованием нового аналитического метода получены зависимости частоты от амплитуды колебаний. Исследовано влияние амплитуды колебаний на собственную частоту и на неустойчивость процесса притягивания. Проведено сравнение полученных аналитических решений с численными решениями. Показано, что для получения решения с приемлемой точностью в представлениях решения в виде рядов достаточно удерживать два члена. Исследовано влияние различных параметров задачи на неустойчивость процесса притягивания. Из результатов проведенного количественного анализа движения системы следует, что точками равновесия углеродной трубки являются центр и неустойчивая седловая точка.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Li C., Thostenson E. T., Chou T. W.** Sensors and actuators based on carbon nanotubes and their composites: a review // *Composit. Sci. Technol.* 2008. V. 68. P. 1227–1249.
2. **Soroush R., Koochi A., Kazemi A. S., et al.** Investigating the effect of Casimir and van der Waals attractions on the electrostatic pull-in instability of nano-actuators // *Phys. Scripta.* 2010. V. 82. 045801.
3. **Koochi A., Kazemi A. S., Noghrehabadi A., et al.** New approach to model the buckling and stable length of multi walled carbon nanotube probes near graphite sheets // *Materials Design.* 2011. V. 32, N 5. P. 2949–2955.
4. **Cao Y., Liang Y., Dong S., Wang Y.** A multi-wall carbon nanotube (MWCNT) relocation technique for atomic force microscopy (AFM) samples // *Ultramicroscopy.* 2005. V. 103, N 2. P. 103–108.

5. **Vahdati A., Vahdati M., Mahdavinejad R. A.** Simulating the buckling deflection of carbon nanotube-made detectors used in medical detections by applying a continuum mechanics model // *Life Sci. J.* 2013. V. 10, N 1. P. 186–191.
6. **Rasekh M., Khadem S. E.** Pull-in analysis of an electrostatically actuated nano-cantilever beam with nonlinearity in curvature and inertia // *Intern. J. Mech. Sci.* 2011. V. 53, N 2. P. 108–115.
7. **Ramezani A., Alasty A., Akbari J.** Closed-form solutions of the pull-in instability in nano-cantilevers under electrostatic and intermolecular surface forces // *Intern. J. Solids Structures.* 2007. V. 44, N 14/15. P. 4925–4941.
8. **Noghrehabadi A., Tadi Beni Y., Koochi A., et al.** Closed-form approximations of the pull-in parameters and stress field of electrostatic cantilever nano-actuators considering van der Waals attraction // *Procedia Engng.* 2011. V. 10. P. 3750–3756.
9. **Tsai J. L., Tu J. F.** Characterizing mechanical properties of graphite using molecular dynamics simulation // *Materials Design.* 2010. V. 31, N 1. P. 194–199.
10. **Tserpes K. I.** Role of intertube spacing in the pullout forces of double-walled carbon nanotubes // *Materials Design.* 2007. V. 28, N 7. P. 2197–2201.
11. **Desquesnes M., Rotkin S. V., Alaru N. R.** Calculation of pull-in voltages for carbon-nanotube-based nanoelectromechanical switches // *Nanotechnology.* 2002. V. 13. P. 120–131.
12. **Batra R. C., Sears A.** Continuum models of multi-walled carbon nanotubes // *Intern. J. Solids Structures.* 2007. V. 44. P. 7577–7596.
13. **Gupta S. S., Batra R. C.** Continuum structures equivalent in normal mode vibrations to single-walled carbon nanotubes // *Comput. Materials Sci.* 2008. V. 43. P. 715–723.
14. **Girifalco L. A., Hodak M., Lee R. S.** Carbon nanotubes, buckyballs, ropes, and a universal graphitic potential // *Phys. Rev. B.* 2000. V. 62, iss. 19. 13104.
15. **Janghorban M., Zare A.** Harmonic differential quadrature method for static analysis of functionally graded single walled carbon nanotubes based on Euler — Bernoulli beam theory // *Latin Amer. J. Solids Structures.* 2012. V. 9. P. 633–641.
16. **Daneshmand F., Rafiei M., Mohebpour S. R., Heshmati M.** Stress and strain-inertia gradient elasticity in free vibration analysis of single walled carbon nanotubes with first order shear deformation shell theory // *Appl. Math. Modelling.* 2013. V. 37, N 16/17. P. 7983–8003.
17. **Ke C., Espinosa H. D., Pugno N.** Numerical analysis of nanotube based NEMS devices. Pt 2. Role of finite kinematics, stretching and charge concentrations // *J. Appl. Mech.* 2005. V. 72. P. 726–731.
18. **Sedighi H. M., Shirazi K. H., Zare J.** An analytic solution of transversal oscillation of quintic nonlinear beam with homotopy analysis method // *Intern. J. Non-Linear Mech.* 2012. V. 47. P. 777–784.
19. **Sedighi H. M., Shirazi K. H.** A new approach to analytical solution of cantilever beam vibration with nonlinear boundary condition // *J. Comput. Nonlinear Dynamics.* 2012. V. 7, N 3. 034502. DOI: 10.1115/1.4005924.
20. **Sedighi H. M., Shirazi K. H., Zare J.** Novel equivalent function for deadzone nonlinearity: Applied to analytical solution of beam vibration using He’s parameter expanding method // *Latin Amer. J. Solids Structures.* 2012. V. 9. P. 443–451.
21. **He J. H.** Max-min approach to nonlinear oscillators // *Intern. J. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2008. V. 9. P. 207–210.
22. **Ghadimi M., Barari A., Kaliji H. D., Domairry G.** Periodic solutions for highly nonlinear oscillation systems // *Arch. Civil Mech. Engng.* 2012. V. 12, N 3. P. 389–395.
23. **Sedighi H. M., Shirazi K. H., Attarzadeh M. A.** A study on the quintic nonlinear beam vibrations using asymptotic approximate approaches // *Acta Astronaut.* 2013. V. 91. P. 245–250.

