ПМТФ, № 3, 1970

НЕЛИНЕЙНАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ ПУЧКА ЛЕНГМЮРОВСКИХ ВОЛН В ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ

В. А. Гудкова, В. А. Липеровский

(Москва)

Рассмотрены нелинейные механизмы, приводящие к эволюции заданного пучка ленгмюровских волн. Показано, что в области больших волновых чисел ($v_i / 3v_e \ll k\lambda_e \ll 1$) за счет индуцированного рассеяния на ионах сначала происходит быстрая изотропизация первоначального пучка волн, а затем медленная спектральная перекачка образовавшегося изотропного спектра в сторону меньших волновых чисел, описываемая дифференциальным уравнением. Показано, что в отличие от области малых $k\lambda_e \ll v_i / 3v_e$, где четырехплазмонные процессы часто доминируют над индуцированным рассеянием на ионах, в области $k\lambda_e > v_i / 3v_e$ четырехплазмонное рассеяние дает лишь малые поправки в кинетическое уравнение для плазмонов. В связи с этим реальные квазистационарные турбулентные спектры ленгмюровских волн при $k\lambda_e > v_i / 3v_e$ в основном определяются индуцированным рассеянием на ионах, а не четырехплазмонными процессами, как это считалось раньше.

Рассмотрим эволюцию заданного в начальный момент времени «пучка» ленгмюровских волн. Под пучком будем подразумевать такое распределение плазмонов в k-пространстве, когда все плазмоны имеют волновой вектор вблизи $\mathbf{k}_0$ в окрестности размером a, причем $a \ll k_0$.

Возможные нелинейные процессы, которые могли бы определить ход спектральной эволюции в изотермической плазме ($T_e = T_i$), это — нелинейное рассеяние на ионах и электронах плазмы (см., например, [1,2]) и процессы четырехплазмонного рассеяния, когда два ленгмюровских плазмона рассеиваются в два других $l + l' \rightleftarrows l'' + l'''$ [5,7]. Эти нелинейные процессы ведут к изотропизации пучка волн.

Для выяснения картины эволюции узкого ($\Delta k < k$) изотропного спектра из общих выражений для конкурирующих процессов четырехплазмонного рассеяния и рассеяния на ионах в области $k\lambda_e > v_i / 3v_e$ были проанализированы формулы, описывающие так называемые «эстафетные» процессы, когда происходит спектральная эволюция изотропной турбулентности за счет большого числа актов рассеяния с малым изменением волнового числа по модулю. Такие процессы в области $k\lambda_e > v_i / 3v_e$, как оказалось, идут быстрее процессов рассеяния на большие Δk. Особенно быстрым оказался процесс эстафетного индуцированного рассеяния на ионах, впервые исследованный в [3] для частного случая $\Delta k \ll k$, почти всегда преобладающий над другими нелинейными процессами при $k\lambda_e > v_i / 3v_e$. В связи с этим заметим, что результаты работы В. Е. Захарова [7] практически лишены области применимости.

Отметим, что задача об эволюции пучков ленгмюровских волн имеет прямое отношение к исследованиям, посвященным объяснению наблюдаемой формы спектра космических лучей на основе предположения о высокочастотной ленгмюровской турбулентности в космической плазме [8-10].

По-видимому, в астрофизических условиях основные источники интенсивной плазменной турбулентности это — области за фронтами ударных волн. В этих областях непосредственно после прохождения ударной волны турбулентность, очевидно, неизотропна и нестационарна. Далее происходит переход к квазистационарным изотропным состояниям, образующимся в результате баланса генерации турбулентности в одном спектральном интервале и передачи ее по спектру в интервал поглощения турбулентных пульсаций [9,10].

Проводимое в данной работе изучение эволюции пучка ленгмюровских волн дает возможность, в частности, сделать вывод, что изотропизация турбулентности — процесс более быстрый, чем перекачка по спектру, и поэтому рассмотрение трехмерных изотропных задач вполне оправдано.

1. Рассмотрим эволюцию пучка ленгмюровских волн на интервале волновых чисел

$$\frac{v_i}{3v_e} \ll k\lambda_e \ll 1 \qquad \left(\lambda_e = \frac{v_e}{\omega_0}\right) \tag{1.1}$$

при индуцированном рассеянии на ионах плазмы. Здесь k — волновое число, λ_e — дебаевский электронный радиус. Остальные обозначения общепринятые. Далее, будем рассматривать плазму, близкую к изотермической ($T_e = T_i$), в которой невозможно существование ионно-звуковых волн (при $T_e \gg T_i$, основным нелинейным процессом [11] будет распад $l > l' + s$.) Отметим, что в астрофизических условиях, очевидно, чаще всего встречается именно изотермическая плазма.

