15. **Солиман, Джонсон.** Теплопередача в переходном режиме при обтекании турбулентным потоком плоской пластины, обладающей отличной от нуля теплоемкостью и содержащей переменный во времени источник тепла.— Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. С. Теплопередача, 1967, № 4.
16. **Ванг, Чжун, Томас.** Исследование нестационарного конвективного теплообмена в ламинарном пограничном слое с учетом теплоемкости и термического сопротивления стенки.— Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. С. Теплопередача, 1977, № 4.
17. **Kemink R. G., Sparrow E. M.** Heat transfer coefficients for melting about a vertical cylinder with or without subcooling and for open or closed containment.— Int. J. Heat Mass Transfer, 1981, v. 24, N 10.
18. **Sundén B.** Conjugated heat transfer from circular cylinders in low Reynolds number flow.— Int. J. Heat Mass Transfer, 1980, v. 23, N 10.

Поступила 11/III 1984 г.

УДК 532.526.011:518.5

О СТРУКТУРЕ ТЕЧЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ЗАДНЕЙ КРОМКИ ПЛАСТИНЫ

В. В. Боголепов

(Москва)

В [1—3] получены решения для окрестности задней кромки плоской пластины при больших, но докритических числах Рейнольдса Re_0, посчитанных по длине пластины l и параметрам набегающего потока, для дозвукового и сверхзвукового внешних потоков соответственно, которые описывают течения в переходной области протяженностью $x \sim O\left(l\,\mathrm{Re}_0^{-3/8}\right)$ между известным течением Блазиуса на плоской пластине и течением в следе [4]. Эти решения имеют особенность в следе за пластиной, которую удается преодолеть при используемых численных методах. Наличие особенности указывает на необходимость изучения течения в областях протяженностью $x < l\,\mathrm{Re}_0^{-3/8}$.

В данной работе при использовании метода сращиваемых асимптотических разложений при $\mathrm{Re}_0 \to \infty$ исследовано течение около задней кромки пластины в области протяженностью $l\mathrm{Re}_0^{-3/4} < x < l\,\mathrm{Re}_0^{-3/8}$. Получено, что на таких длинах в области около пластины реализуется «компенсационный» режим течения [5], когда около пластины справедливы решения [1—3] для задней кромки пластины, а в следе за ней существует особенность прежнего вида. Показано, что в особой области при $x \sim O\left(l\,\mathrm{Re}_0^{-3/4}\right)$ течение в первом приближении описывается уравнениями Навье — Стокса для несжимаемой жидкости. Численные решения получены для тонкой пластины и для пластины с толщиной в широком диапазоне изменения местного числа Рейнольдса Re = 0—100. Представлены картины линий тока, характеристики срывных зон, распределения газодинамических функций течения по поверхности обтекаемых тел.

1. При построении решений [1—3] для оценок функций течения в узкой области вблизи поверхности пластины учитывалось, что функции течения изменяются пропорционально расстоянию от поверхности пластины, течение вязкое, разрыв краевых условий в задней кромке пластины вызывает нелинейные возмущения функций течения. Тогда при использовании уравнений движения жидкости легко получить

$$u \sim x^{1/3},\quad v \sim \varepsilon x^{-1/3},\quad \Delta p \sim x^{2/3},\quad \delta \sim \varepsilon x^{1/3}. \tag{1.1}$$

Здесь и в дальнейшем используются безразмерные переменные; для этого все линейные размеры относятся к l; давление и энтальпия — к $\rho_0 u_0^2$ и u_0^2 соответственно; остальные функции течения — к своим значениям в невозмущенном набегающем потоке; δ — толщина слоя смешения за кромкой пластины; $\varepsilon = \mathrm{Re}_0^{-1/2}$.

В рассматриваемом течении фиксировано начало образования слоя смешения $x = 0$, и поэтому соотношения (1.1) описывают особенность сразу за задней кромкой пластины. Соотношения (1.1) замыкаются условием взаимодействия течения в пристеночном слое с внешним дозвуковым или сверхзвуковым потоком $\Delta p \sim \delta/x$, и тогда получаются оценки для масштабов и функций течения пристеночной области (в [1—3] это область III) $x \sim \varepsilon^{3/4}$, $y \sim \varepsilon^{5/4}$, $u \sim \varepsilon^{1/4}$, $v \sim \varepsilon^{3/4}$, $\Delta p \sim \varepsilon^{1/2}$.

