

ного поворота архимедовы силы срывают равновесие, возникает поток от середины подогреваемой грани, что сложным образом возмущает жидкость в полости. Через несколько секунд сложные течения сменяются ламинарным, принимающим через несколько минут стационарный характер. При переходе 3 реализуется первое течение, переходе 7 — второе или первое. При этом из-за подъема горячей и опускания холодной жидкостей верхняя холодная грань полости нагревается, нижняя горячая — охлаждается, а потенциальная энергия жидкости в поле силы тяжести уменьшается. Уменьшение разности температур  $\Delta T_2$  между гранями полости вызывает увеличение разностей температур  $\Delta T_1$  и  $\Delta T_3$  между гранями прикрывающих полость пластин. Незначительное уменьшение их суммарной разности вызывается некоторым уменьшением полного теплового сопротивления блока из-за конвекции в полости. Рост потока тепла через пластины и полость происходит, таким образом, при уменьшении переноса тепла чистой теплопроводностью жидкости. Отсюда следует, что при заданной разности температур между гранями массива изменение переноса тепла возмущенным движением жидкости больше по абсолютной величине, но противоположно по знаку изменению переноса тепла ее теплопроводностью (линии 1—9).

Автор благодарит Г. Ф. Шайдунова за руководство работой.

Поступила 23 VIII 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л а н д а у Л. Д. К проблеме турбулентности. Докл. АН СССР, 1944, т. 44, № 8, стр. 339—342.
2. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1953, § 26—27, стр. 127—134.
3. С о р о к и н В. С. О стационарных движениях жидкости, подогреваемой снизу. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2, стр. 197—204.
4. D o n n e l l y R. J. Experimental confirmation of the Landau law in Couette flow. Phys. Rev. Letters, 1963, vol. 10, No. 7, p. 282—284.
5. М о н и н А. С., Я г л о м А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1. 1965, Изд-во «Наука», стр. 136—161.

#### ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ СФЕРИЧЕСКОГО ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА В ЖИДКОСТИ

*В. Е. Кедринский (Новосибирск)*

Для большинства задач, связанных с динамикой жидкости, содержащей пузырьки газа, существенное значение имеет характер пульсации отдельных пузырьков. Дополнительное поле давления, определяемое этими пульсациями, во многих случаях оказывает решающее действие на общее состояние пузырьковой среды. Ниже остановимся на некоторых особенностях пульсации сферического газового пузырька в сжимаемой и несжимаемой жидкостях.

1. В несжимаемой жидкости движение стенки сферического пузырька без учета вязкости определяется уравнением

$$RR'' + \frac{3}{2}R'^2 = (P(R) - P(t)) / \rho \quad (1.1)$$

Здесь  $P(R)$  — давление внутри пузырька,  $P(t)$  — приложенное давление,  $\rho$  — плотность жидкости,  $R$  — радиус пузырька; точка означает полную производную по времени. При  $P(t) = \text{const}$  и при условии адиабатичности сжатия пузырька из уравнения (1.1) легко получить

$$(R_0/R_*)^{3\gamma-3} = 1 + A(\gamma - 1) \quad (A = P/P_0) \quad (1.2)$$

(где  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $R_*$  — минимальный радиус полости,  $R_0$  — начальный радиус,  $P_0$  — начальное давление в пузырьке), а также определить время сжатия полости

$$t = 0.915R_0 \sqrt{\rho/P} \quad (1.3)$$

Но обычно приходится иметь дело с давлением, существенно зависящим от времени. В этом случае непосредственно из (1.1) не удастся определить ни времени, ни степени сжатия пузырька.

В работе [1] приводятся результаты численного решения уравнения (1.1) в безразмерной форме

$$\nu \frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 = \mu \left( \frac{1}{y^{3\gamma}} - Ae^{-z} \right) \quad \left( y = \frac{R}{R_0}, z = \frac{t}{\tau}, \mu = \left( \frac{\tau}{R_0 \sqrt{\rho/P_0}} \right)^2 \right)$$