Нелинейное рассеяние ленгмюровских волн на ионах плазмы описывается уравнением [1,2]

$$\frac{\partial N(\mathbf{k})}{\partial t} = N(\mathbf{k}) \int w(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{k}')(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \frac{1}{m_i} \frac{\partial f^{(i)}}{\partial \mathbf{v}} N(\mathbf{k}) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \tag{1.2}$$

Если предположить, что вполне естественно, максвелловский характер распределения ионов по скоростям [1]

$$f^{(i)}(\mathbf{p}) = \frac{n_0 (2\pi)^{3/2}}{m_i^3 v_i^3} \exp\left(-\frac{p^2}{2m_i^2 v_i^2}\right) \tag{1.3}$$

и подставить в (1.2) выражение для вероятности

$$w(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{4(2\pi)^3 e^4 (\mathbf{k}\mathbf{k}')^2 \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'} - (\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{v})}{m_e^2 \omega_k^4 k^2 k'^2} \times \tag{1.4}$$

$$\times \left[\frac{\partial \varepsilon^l}{\partial \omega}\Big|_{\omega_k} \frac{\partial \varepsilon^l}{\partial \omega}\Big|_{\omega_{k'}}\right]^{-1} \left|\frac{\varepsilon_e^l(\omega_k - \omega_{k'}, \mathbf{k}-\mathbf{k}') - 1}{\varepsilon^l(\omega_k - \omega_{k'}, \mathbf{k}-\mathbf{k}')}\right|^2$$

то на интервале (1.1) получим

$$\frac{\partial N(\mathbf{k})}{\partial t} = N(\mathbf{k}) \frac{3}{8} \frac{\omega_0 T_e}{T_i m_e n_0 v_i} \int \frac{N(\mathbf{k}') d\mathbf{k}'}{(2\pi)^{5/2}} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} \frac{k'^2 - k^2}{|\mathbf{k}'-\mathbf{k}|} \exp\left(-\frac{\omega_-^2}{2k_-^2 v_i^2}\right)$$

$$\omega_- = \omega_k - \omega_{k'} = \frac{3}{2} \frac{v_e^2 (k^2 - k'^2)}{\omega_0}, \quad \mathbf{k}_- = \mathbf{k} - \mathbf{k}' \tag{1.5}$$

Выражение (1.5), определяющее спектральную перекачку на ионах, записано с учетом того, что на рассматриваемом интервале (1.1) с достаточной степенью точности (до $(k\lambda_e)^2$) отношение

$$\frac{\varepsilon_e^l(\omega_-, \mathbf{k}) - 1}{\varepsilon^l(\omega_-, \mathbf{k}_-)} = 1 - \frac{\varepsilon_i^l(\omega_-, \mathbf{k}_-)}{\varepsilon^l(\omega_-, \mathbf{k}_-)} \approx 1$$

---

1 Для изучаемых в данной работе процессов эволюции ленгмюровских волн всегда $\Delta T_i \ll T_i$, т. е. можно пользоваться (1.3) и пренебречь изменением функции распределения ионов при нелинейном рассеянии на них ленгмюровских волн. В процессе рассеяния участвуют ионы всех скоростей, имеющихся в плазме (а не ионы, соответствующие отдельным участкам функции распределения), поэтому результатом нелинейного процесса будет общий нагрев ионного газа, этот процесс можно охарактеризовать изменением температуры ΔT_i, она определяется из оценки, которая соответствует закону сохранения энергии при перекачке спектра волн на $\Delta k \sim k$

$$n_0 \Delta T_i \sim N^l \Delta\omega k^2 \Delta k / 2\pi^2 \sim (3/2\pi^2)(k\lambda_e)^2 W^l$$

Отсюда при $T_e \sim T_i$ получим

$$\Delta T_i / T_i \approx (3/2\pi^2) u (k\lambda_e)^2, \quad u = W^l / n T_e$$

так как

$$u \ll 1, \quad k\lambda_e \ll 1, \quad T_i^{-1} \Delta T_i \ll 1$$

Из (1.5) можно легко видеть, что рассеяние на ионах максимально при

$$\exp\left[-\omega_-^2 / 2k_-^2 v_e^2\right] \sim 1, \qquad \text{или} \qquad \omega_- \lesssim k_- v_i$$

Последнее условие можно согласно (1.5) представить

$$\lambda_e |\mathbf{k} + \mathbf{k}'| \cos\alpha \leqslant 2v_i / 3v_e \tag{1.6}$$

где α — угол между векторами $\mathbf{k} + \mathbf{k}'$ и $\mathbf{k} - \mathbf{k}' = \mathbf{k}_-$.

Необходимо подчеркнуть, что эволюция пучка ленгмюровских волн в k-пространстве зависит от «затравок» в k-пространстве, т. е. для того чтобы начался процесс индуцированного рассеяния в элемент k-пространства $d\mathbf{k}$ около $\mathbf{k}_0$, необходимо существование там затравочного уровня плазмонов.