Если теперь рассматривать области протяженностью $\varepsilon^{3/2} < x < \varepsilon^{3/4}$, т. е. более короткие, чем в [1—3], то соотношения (1.1) останутся в силе, а течение в пристеночной области будет взаимодействовать с пристеночной частью пограничного слоя у задней кромки пластины [5]. При этом реализуется «компенсационный» режим течения, когда условие взаимодействия имеет локальный характер, течение вблизи пластины остается невозмущенным, т. е. таким, как в [1—3] в задней кромке пластины, а решение для следа является фактически первым членом координатного разложения для решения в области протяженностью $x \sim \varepsilon^{3/4}$ [3].

2. Оценки п. 1 позволяют построить решение уравнений Навье — Стокса в окрестности особой области, где продольная и поперечная компоненты скорости становятся равными по порядку величины. Из соотношений (1.1) следует, что это справедливо в области с характерными размерами $x \sim y \sim O(\varepsilon^{3/2})$, для которой необходимо ввести новые независимые переменные и асимптотические разложения для функций течения:

$$x = \varepsilon^{3/2}x_1,\ y = \varepsilon^{3/2}y_1, \tag{2.1}$$

$$u(x,\ y;\ \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}u_1(x_1,\ y_1) + \ldots,\ v(x,\ y;\ \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}v_1(x_1,\ y_1) + \ldots,$$

$$p\,(x, y; \varepsilon) = 1/\gamma\, \mathrm{M}_0^2 + \varepsilon^{1/2}p_w + \varepsilon p_1\,(x_1, y_1) + \ldots, \mu\,(x, y;\ \varepsilon) = \mu_w + \ldots,$$

$$\rho(x,\ y;\ \varepsilon) = \rho_w + \ldots,\ h(x,\ y;\ \varepsilon) = h_w + \varepsilon^{1/2}h_1(x_1,\ y_1) + \ldots$$

Здесь все переменные обычные; индексом w отмечены переменные у поверхности пластины у ее задней кромки, которые будут различны для дозвукового или сверхзвукового внешних набегающих потоков.

Подстановка разложений (2.1) в уравнения Навье — Стокса и совершение предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ показывают, что в первом приближении течение в окрестности задней кромки пластины с характерными размерами $x \sim y \sim O(\varepsilon^{3/2})$ описывается уравнениями Навье — Стокса для несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,\quad u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{2.2}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right),\quad u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{RePr}}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right),$$

$$\mathrm{Re} = \rho_w A a_1^2/\mu_w,\quad A = (\partial u/\partial y)_w,\quad B = (\partial h/\partial y)_w.$$

Здесь координаты x, y отнесены к некоторому размеру в области течения a_1; компоненты скорости u, v, возмущения энтальпии h и давления p — к своим величинам и удвоенному скоростному напору в сдвиговом набегающем потоке на расстоянии a_1 от поверхности пластины соответственно; Re — местное число Рейнольдса; Pr — число Прандтля во всех расчетах полагалось равным 0,7. В (2.2) и в дальнейшем для простоты опущен индекс 1 у переменных.

На поверхности обтекаемого тела должны выполняться обычные условия непротекания и прилипания

$$u = v = 0, \tag{2.3}$$

в следе на линии симметрии — условия симметрии и гладкости профилей функций u, v и h:

$$\partial u/\partial y = v = \partial h/\partial y = 0. \tag{2.4}$$

Внешние краевые условия получаются из сращивания с набегающим сдвиговым потоком:

$$u \to y,\ h \to y\ (x \to -\infty \text{ или } y \to \infty), \tag{2.5}$$

в следе решение для исследуемой области должно переходить в соотношения вида (1.1):

$$u \sim x^{1/3},\ h \sim x^{1/3}(x \to \infty). \tag{2.6}$$

В принятых обозначениях безразмерные напряжение трения τ и тепловой поток q выражаются формулами

$$\tau = \tau_{xy}/\varepsilon\rho_0 u_0^2 \mu_w A = \partial u/\partial y + \partial v/\partial x,\ q = -q_w \mathrm{Pr}/\varepsilon\rho_0 u_0^3 \mu_w B = \partial h/\partial n$$