Здесь  $\mu$  — безразмерный параметр, определяющий отношение постоянной времени спада давления к характерному времени сжатия пузырька постоянным давлением  $P_0$ . Расчет приведен для случая волн экспоненциального профиля с  $A = 10, 100, 1000$  при изменении  $\mu$  от 0.01 до 1000. Анализ показал, что пульсация пузырька под действием давления с различными  $\tau$  подчиняется определенной закономерности

$$(t_2^* / \tau_2) = (1.2 - k \sqrt{\mu_2 / \mu_1})^k (\mu_1 / \mu_2)^{1/2} (t_1^* / \tau_1) \quad (1.4)$$

Здесь  $t_2^*$  — искомое время сжатия пузырька для волн с  $\tau_2$  при известном  $t_1^*$  для волны той же амплитуды, но с  $\tau_1$  (давление во фронте волны входит в последнее уравнение через  $t_1^*$ ). Показатель  $k$  определяется из условия

$$10^k = \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^{1/2} \quad (1.5)$$

Как видно из (1.4), связь между временами сжатия пузырька волнами давления с различными  $\tau$  с точностью до постоянного коэффициента определяется корнем квадратным из отношения безразмерных параметров  $\mu$ , характерных для этих волн. Выражение (1.4) дает возможность, например, зная время сжатия пузырька волной с постоянным давлением за фронтом, определить время сжатия этого пузырька волной с той же амплитудой, но с очень маленьким  $\tau$ , причем  $\mu_1$  выбирается так, чтобы удовлетворилась зависимость (1.3).

Другой характеристикой пульсирующего пузырька будет минимальный радиус сжатия. Связь между минимальным радиусом, амплитудой давления и характеристикой постоянной волны давления можно, по аналогии с выражением (1.2), записать в виде

$$\left( \frac{R_0}{R_*} \right)^{3\gamma-3} = 1 + \frac{\mu A^2 (\gamma - 1)}{1 + \mu A} \quad (1.6)$$

Отсюда видно, что при  $\mu \rightarrow \infty$ , т. е. для волн с постоянным давлением за фронтом, это выражение переходит в (1.2).

Проведенные по уравнениям (1.4) и (1.6) расчеты для различных  $A$  и  $\mu$  ( $R_0 = 1$  см) сведены в табл. 1 и 2, где они сравниваются с данными работы [1] (в таблицах результаты машинного счета имеют индекс 1, а результаты расчета по зависимостям (1.4) и (1.6) — индекс 2). Полученные зависимости (1.4) и (1.6) вполне пригодны для при-

Таблица 1

A	$\mu$	$\gamma$	$\tau$ , сек	$(R^*/R_0)_1$	$(R^*/R_0)_2$
10	$\infty$ (10)	1.4	0.00316	0.262	0.262
10	1	1.4	0.001	0.307	0.280
10	0.1	1.4	0.000316	0.404	0.400
10	0.01	1.4	0.0001	0.738	0.772
100	$\infty$ (10)	1.4	0.00316	0.046	0.046
100	1	1.4	0.001	0.048	0.0457
100	0.1	1.4	0.000316	0.053	0.0490
100	0.01	1.4	0.0001	0.074	0.0793
10	$\infty$ (10)	1.33	0.00316	0.247	0.235
10	1	1.33	0.001	0.277	0.250
10	0.1	1.33	0.000316	—	0.377
10	0.01	1.33	0.001	0.732	0.768
100	$\infty$ (10)	1.33	0.00316	0.030	0.0294
100	1	1.33	0.001	0.031	0.0306
100	0.1	1.33	0.000316	0.035	0.0323
100	0.01	1.33	0.0001	0.052	0.0570
1000	$\infty$ (1)	1.33	0.001	0.00304	0.00302
1000	0.1	1.33	0.000316	0.00317	0.00302
1000	0.01	1.33	0.0000	0.00358	0.00333
10	$\infty$ (10)	1.67	0.00316	0.382	0.361
10	1	1.67	0.001	0.413	0.376
10	0.1	1.67	0.000316	0.498	0.48
10	0.01	1.67	0.0001	0.764	0.78
100	$\infty$ (10)	1.67	0.00316	0.123	0.121
100	1	1.67	0.001	0.126	0.122
100	0.1	1.67	0.000316	0.136	0.127
100	0.01	1.67	0.0001	0.167	0.170
1000	$\infty$ (1)	1.67	0.001	0.0386	0.0387
1000	0.1	1.67	0.000316	0.040	0.0390

ближенных оценок основных характеристик пульсации пузырька в несжимаемой жидкости под действием давления, сильно меняющегося во времени.