Пусть затравочный уровень плазмонов отличен от нуля вблизи $\mathbf{k}_0$ на расстоянии порядка размеров начального спектра в k-пространстве, тогда пойдет процесс расплывания спектра вблизи его максимума в k-пространстве. Для рассматриваемого пучка волновые векторы взаимодействующих волн близки и, следовательно, $|\mathbf{k} + \mathbf{k}'| = 2k_0$. Поэтому (1.6) на интервале (1.1), где $k_0\lambda_e \gg v_i / 3v_e$ будет выполняться только для $\cos\alpha \ll 1$. Отсюда вытекает, что максимальный инкремент соответствует рассеянию, когда изменение волнового вектора при рассеянии $\mathbf{k}_-$ почти перпендикулярно $\mathbf{k}_0$, т. е. вероятнее всего изотропизация с малым изменением Δk по модулю. Отметим, что, однако, рассеяние вообще без изменения модуля $\mathbf{k}$ также не происходит из-за сомножителя $(k'^2 - k^2)$ под знаком интеграла в (1.5).

Таким образом, если в начальный момент времени задан пучок ленгмюровских волн, он будет изотропизироваться благодаря нелинейному рассеянию на ионах. По сравнению с процессом изотропизации перекачка спектра в сторону меньших $|\mathbf{k}|$ происходит гораздо медленнее. Оценим теперь характерный инкремент рассеяния на ионах, имея в виду процесс расплывания пучка ленгмюровских волн в описанном выше смысле. Инкремент такого процесса (для уширения спектра на величину порядка его размеров в k-пространстве), как легко видеть, максимален при

$$\frac{3}{2}\frac{v_e^2}{\omega_0}(k^2 - k'^2) \sim v_i |\mathbf{k} - \mathbf{k}'| \tag{1.7}$$

Если пучок представляет собой «облако» достаточно малого размера a в k-пространстве $a\lambda_e \ll v_i / 3v_e \ll k\lambda_e$, тогда в интеграл, стоящий справа (1.5), вклад дают все $\mathbf{k}'$ из $N(\mathbf{k}')$

$$\gamma_{(i)}^{(0)} \approx \omega_0 u, \qquad u = W^l / n_0 T_e \tag{1.8}$$

Очевидно, что эта первая наиболее быстрая стадия расплывания скоро пройдет.

Предполагая, что размер начального спектра $a > v_i / 3v_e\lambda_e$, найдем, что спектральная перекачка волн согласно (1.5) может быть только в такие $\mathbf{k}$, что $|\mathbf{k}| < |\mathbf{k}'|$ из $N(\mathbf{k}')$. Слой в облаке начального спектра, вырезанный экспонентой в выражении (1.5), имеет толщину порядка

$$\Delta k \sim a v_i / 3k_0\lambda_e v_e \tag{1.9}$$

Оценка (1.9) легко получается из (1.7), если подставить

$$k + k' \sim 2k, \qquad |\mathbf{k} - \mathbf{k}'| \sim a$$

Соответственно, из всех рассеивающихся плазмонов заданного спектра $N(\mathbf{k}')$ рассеивается в точку $\mathbf{k}$ лишь доля порядка

$$\Delta k / a = v_i / 3v_e k_0 \lambda_e \tag{1.10}$$

Отсюда искомый инкремент имеет порядок

$$\gamma_{(i)}^{(1)} \approx \omega_0 u v_i / 3v_e k_0 \lambda_e \tag{1.11}$$

Пусть теперь затравочный уровень $N(k)$ достаточен для волновых векторов при любых углах между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_0$ (но по модулю $|\mathbf{k}|$ близко к $|\mathbf{k}_0|$), тогда аналогично (1.9) легко получим

$$\Delta k \sim v_i / 3v_e \lambda_e \tag{1.12}$$

и соответственно

$$\gamma_{(i)}^{(2)} \approx \omega_0 u v_i / 3v_e a \lambda_e \gg \gamma_{(i)}^{(1)} \qquad (k_0 \gg a) \tag{1.13}$$

В реальных условиях, очевидно, затравочные плотности числа плазмонов имеются по всем направлениям $\mathbf{k}$, и поэтому следует считать, что, как правило, заданный в начальный момент времени пучок ленгмюровских волн будет быстро рассеиваться (изотропизироваться) по всем направлениям более или менее равномерно с инкрементом (1.13).

По сравнению с этим процессом рассеяние на большие углы на электронах с $\gamma^{(e)} \sim \omega_0 u (k\lambda_e)^3$ всегда малосущественно.