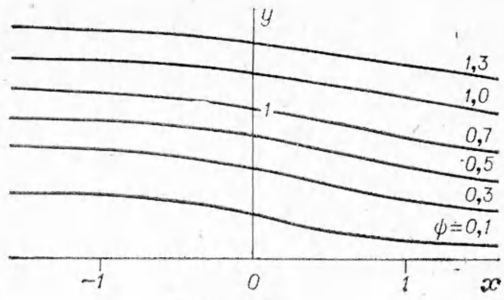
(n — внешняя к поверхности тела нормаль) и в набегающем сдвиговом потоке $\tau = q = 1$.

Краевая задача (2.2)—(2.6) без уравнения сохранения энергии была поставлена и частично исследована в [6].

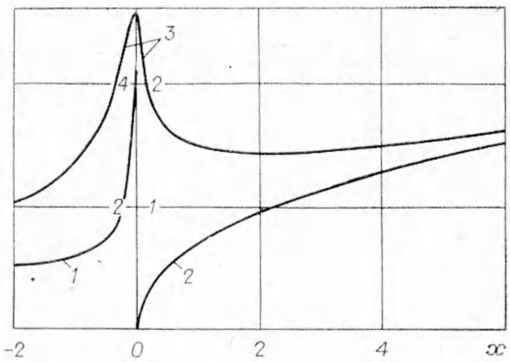
3. Краевая задача (2.2)—(2.6) решалась численно в традиционных переменных функции тока и завихренности. Подробно метод решения подобных задач изложен в [7].

При обтекании плоской пластины в краевой задаче нет характерной длины, и тогда можно выбрать $a_1 = (\mu_w/A\rho_w)^{1/2}$, при этом местное число Рейнольдса Re = 1. В этом случае течение всюду безотрывное, ускорение потока в следе за пластиной вызывает значительное смещение линий тока к линии симметрии (фиг. 1). Напряжение трения τ резко увеличивается по мере приближения к задней кромке пластины и качественно согласуется с представленной в [8] зависимостью: $\tau \sim x^{-2}$ при $x \to 0$ (кривая *1* на фиг. 2, левая шкала оси ординат). Продольная скорость u на линии симметрии (кривая *2* на фиг. 2, правая шкала оси ординат) при $x \leqslant 0{,}5$ хорошо согласуется с представленной в [8] зависимостью: $u \sim x^{1/2}$ при $x \to 0$, а при $x \geqslant 10$ — с асимптотическим законом изменения (1.1).

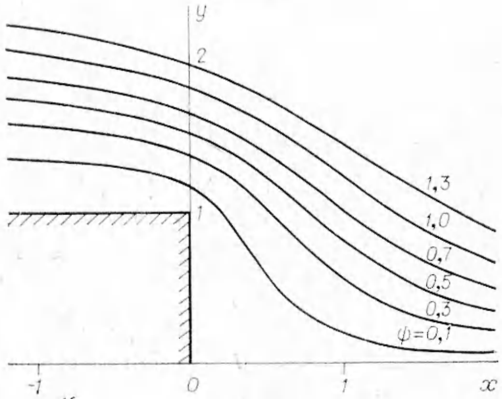
В исследуемом течении поток ускоряется за счет действия сил вязкости в слое смешения за пластиной. Вблизи поверхности пластины скорости малы и течение здесь описывается уравнениями Стокса, т. е. вязкие силы должны уравновешиваться силами давления. Поэтому возрастание величины τ