2. Ограничение в вопросах пульсации пузырька рамками несжимаемой жидкости приводит к значительным отклонениям действительных характеристик пульсации от расчетных, если рассматриваются случаи, в которых стенки полости достигают скоростей порядка скорости звука. Последнее имеет место, например, в вопросах кавитации и сопровождающих ее явлениях. Теория захлопывания пустых пузырьков в своей первой же постановке привела к выводу о необходимости учета сжимаемости ввиду огромных значений скоростей и давлений, получаемых в результате захлопывания. Аналогичное наблюдается и при сжатии газонаполненной полости под действием больших давлений. Рассмотрим сферически симметричную задачу пульсации газового пузырька в сжимаемой невязкой жидкости. Скорость частицы  $U^{(1)}$  заменим градиентом потенциала скорости  $\varphi$ , и систему уравнений запишем как

$$\frac{\partial}{\partial t} (-\nabla\varphi) + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\frac{\nabla P}{\rho}, \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (2.1)$$

Здесь  $P$  — давление,  $\rho$  — плотность жидкости. Интегрирование (2.1) дает

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} = -\int_{P_\infty}^P \frac{dP}{\rho} = -h \quad (2.2)$$

если  $h$  — разность энтальпий между точкой  $r$  и бесконечностью. Предполагается, что  $P_\infty$  на бесконечности постоянно, скорость и потенциал скорости на бесконечности исчезают,  $\rho$  — функция только давления. При использовании

$$\varphi = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (2.3)$$

уравнение (2.3) переписывается так:

$$r(h + \frac{1}{2}U^2) = f'(t - r/c) \quad (2.4)$$

Таблица 2

A	$\mu$	$\gamma$	$\tau$ , сек	$t_1^*/\tau_1$	$t_2^*/\tau_2$
10	1000	1.4	0.0316	0.01	0.01
10	100	1.4	0.0100	0.0325	0.0323
10	10	1.4	0.00316	0.105	0.110
10	1	1.4	0.001	0.35	0.37
10	0.1	1.4	0.000316	1.27	1.38
10	0.01	1.4	0.0001	5.11	5.00
100	10	1.4	0.00316	0.0294	0.0294
100	1	1.4	0.001	0.0939	0.0950
100	0.1	1.4	0.000316	0.308	0.323
100	0.01	1.4	0.0001	1.096	1.130
10	100	1.33	0.01	0.0325	0.0323
10	10	1.33	0.00316	0.105	0.110
10	1	1.33	0.001	0.350	0.373
10	0.01	1.33	0.0001	5.11	5.00
100	10	1.33	0.00316	0.0294	0.0294
100	1	1.33	0.001	0.0939	0.0950
100	0.1	1.33	0.000316	0.307	0.323
100	0.01	1.33	0.0001	1.094	1.130
1000	1	1.33	0.001	0.029	0.029
1000	0.1	1.33	0.000316	0.093	0.094
1000	0.01	1.33	0.0001	0.304	0.319
10	10	1.67	0.00316	0.105	0.110
10	1	1.67	0.001	0.35	0.373
10	0.1	1.67	0.000316	1.19	1.380
10	0.01	1.67	0.0001	5.11	5.00
100	10	1.67	0.00316	0.0295	0.0295
100	1	1.67	0.001	0.0944	0.095
100	0.1	1.67	0.000316	0.309	0.323
100	0.01	1.67	0.0001	1.100	1.130
1000	1	1.67	0.001	0.029	0.029
1000	0.1	1.67	0.000316	0.093	0.094

Уравнения (2.4) и (2.5) показывают, что  $r\varphi$  и  $r(h + \frac{1}{2}U^2)$  в акустическом приближении распространяются со скоростью  $C$  (местная скорость звука). На основании того, что скорости жидкости могут достигать значений порядка скорости звука, Кирквудом [2] было сделано предположение о распространении  $r(h + \frac{1}{2}U^2)$  со скоростью  $C + U$ . На основании сделанных предположений запишем [3, 4]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ r \left( h + \frac{U^2}{2} \right) \right] = - (C + U) \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( h + \frac{U^2}{2} \right) \right] \quad (2.5)$$