2. Нелинейный процесс четырехплазмонного рассеяния ленгмюровских волн $l + l' \to l'' + l'''$ на том же интервале волновых чисел (1.1) в некоторых случаях может конкурировать с процессом индуцированного рассеяния, изученного в предыдущем пункте.

Инкремент четырехплазмонного рассеяния ленгмюровских волн может быть оценен по формуле

$$\gamma^{(4)} = \int \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9} w_{ll}^{ll}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | \mathbf{k}_3, \mathbf{k}) N(\mathbf{k}_2) N(\mathbf{k}_3) \tag{2.1}$$

где вероятность процесса имеет вид [10]

$$\begin{aligned} w_{ll}^{ll}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | \mathbf{k}_3, \mathbf{k}) = {} & \frac{(2\pi)^9 e^4 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k})\, \delta(\omega\mathbf{k}_1 + \omega(\mathbf{k}_2) - \omega(\mathbf{k}_3) - \omega(\mathbf{k}))}{2m_e^2 v_e^4 (4\pi)^3 k^2 k_1^2 k_2^2 k_3^2} \times \\ & \times \Bigg\{ \frac{\varepsilon_i^l (k_2 - k_3)}{\varepsilon^l (k_2 - k_3)} \mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3 + \frac{\varepsilon_i^l (k_1 - k_3)}{\varepsilon^l (k_1 - k_3)} \mathbf{k}\mathbf{k}_2\mathbf{k}_1\mathbf{k}_3 - \\ & - \lambda_e^2 [\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3 (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)^2 + \mathbf{k}_3\mathbf{k}_1\mathbf{k}\mathbf{k}_2 (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3)^2] + \\ & + \lambda_e^2 \Bigg[\frac{4}{3} \frac{k_1^2 k_2^2 - (\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2)^2}{k_+^2} (\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2 k_+^2 - \mathbf{k}\mathbf{k}_+\mathbf{k}_3\mathbf{k}_+) + \\ & + k_+^2 (\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2)^2 + \mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_3\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2^2 + \mathbf{k}\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_2\mathbf{k}_1^2 - \\ & - \mathbf{k}_1\mathbf{k}_2 (k_1^2 \mathbf{k}_2\mathbf{k}_+ + k_2^2 \mathbf{k}_1\mathbf{k}_+ + \mathbf{k}_3\mathbf{k}_1\mathbf{k}\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3\mathbf{k}_2\mathbf{k}\mathbf{k}_2) + \\ & + \mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_3\mathbf{k}_2 \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2 + (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)^2}{2} + \mathbf{k}\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_1 \frac{(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3)^2 + (\mathbf{k} - \mathbf{k}_2)^2}{2} \Bigg] \Bigg\} \end{aligned} \tag{2.2}$$

где

$$k_+ = k_1 + k_2 = k + k_3, \quad k_2 - k_3 = \{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3, \ \omega_2 - \omega_3\}$$
$$k_1 - k_3 = \{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3, \ \omega_1 - \omega_3\}, \ \omega(k) = \omega_0 + {}^3/_2 k^2 v_e^2 \omega_0^{-1}$$

На интервале (1.1) максимальный инкремент четырехплазмонного распада выражается формулой

$$\gamma_0^{(4)} \approx \frac{\pi}{128} \left(\frac{k}{a}\right)^2 u^2 (k\lambda_e)^{-2} \omega_0 \tag{2.3}$$

При этом (2.3) соответствует только таким распадам, когда каждый из участвующих в процессе плазмонов незначительно меняет модуль своего волнового вектора, т. е.

$$\varepsilon_i^l\ (k\_) \,/\, \varepsilon^l\ (k\_) = {}^1/_2$$

в выражении (2.2). Для рассматриваемого пучка это соответствует рассеянию поперек пучка, т. е. изотропизации начального спектра волн.

Для процессов с относительно большими изменениями волнового вектора по модулю

$$\frac{\varepsilon_i^l\ (k\_)}{\varepsilon^l\ (k\_)} = \frac{m_e}{9m_i}\frac{1}{(k\lambda_e)^2} \quad \text{при} \quad \frac{v_i}{3v_e} \ll k\lambda_e \ll \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/4} \tag{2.4}$$

$$\frac{\varepsilon_i^l\ (k\_)}{\varepsilon^l\ (k\_)} = (k\lambda_e)^2 \quad \text{при} \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/4} \ll k\lambda_e \ll 1 \tag{2.5}$$

Соответственно, инкремент $\gamma^{(u)}$ равен на интервале (2.4)

$$\gamma_{\rm I}^{(4)} \sim \gamma_0^{(4)}\,(m_e\,/\,m_i)^2\,(3k\lambda_e)^{-4} \tag{2.6}$$

а на интервале (2.5)

$$\gamma_{\rm II}^{(4)} \sim \gamma_0^{(4)}\,(k\lambda_e)^4 \tag{2.7}$$

Таким образом, легко видеть, что процессы четырехплазмонного рассеяния со значительным изменением модуля $\Delta\mathbf{k} = |\mathbf{k}_1| - |\mathbf{k}| \sim |\mathbf{k}|$, дающие расплывание спектра по модулю $|\mathbf{k}|$, происходят очень медленно по сравнению с изотропизацией.