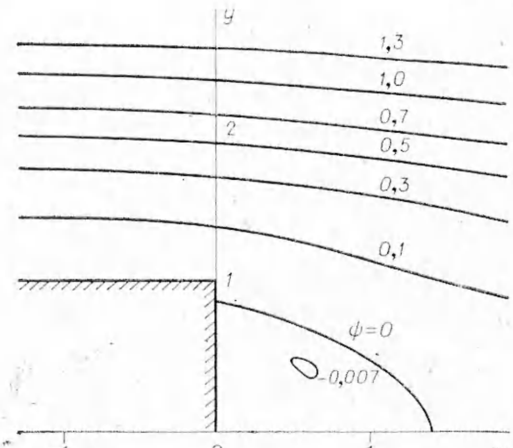
Фиг. 1



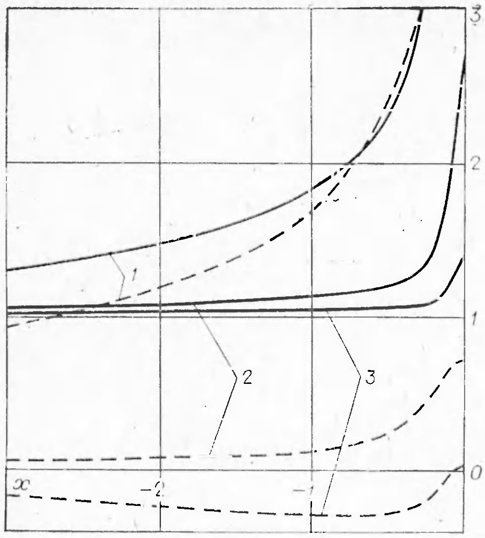
Фиг. 2



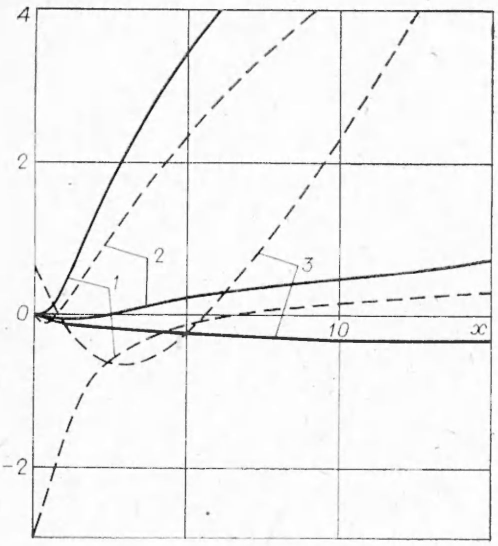
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

по мере приближения к задней кромке пластины сопровождается ростом возмущения давления p (кривая 3 на фиг. 2, левая шкала оси ординат). Однако сразу за задней кромкой пластины, где скорости все еще малы, в силу краевого условия (2.4) силы вязкости резко уменьшаются, что приводит к соответствующему падению давления при $x \geqslant 0$. На некотором удалении от задней кромки пластины течение в слое смешения будет описываться уже уравнениями пограничного слоя для «компенсационного» режима течения [5]. При этом ускорение течения в слое смешения, смещение линий тока к линии симметрии вызовут торможение внешней дозвуковой части пограничного слоя и соответствующее возрастание давления, которое при $x \geqslant 10$ хорошо согласуется с асимптотическим законом изменения (1.1).

Выполненные расчеты позволяют определить изменение сопротивления одной стороны плоской пластины за счет изменения напряжения трения τ в особой области протяженностью $x \sim O(\varepsilon^{3/2})$, которое характеризуется величиной $\tau_1 = \int\limits_{-\infty}^{0} (\tau - 1)\, dx \approx 1{,}031$.

Распределение теплового потока q по поверхности пластины очень мало отличается от распределения напряжения трения τ, и поэтому на фиг. 2 оно не приводится. Величина $q_1 = \int\limits_{-\infty}^{0} (q - 1)\, dx \approx 1{,}066$ характеризует изменение нагрева одной стороны пластины в окрестности ее задней кромки. Возмущение энтальпии h в следе за пластиной на линии симметрии изменяется практически так же, как u, и поэтому на фиг. 2 тоже не приводится.