Раскрывая уравнение (2.5) при использовании

$$\frac{dU}{dt} = - \frac{\partial h}{\partial r}, \quad \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2U}{r} = - \frac{1}{C^2} \frac{dh}{dt} \quad \left( \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (2.6)$$

получаем закон движения стенки газового пузырька

$$RR'' \left( 1 - \frac{R'}{C} \right) + \frac{3}{2} R'^2 \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{R'}{C} \right) = \ddot{R} \left( 1 + \frac{R'}{C} \right) + \frac{RH'}{C} \left( 1 - \frac{R'}{C} \right) \quad (2.7)$$

Однако необходимо выяснить, в какой мере полученное уравнение (2.7) отвечает точным уравнениям течения (2.1). Очевидно, что для наиболее полного определения возможностей предположения Кирквуда необходимо рассмотреть случай сжатия пустой полости, который позволит исследовать поведение полученной зависимости в широком диапазоне скоростей стенки полости (от 0 до  $\infty$ ).

Численное интегрирование уравнений (2.1), проведенное Хантером [5] для сферически симметричной пустой полости в воде, обнаружило большие скорости течения вблизи точки схлопывания. Найдено, что при этом радиус полости оказывается пропорциональным  $(-t)^n$  ( $t = 0$  — момент схлопывания). Течение в окрестности точки схлопывания описывается автомодельным решением, из которого определяется величина  $n$ . В работах [5, 6]  $n$  найдено равным 0.5552. Записав уравнение (2.7) для случая пустой полости (т. е. полагая  $C = \text{const}$  и  $H = \text{const}$ ), получим

$$RR'' \left( 1 - \frac{R'}{C} \right) + \frac{3}{2} R'^2 \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{R'}{C} \right) = \ddot{R} \left( 1 + \frac{R'}{C} \right) \quad (2.8)$$

Отсюда

$$\left( \frac{R_0}{R} \right)^3 = \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{R'}{C} \right)^4 \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{C^2}{H} \left( \frac{R'}{C} \right)^2 \right] \quad (2.9)$$

Подставляя в уравнение (2.9) решение Хантера [5] в виде  $R \sim At^n$ , легко получить для  $t \rightarrow 0$  значение  $n$ . Оно оказывается равным 0,666. А для случая несжимаемой жидкости  $n = 0,4$ , т. е. в окрестности точки схлопывания поведение стенки полости по Кирквуду настолько же далеко от результата Хантера, как и в несжимаемом случае. Повторение приведенных выше рассуждений для акустического случая приводит к

$$RR'' \left( 1 + \frac{2R'}{C} \right) + \frac{3}{2} R'^2 \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{R'}{C} \right) = H + \frac{RH'}{C} \left( 1 - \frac{R'}{C} + \frac{R'^2}{C^2} \right) \quad (2.10)$$

которое в случае пустой полости дает значение  $n = 0,5$ , т. е. точное решение лежит между акустикой и расчетом по Кирквуду. Следует отметить, что уравнение (2.10) — не что иное, как уравнение Геринга [2], хотя последнее было получено другим способом, чем описанный выше. Из полученных значений  $n$  можно заключить, что скорость распространения величины  $r(h + U^2/2)$  лежит между  $C$  и  $C + U$ . Предположим, что распространение происходит со скоростью  $C + \alpha U$ , где  $\alpha = \text{const}$ . В этом случае имеем

$$\left( \frac{R_0}{R} \right)^3 = \left[ 1 + \frac{3}{2} \frac{C^2}{H} \left( \frac{R'}{C} \right)^2 \right] \left[ 1 + \left( \alpha - \frac{4}{3} \right) \frac{R'}{C} \right]^{4/3 / (\alpha - 4/3)} \quad (2.11)$$

Подставляя сюда  $R = At^{0.555}$ , легко получить значение  $\alpha$  в окрестности точки схлопывания (при бесконечной скорости стенки), оно оказывается равным 0.57. Анализ поведения уравнения (2.11) при различных  $R/C$  показал, что в некотором приближении (в каждый момент находилось  $\alpha$ , соответствующее кривой Хантера)  $\alpha$  будет монотонно убывающей функцией  $R/C$ , которая изменяет свои значения от 1 до 0.57 при  $R \rightarrow 0$ . Однако это не исключает возможности приближенного описания процесса схлопывания с использованием некоторого постоянного значения  $\alpha$ . Необходимо отметить, что уравнение (2.11) довольно удобно, так как при различных  $\alpha$  оно может переходить в уравнение Кирквуда ( $\alpha = 1$ ), в уравнение с акустическим приближением ( $\alpha = 0$ ) или любое промежуточное.