Сравним нелинейные процессы рассеяния на ионах и четырехплазмонного рассеяния и выясним, при каких условиях на интервале (1.1) четырехплазмонные процессы преобладают над индуцированным рассеянием на ионах плазмы. Неравенство $\gamma_0^{(4)} > \gamma_i^{(2)}$ дает

$$U \geqslant \frac{128}{\pi}\frac{v_i}{v_e}a\lambda_e \tag{2.8}$$

По мере уширения спектра растет $(a\,/\,k)$, и, таким образом, согласно (2.8) только при достаточно узких пучках и большой энергии волн эволюцию пучка могут определять четырехплазмонные процессы. При нарушении (2.8) в качестве основного нелинейного процесса начнет выступать индуцированное рассеяние на ионах плазмы. Учтя условие применимости приближения случайных фаз

$$\gamma^{(4)} \ll \Delta\omega = 3\lambda_e^2 ak\omega_0$$

получим ограничение на u, определяющее область преобладания четырехплазмонных взаимодействий волн со случайной фазой

$$U \ll 4\,(k\lambda_e)^2\left(\frac{2a}{k}\right)^{3/2} \tag{2.9}$$

Из (2.8) и (2.9) получим, что для существования области преобладания четырехплазмонных взаимодействий для волн со случайной фазой необходимо

$$a\lambda_e \geqslant 3.6 v_i\,/\,v_e \tag{2.10}$$

Последнее условие на интервале (1.1) является довольно жестким на «размер» пучка в k-пространстве $a\,/\,k$ и $k\lambda_e$, поэтому можно сделать вывод, что для волн со случайной фазой на интервале (1.1) практически всегда основным нелинейным процессом, приводящим к эволюции пучка ленгмюровских волн, является процесс индуцированного рассеяния на ионах плазмы.

3. Эволюция заданного в начальный момент времени пучка ленгмюровских волн, как было показано, приводит к изотропизации. В результате спектр примет в k-пространстве форму сферического слоя толщиной a и радиусом $\sim k_0$.

Для изотропного случая и достаточно гладкого спектра в области (1.1) уравнение (1.5) может быть приведено к дифференциальной форме. С учетом того, что

$$k - k' \ll k, \qquad k_- = |\mathbf{k} - \mathbf{k}'| = k\sqrt{2(1-\cos\theta)}$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}'}{kk'}$$

поэтому

$$\frac{\omega_-}{k_- v_i} = \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{v_e}{v_i}\frac{(k-k')}{\sqrt{1-\cos\theta}}$$

Подставляя в (1.5) k_-, получаем для изотропного случая

$$\frac{\partial N(k)}{\partial t} = N(k)\frac{3\omega_0 T_e}{8T_i m_e n_0 v_i}\int\frac{N(k')\,dk'k'^2\cos^2\theta d\cos\theta\,\sqrt{2}\,(k'-k)}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{1-\cos\theta}}\exp^{-\frac{\alpha^2(k'-k)^2}{2}}$$

$$\alpha = \frac{3}{\sqrt{2}}\frac{v_e}{v_i}(1-\cos\theta)^{-1/2} \tag{3.1}$$

Аналогично [2,3], разлагая спектральную плотность энергии турбулентных пульсаций $W(k)$ в ряд по $(k'-k)$ и интегрируя правую часть сначала по $d\alpha\,(k'-k)$, а потом по $d\cos\theta$, получаем[1] $(T_e = T_i)$

$$\frac{\partial W(k)}{\partial t} = W(k)\frac{\partial W(k)}{\partial k}\frac{\pi\omega_0^3}{27\,m_i n_0 v_e^4}, \quad W(k) = \frac{\omega_0 k^2 N(k)}{2\pi^2} \tag{3.2}$$

Уравнение (3.2) соответствует тому, что в каждом акте индуцированного рассеяния происходит лишь малое изменение частоты (модуля волнового вектора $\Delta k \lesssim v_i / v_e\lambda_e$). Перекачка на относительно большие Δk может быть достигнута при большом числе актов рассеяния, т. е. она носит «эстафетный» характер.