24. **Sedighi H. M., Shirazi K. H., Noghrehabadi A. R., Yildirim A.** Asymptotic investigation of buckled beam nonlinear vibration // Iran. J. Sci. Technol. Trans. Mech. Engng. 2012. V. 36. P. 107–116.
25. **Sedighi H. M., Shirazi K. H., Reza A., Zare J.** Accurate modeling of preload discontinuity in the analytical approach of the nonlinear free vibration of beams // Proc. Inst. Mech. Engrs. C. J. Mech. Engng Sci. 2012. V. 226, N 10. P. 2474–2484. DOI: 10.1177/0954406211435196.
26. **Sedighi H. M., Shirazi K. H.** Asymptotic approach for nonlinear vibrating beams with saturation type boundary condition // Proc. Inst. Mech. Engrs. C. J. Mech. Engng Sci. 2013. V. 227, N 11. P. 2479–2486. DOI: 10.1177/0954406213475561.
27. **He J. H.** Hamiltonian approach to nonlinear oscillators // Phys. Lett. A. 2010. V. 374, N 23. P. 2312–2314.
28. **Shou D. H., He J. H.** Application of parameter-expanding method to strongly nonlinear oscillators // Intern. J. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2007. V. 8, N 1. P. 121–124.
29. **Lim C. W.** On the truth of nanoscale for nanobeams based on nonlocal elastic stress field theory: equilibrium, governing equation and static deflection // Appl. Math. Mech. 2010. V. 31. P. 37–54.
30. **Civalek O., Demir C.** Buckling and bending analysis of cantilever carbon nanotubes using the Euler — Bernoulli beam theory based on non-local continuum model // Asian J. Civil Engng. 2011. V. 12, N 5. P. 651–661.
31. **Batra R. C., Porfiri M., Spinello D.** Vibrations of narrow microbeams predeformed by an electric field // J. Sound Vibrat. 2008. V. 309. P. 600–612.
32. **Hayt W. H.** Engineering electromagnetics. 6th ed. / W. H. Hayt, J. A. Buck. N. Y.: McGraw Hill, 2001.

*Поступила в редакцию 16/VII 2013 г.,  
в окончательном варианте — 20/XI 2013 г.*

---