Таблица 3

$-R'/C$	$(R/R_0)_1$	$(R/R_0)_2$	$(R/R_0)_3$	$(R/R_0)_4$	$(R/R_0)_5$
1.46	$1.48 \cdot 10^{-2}$	$1.41 \cdot 10^{-2}$	$1.68 \cdot 10^{-3}$	$1.54 \cdot 10^{-2}$	$2.40 \cdot 10^{-2}$
2.05	$1.00 \cdot 10^{-2}$	$9.56 \cdot 10^{-3}$	$1.24 \cdot 10^{-2}$	$1.10 \cdot 10^{-2}$	$1.92 \cdot 10^{-2}$
2.50	$7.84 \cdot 10^{-3}$	$7.48 \cdot 10^{-3}$	$1.03 \cdot 10^{-2}$	$8.92 \cdot 10^{-3}$	$1.68 \cdot 10^{-2}$
2.93	$6.42 \cdot 10^{-3}$	$6.08 \cdot 10^{-3}$	$8.90 \cdot 10^{-3}$	$7.55 \cdot 10^{-3}$	$1.51 \cdot 10^{-2}$
3.56	$5.00 \cdot 10^{-3}$	$4.66 \cdot 10^{-3}$	$7.40 \cdot 10^{-3}$	$6.10 \cdot 10^{-3}$	$1.33 \cdot 10^{-2}$
4.00	$4.27 \cdot 10^{-3}$	$3.97 \cdot 10^{-3}$	$6.62 \cdot 10^{-3}$	$5.37 \cdot 10^{-3}$	$1.23 \cdot 10^{-2}$
4.62	$3.56 \cdot 10^{-3}$	$3.22 \cdot 10^{-3}$	$5.80 \cdot 10^{-3}$	$4.56 \cdot 10^{-3}$	$1.12 \cdot 10^{-2}$
5.50	$2.85 \cdot 10^{-3}$	$2.49 \cdot 10^{-3}$	$4.90 \cdot 10^{-3}$	$3.73 \cdot 10^{-3}$	$1.00 \cdot 10^{-2}$
6.88	$2.14 \cdot 10^{-3}$	$1.75 \cdot 10^{-3}$	$3.94 \cdot 10^{-3}$	$2.87 \cdot 10^{-3}$	$8.55 \cdot 10^{-3}$
9.50	$1.43 \cdot 10^{-3}$	$1.03 \cdot 10^{-3}$	$2.96 \cdot 10^{-3}$	$1.96 \cdot 10^{-3}$	$6.90 \cdot 10^{-3}$
11.30	$1.14 \cdot 10^{-3}$	$7.66 \cdot 10^{-4}$	$2.44 \cdot 10^{-3}$	$1.59 \cdot 10^{-3}$	$6.13 \cdot 10^{-3}$
19.50	$5.70 \cdot 10^{-4}$	$2.91 \cdot 10^{-4}$	$1.43 \cdot 10^{-3}$	$8.20 \cdot 10^{-4}$	$4.26 \cdot 10^{-3}$
50.00	$1.72 \cdot 10^{-4}$	$4.90 \cdot 10^{-5}$	$5.62 \cdot 10^{-4}$	$2.56 \cdot 10^{-4}$	$2.28 \cdot 10^{-3}$
80.00	$9.42 \cdot 10^{-5}$	$2.10 \cdot 10^{-5}$	$3.51 \cdot 10^{-4}$	$1.41 \cdot 10^{-4}$	$1.67 \cdot 10^{-3}$
100.00	$7.16 \cdot 10^{-5}$	$1.34 \cdot 10^{-5}$	$2.81 \cdot 10^{-4}$	$1.07 \cdot 10^{-4}$	$1.44 \cdot 10^{-3}$
200.00	$2.97 \cdot 10^{-5}$	$3.33 \cdot 10^{-6}$	$1.41 \cdot 10^{-4}$	$4.38 \cdot 10^{-5}$	$9.08 \cdot 10^{-4}$
300.00	$1.78 \cdot 10^{-5}$	$1.49 \cdot 10^{-6}$	$9.40 \cdot 10^{-5}$	$2.62 \cdot 10^{-5}$	$6.92 \cdot 10^{-4}$
400.00	$1.24 \cdot 10^{-5}$	$8.40 \cdot 10^{-7}$	$7.02 \cdot 10^{-5}$	$1.82 \cdot 10^{-5}$	$5.70 \cdot 10^{-4}$
500.00	$9.27 \cdot 10^{-6}$	$5.33 \cdot 10^{-7}$	$5.60 \cdot 10^{-5}$	$1.36 \cdot 10^{-5}$	$4.90 \cdot 10^{-4}$
600.00	$7.37 \cdot 10^{-6}$	$3.72 \cdot 10^{-7}$	$4.70 \cdot 10^{-5}$	$1.07 \cdot 10^{-5}$	$4.35 \cdot 10^{-4}$
700.00	$6.06 \cdot 10^{-6}$	$2.72 \cdot 10^{-7}$	$4.01 \cdot 10^{-5}$	$8.93 \cdot 10^{-6}$	$3.94 \cdot 10^{-4}$
800.00	$5.11 \cdot 10^{-6}$	$2.09 \cdot 10^{-7}$	$3.52 \cdot 10^{-5}$	$7.50 \cdot 10^{-6}$	$3.58 \cdot 10^{-4}$
900.00	$4.38 \cdot 10^{-6}$	$1.65 \cdot 10^{-7}$	$3.13 \cdot 10^{-5}$	$6.47 \cdot 10^{-6}$	$3.33 \cdot 10^{-4}$
1000.0	$3.85 \cdot 10^{-6}$	$1.34 \cdot 10^{-7}$	$2.82 \cdot 10^{-5}$	$5.65 \cdot 10^{-6}$	$3.10 \cdot 10^{-4}$
10000.0	$2.07 \cdot 10^{-7}$	$1.34 \cdot 10^{-9}$	$2.82 \cdot 10^{-6}$	$3.00 \cdot 10^{-7}$	$6.60 \cdot 10^{-5}$
100000.0	$1.11 \cdot 10^{-8}$	$1.34 \cdot 10^{-11}$	$2.82 \cdot 10^{-7}$	$1.62 \cdot 10^{-8}$	$1.44 \cdot 10^{-5}$