Как легко видеть, уравнение (3.2) соответствует перекачке спектра в сторону меньших частот. Эффект некоторого сужения спектра [2,3] мал, как $(k\lambda_e)^2$ по сравнению с 1. Из уравнения (3.2) легко получить оценку инкремента соответствующего процесса

$$\gamma^{(i)*} \sim \frac{\pi}{27}\omega_0\frac{m_e}{m_i}u(k\lambda_e)^{-2}(k/\Delta k)^2 \tag{3.3}$$

Аналогично процессу индуцированного рассеяния на ионах, опуская громоздкие выкладки, можно написать в области (1.1) для изотропного случая и достаточно гладкого спектра выражение, соответствующее эстафетной перекачке по спектру ленгмюровских волн при четырехплазмонных процессах

$$\begin{aligned}\frac{\partial N(k)}{\partial t} = &-\int\frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9}w_{ll}^{ll}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 | \mathbf{k}_3, \mathbf{k})\{N(\mathbf{k})N(\mathbf{k}_1)N(\mathbf{k}_3) + \\ &+ N(\mathbf{k})N(\mathbf{k}_2)N(\mathbf{k}_3) - N(\mathbf{k})N(\mathbf{k}_1)N(\mathbf{k}_2) - N(\mathbf{k}_1)N(\mathbf{k}_2)N(\mathbf{k}_3)\} = \\ &= D\int\Big\{F_1(k_1, k_2)\Big(N^2(k)\frac{\partial N(k_2)}{\partial k_2^2} - N^2(k_2)\frac{\partial N(k)}{\partial k^2}\Big) + \\ &+ F_2(k_1k_2)\Big(N(k) - N(k_2)\Big)\frac{\partial N(k)}{\partial k^2}\frac{\partial N(k_2)}{\partial k_2^2}\Big\}dk_2^2\end{aligned} \tag{3.4}$$

---

[1] Результат [2,3] получен в частном случае узкого изотропного спектра $\Delta k \ll k$. Однако, если в соответствующих формулах [2,3] пренебречь оставленными там малыми членами порядка $k^{-1}\Delta k$ по сравнению с 1, результаты [2,3] совпадут с формулой (3.2) для $\Delta k \sim k$

Здесь

$$D = \frac{\omega_0{}^3\pi}{3v_e{}^2\,(4\pi)^5(nT_e)^2}\left(\frac{4}{3\lambda_e}\sqrt{\frac{m_e}{m_i}}\right)^3 \int\limits_0^\infty y^2 f^2\,(y)\,dy \tag{3.5}$$

$$f\,(y) = \left(1 - I_+\,(y)\right) \Big/ \left(1 - I_+\,(y) + \frac{T_e}{T_i}\right)$$

$$F_1\,(k,\,k_2) = \int\limits_{-1}^{1} d\cos\theta\,\frac{k_2 k_1{}^2}{|\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}|}\left(\frac{A_1}{k^2} + \frac{A_2}{k_2{}^2}\right), \quad F_1 \sim k \text{ при } k_2 \sim k$$

$$F_2\,(k,\,k_2) = \int\limits_{-1}^{1} d\cos\theta A k_\perp{}^3 k_2 \,/\, |\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}|, \quad F_2 \sim k \text{ при } k_2 \sim k \tag{3.6}$$

$$k_\perp = \frac{kk_2\sin\theta}{|\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}|} = \frac{kk_2\sin\theta}{\sqrt{k_2{}^2 + k^2 - 2kk_2\cos\theta}}, \quad k_\parallel = \sqrt{k^2 - k_\perp{}^2}$$

$$k_{2\parallel}^{\ 2} = k_2{}^2 - k_\perp{}^2, \qquad \cos\theta = \frac{\mathbf{k}\mathbf{k}_2}{kk_2}$$

$$A_1 = -\frac{32}{15}\frac{k_\parallel^{\ 2}}{k^2}\left[1 - \frac{12}{7}k_\perp{}^2\left(\frac{2}{k_2{}^2} + \frac{1}{k^2}\right) + \frac{64}{21}\left(\frac{1}{k_2{}^4} + \frac{2}{k^2 k_2{}^2}\right)k_\perp{}^4 - \right.$$
$$\left. - \frac{1280}{231}\frac{k_\perp{}^6}{k^2 k_2{}^4}\right]$$

$$A_2 = -\frac{32}{15}\frac{k_{2\parallel}^{\ 2}}{k^2}\left[1 - \frac{12}{7}k_\perp{}^2\left(\frac{2}{k^2} + \frac{1}{k_2{}^2}\right) + \frac{64}{21}\left(\frac{1}{k^4} + \frac{2}{k^2 k_2{}^2}\right)k_\perp{}^4 - \right.$$
$$\left. - \frac{1280}{231}\frac{k_\perp{}^6}{k_2{}^2 k^4}\right]$$

$$A = \frac{4}{3}\left\{1 - \frac{16}{5}k_\perp{}^2\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k_2{}^2}\right) + \frac{96}{35}k_\perp{}^4\left(\frac{1}{k^4} + \frac{1}{k_2{}^4} + \frac{4}{k^2 k_2{}^2}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1024}{105}k_\perp{}^6\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k_2{}^2}\right)\frac{1}{k^2 k_2{}^2} + \frac{2560}{231}\frac{k_\perp{}^6}{k_2{}^2 k^4}\right\}$$

Выражение для $I_+\,(y)$ см., например, в [13]. Строго говоря, выражение (3.4) справедливо лишь при

$$k\lambda_e < \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/4}$$

При обратном знаке неравенства спектральная перекачка не носит эстафетного характера (см. оценку (11) работы [10]).