Краевая задача (2.2)—(2.6) описывает также обтекание задней кромки пластины с характерной толщиной $a \sim O(\varepsilon^{3/2})$, так как при этом решение для «компенсационного» режима течения в области с характерными размерами $\varepsilon^{3/2} < x < \varepsilon^{3/4}$, $y \sim \varepsilon x^{1/3}$ в первом приближении при $\varepsilon \to 0$ остается без изменения. В этом случае в качестве характерной длины выбирается половина толщины пластины ($a_1 = \varepsilon^{3/2} a/2$, $a_1 \sim O(1)$). При проведении расчетов использовалась прежняя численная схема, местное число Рейнольдса изменялось в широком диапазоне (Re = 0—100).

На фиг. 3, 4 показано распределение линий тока в поле течения при Re = 0 и 3. Решение при Re = 0 соответствует стоксовскому пределу, течение в этом случае безотрывное. При Re > 0 образуется срывная зона, протяженность которой L увеличивается практически пропорционально значению местного числа Рейнольдса: $L \approx 0{,}42$ Re (см. таблицу). Поперечный размер срывной зоны изменяется незначительно и практически при всех Re срывная зона начинается чуть ниже верхнего края среза пластины (например, $y = 0{,}88$ для Re $= 3$ и $y = 0{,}96$ для Re $= 100$).

Re	3	10	30	40	50
L	1,4	4,2	12,2	16,1	20
τ_1	0,799	0,557	0,451	0,408	0,355
q_1	0,465	0,287	0,207	0,180	0,165
q_2	0,968	0,781	0,655	0,650	0,650
p_2	−0,447	0,102	0,386	0,442	0,472

Распределения напряжения трения τ (сплошные линии) и возмущения давления Rep (штриховые линии) по поверхности пластины для значений местного числа Рейнольдса Re $= 0$; 3 и 100 (кривые *1—3*) представлены на фиг. 5. Видно, что с ростом Re возмущения величин τ и p уменьшаются, так как при этом из-за увеличения протяженности срывной зоны обтекается все более пологий обратный уступ. Этим же обстоятельством объясняется локализация возмущения течения около края среза пластины при увеличении Re.

На фиг. 6 показано изменение продольной скорости u (сплошные линии) и возмущения давления Rep (штриховые линии) вдоль линии симметрии для тех же значений Re, что и на фиг. 5. Хорошо видно, как с ростом Re увеличивается протяженность зоны возвратных токов. Однако ограниченность размеров расчетной области не позволяет проследить изменение функций течения вплоть до их выхода на асимптотические соотношения (1.1).

В таблице приведены так же значения величин τ_1, q_1, $q_2 = \int\limits_0^1 q\,dy$ (характеризует нагрев торца пластины) и $p_2 = \mathrm{Re}\int\limits_0^1 p\,dy$ (характеризует сопротивление давления торца пластины) при различных значениях Re. Из этих результатов следует, что сопротивление давления пластины с толщиной $p_2 = 0$ при Re $\approx 7{,}5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Stewartson K.** On the flow near the trailing edge of a flat plate. II.— Mathematika, 1969, v. 16.
2. **Messiter A. F.** Boundary layer flow near the trailing edge of a flat plate.— S. I. A. M. J. Appl. Math., 1970, v. 18.
3. **Daniels P. G.** Numerical and asymptotic solutions for the supersonic flow near the trailing edge of a flat plate.— Quart. J. Mech. Appl. Math., 1974, v. 27, pt 2, N 5.
4. **Goldstein S.** Concerning some solutions of boundary layer equations in hydrodynamics.— Proc. Cambridge Phil. Soc., 1930, v. 26, N 1.
5. **Боголепов В. В., Нейланд В. Я.** Исследование локальных возмущений вязких сверхзвуковых течений.— В кн.: Аэромеханика. М.: Наука, 1976.
6. **Stewartson K.** On the flow near the trailing edge of a flat plate.— Proc. Roy. Soc., 1968, v. A 306.
7. **Боголепов В. В.** Расчет обтекания обращенного навстречу потоку малого уступа.— ПМТФ, 1983, № 2.
8. **Stewartson K.** Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies. — Adv. Appl. Mech., 1974, v. 14.

Поступила 3/IV 1984 г.