В табл. 3 приведены следующие данные:

- (1) численного интегрирования уравнений течения — Хантер;  
 (2) расчета с предположением Кирквуда по уравнению

$$\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 = \left[1 + \frac{3}{2} \frac{C^2}{-H} \left(\frac{R'}{C}\right)^2\right] \left[1 - \frac{1}{3} \frac{R'}{C}\right]^4 \quad (2.12)$$

- (3) расчета акустического варианта

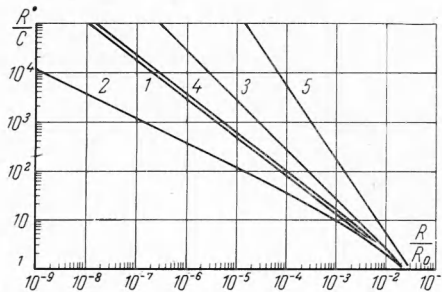
$$\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 = \left[1 + \frac{3}{2} \frac{C^2}{-H} \left(\frac{R'}{C}\right)^2\right] \left[1 - \frac{4}{3} \frac{R'}{C}\right] \quad (2.13)$$

- (4) расчета в предположении о распространении со скоростью  $C + 0.6 U$

$$\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 = \left[1 + \frac{3}{2} \frac{C^2}{-H} \left(\frac{R'}{C}\right)^2\right] \left[1 - 0.73 \frac{R'}{C}\right]^{1.32} \quad (2.14)$$

- (5) расчета для несжимаемой жидкости

$$\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 = \left[1 + \frac{3}{2} \frac{C^2}{-H} \left(\frac{R'}{C}\right)^2\right] \quad (2.15)$$