Используя (3.4) — (3.6), легко получить оценку инкремента для такого процесса

$$\gamma^{(4)*} \sim \omega_0 u^2 \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{3/2}\left(\frac{k}{\Delta k}\right)\frac{1}{4}\,(3k\lambda_e)^{-5} \tag{3.7}$$

Условие преобладания индуцированного рассеяния на ионах над четырехплазмонными процессами в изотропном случае

$$u \ll 36\pi\left(\frac{\Delta k}{k}\right)(k\lambda_e)^3\left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \text{ при } \frac{v_i}{3v_e} \ll k\lambda_e \ll 1,\; u \ll 1 \tag{3.8}$$

почти всегда выполняется за счет большого коэффициента в правой части (3.8). Поэтому член, соответствующий в полном кинетическом уравнении четырехплазмонным процессам, следует учитывать лишь в качестве поправочного члена при обращении в нуль перекачки из-за рассеяния на ионах (например, если $\partial\,(k^2 N\,(k))\,/\,\partial k) = 0$.

4. Проведем оценки инкрементов четырехплазмонного рассеяния и рассеяния на ионах для пучка ленгмюровских волн, если

$$k\lambda_e \ll v_i / 3v_e \tag{4.1}$$

Максимальный инкремент четырехплазмонного рассеяния для процесса уширения спектра в k-пространстве на величину порядка начальной ширины спектра определится выражением

$$\gamma^{(4)} \approx \frac{\pi}{8}\left(\frac{T_e}{T_e+T_i}\right)^2\left(\frac{k}{2a}\right)^2 u^2 (k\lambda_e)^{-2}\,\omega_0 \tag{4.2}$$

При оценке инкремента здесь учтено, что при $k\lambda_e \ll v_i / 3v_e$ в выражении (2.2) отношение $\varepsilon_i^{\,l}(k_-) / \varepsilon_e^{\,l}(k_-) \sim T_e / (T_e + T_i)$ (при $v_i / 3v_e < k\lambda_e < {}^1/_3\sqrt{m_e / m_i}$, что имеет смысл лишь для неизотермической плазмы $T_e \gg T_i$, $\varepsilon_i^{\,l}(k_-) / \varepsilon^l(k_-) \approx 1$).

При оценке инкремента считалось, что $N(k) = 6\pi^2 W^l / \omega_0 a^3$ в малой сферической области k-пространства радиусом a около k_0 ($k_0 \gg a$). Инкремент рассеяния ленгмюровских волн на ионах в области (4.1) для спектральной перекачки в k-пространстве на величину порядка начальной ширины спектра определится выражением

$$\gamma^{(i)} \approx \omega_0 \frac{2\,(T_e / T_i)^{3/2}}{(1+T_e / T_i)^2}\, k\lambda_e \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} u \tag{4.3}$$

Условия доминирования четырехплазмонного рассеяния $\gamma^{(4)} \gg \gamma^{(i)}$ можно записать в форме

$$u > u_1 = \left(\frac{2a}{k}\right)^2 \frac{16}{\pi}\left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{1/2}\left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2}(k\lambda_e)^3 \tag{4.4}$$

Теперь учтем условие применимости приближения случайных фаз

$$\gamma^{(4)} \ll \Delta\omega = 3\lambda_e^2 2ka\omega_0, \quad \text{или} \quad u \ll u_2 = \left(\frac{2a}{k}\right)^{3/2}\left(\frac{96}{\pi}\right)^{1/2}(k\lambda_e)^2\frac{T_e+T_i}{2T_e} \tag{4.5}$$

и условие несущественности кулоновских соударений

$$\gamma^{(4)} \gg \gamma_{st} = \omega_0 / n\lambda_e^3, \quad \text{или} \quad u \gg u_3 = \frac{32}{\pi}\frac{2a}{k}k\lambda_e\frac{T_e+T_i}{2T_e}(n\lambda_e^3)^{-1/2} \tag{4.6}$$

Условия (4.4) — (4.6) определяют область преобладания четырехплазмонных взаимодействий волн со случайной фазой над другими процессами при

$$u_1 < u < u_2 \tag{4.7}$$

Что же касается критерия (4.6), то обычно $u_3 < u_1$.