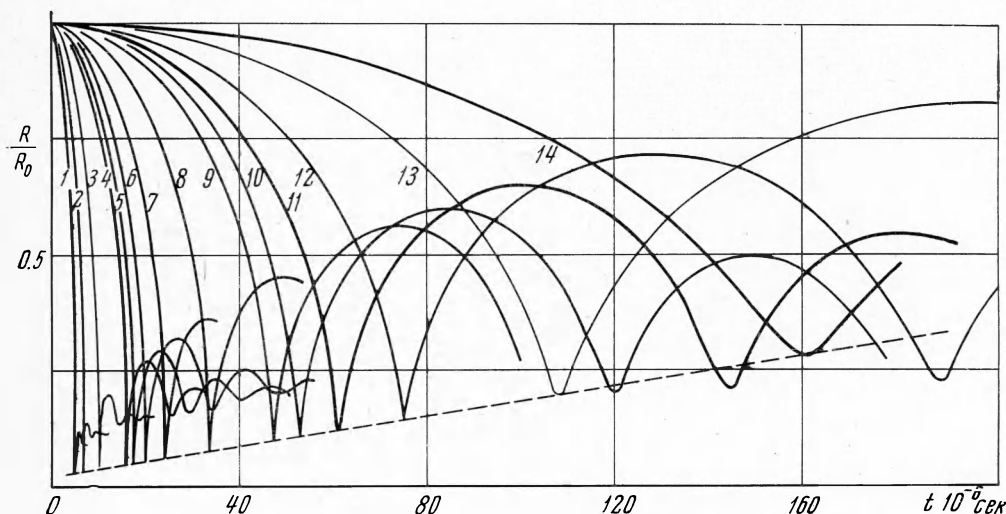
Фиг. 1

го коэффициента  $\alpha$  позволяет провести некоторые оценки в поведении величины  $C + U$  по мере роста скорости стенки пузырька.

С учетом полученного результата был произведен расчет пульсации сферического пузырька диаметром 1 см под действием внезапно приложенного постоянного давления, амплитуда которого менялась в диапазоне от 10 до 18000 атм. Рассматривался воздушный пузырек с начальным давлением 1 атм. Расчет производился на ЭВМ по уравнению (2.7). Уравнение состояния воды считалось по [2]. Результаты расчета приведены на фиг. 2. Номера соответствуют амплитудам давлений в атм. — 18000, 9000, 3000, 1000, 800, 600, 400, 200, 100, 80, 60, 40, 20, 10. Пунктирная прямая соединяет все первые минимумы пульсаций. Из графика легко можно найти, что  $R^*/R_0$  прямо пропорционально времени сжатия полости

$$R^*/R_0 = At_{i_*} + 0.025 \quad (2.16)$$

Время сжатия  $t_{i_*}$  довольно точно определяется выражением (1.3), а  $A = 5/3 \cdot 10^3 \text{ сек}^{-1}$  легко находится из графика.



Фиг. 2

Были проведены некоторые эксперименты на гидродинамической ударной трубе по определению пульсаций пузырьков воздуха при давлениях в несколько сот атмосфер со слабо меняющимся давлением за фронтом. Методика проведения эксперимента и описание установки приведены в работе [8], там же приведена характерная развертка пульсации пузырька во времени. Данные по степени и времени сжатия соответствуют расчетным.

В заключение автор благодарит Л. Трохан за существенную помощь при расчетах на ЭВМ.

Поступила 12 IX 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Солоухин Р. И. О пульсациях пузырьков газа в несжимаемой жидкости Уч. совет по народнохоз. использованию взрыва, 18, Новосибирск, 1961.
2. Коул Р. Подводные взрывы. Изд. Иностран. лит., 1950.
3. Gilmore F. The growth or collapse of a spherical bubble in a viscous compressible fluid. Hydrodynamic Labor., California Institute, Rep., 1952, No. 24—4 (April 1).
4. Меллен Р. Экспериментальное изучение захлопывания сферической полости в воде Сб. «Проблемы современной физики», 1957.
5. Хантер К. О захлопывании пустой полости в воде. Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., 1961, № 3.
6. Брушлинский К. В., Каждан Я. М. Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики. Успехи матем. наук, 1963, т. 18, № 2.
7. Hickling R., Plesset M. Collapse and Rebound of a Spherical Bubble in Water. J. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No 1.
8. Воротникова М. И., Кедринский В. К., Солоухин Р. И. Ударная трубка для исследования одномерных волн в жидкости. Научно-техн. пробл. горения и взрыва, 1965, № 1.