Учитывая совместно (4.5) и (4.6), получаем необходимое условие существования области преобладания четырехплазмонных процессов для волн со случайной фазой над соударениями

$$n_0 \ll (a\lambda_e)^2 (k\lambda_e)^2 \left[\frac{9}{16\,\pi^3}\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^2\left(\frac{T_e}{e^2}\right)^3\right] \tag{4.8}$$

Последнее условие можно рассматривать как некоторое ограничение на T_e и n_0 при заданных $a\lambda_e$ и $k\lambda_e$.

Это дает, например, для $T_e \sim 1ev$, $k\lambda_e = 10^{-2}$, $a / k = 0.1$ и водородной плазмы $h \ll 5 \cdot 10$ $см^{-3}$.

Интервал значения u, разрешенный (4.4) и (4.5), существует при

$$\frac{2a}{k} \ll \frac{m_e}{m_i} (k\lambda_e)^2 \left(\frac{T_e + T_i}{2T_e}\right)^2$$

т. е. практически всегда для $k\lambda_e < v_i / 3v_e$ и $a < k / 2$.

Возьмем, например, водородную плазму при $T_e = T_i$, $a = 0.05k_0$ и $k\lambda_e = 0.1 (m_e / m_i)^{1/2}$. В этом случае для преобладания четырехплазмонных процессов над нелинейным рассеянием на ионах и в то же время, чтобы еще было применимо приближение случайных фаз, плотность энергии волн u должна лежать в пределах

$$2.5 \cdot 10^{-8} \ll u \ll 10^{-6}$$

Отметим, что в силу (1.5) и $k\lambda_e \ll v_i / 3v_e$ плотность энергии волн ограничена сверху $u \ll (m_e / m_i)$. В случае меньших энергий, чем определяемые (4.4), $u_3 < u < u_1$ и индуцированное рассеяние на ионах преобладает над четырехплазмонным рассеянием. Отметим, что существует качественная разница в спектральной эволюции пучка ленгмюровских волн в k-пространстве в интервале $v_i / 3v_e \ll k\lambda_e \ll 1$ и при $k\lambda_e \ll v_i/3v_e$. В последнем случае из-за индуцированного рассеяния на ионах начальный спектр, соответствующий пучку ленгмюровских волн, перемещается в k-пространстве в сторону меньших k и несколько сужается по модулю одновременно с изотропизацией (см. [5]), не являющейся в этом случае преобладающим процессом.

Эволюция изотропных турбулентных спектров на интервале $k\lambda_e < v_i / 3v_e$ подробно рассмотрена в [3], а квазистационарные изотропные состояния — в [9,10].

В заключение авторы благодарят В. Н. Цытовича за многочисленные ценные обсуждения и советы.

Поступила 28 VII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Цытович В. Н. Нелинейные эффекты в плазме. М., «Наука», 1967.
2. Галеев А. А., Карпман В. И., Сагдеев Р. З. Многочастичные аспекты теории турбулентной плазмы. Nucl. fusion, 1965, vol. 5, No. 1.
3. Галеев А. А., Карпман В. И. Сагдеев Р. З. Об одной решаемой проблеме в теории турбулентности плазмы. Докл. АН СССР, 1964, т. 157, № 5, стр. 1088.
4. Цытович В. Н., Шапиро В. Д. Нелинейная стабилизация пучковых неустойчивостей плазмы. Nucl. fusion, 1965, vol. 5, No. 3.
5. Коврижных Л. М. Об эффектах взаимодействия плазмонов. ЖЭТФ, 1965, т. 49, вып. 1 (6), стр. 237.
6. Коврижных Л. М. Поправка к статье «Об эффектах взаимодействия плазмонов». ЖЭТФ, 1965, т. 49, вып. 4.
7. Захаров В. Е. О спектре слабой турбулентности в плазме без магнитного поля. ЖЭТФ, 1966, т. 51, вып. 2, стр. 688.
8. Каплан С. А., Цытович В. Н. Плазменные механизмы излучения в астрофизике. Усп. физ. н., 1969, т. 97, вып. 1.
9. Пикильнер С. Б., Цытович В. Н. Спектры высокочастотной турбулентности плазмы и ускорение субкосмических лучей. ЖЭТФ, 1968, т. 55, вып. 3, стр. 977.
10. Липеровский В. А., Цытович В. Н. О спектрах турбулентности горячей плазмы. ЖЭТФ, 1969, т. 57, вып. 10.
11. Липеровский В. А., Цытович В. Н. О распаде продольных ленгмюровских колебаний плазмы на ионно-звуковые. ПМТФ, 1965, № 5.
12. Липеровский В. А., Цытович В. Н. О взаимодействии ленгмюровских плазмонов. Изв. вузов, Радиофизика, 1969, т. 12, № 6, стр. 823.
13. Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М., Атомиздат, 1961.