УДК 532.59+519.63

УРАВНЕНИЯ ПОЛНОЙ НЕЛИНЕЙНО-ДИСПЕРСИОННОЙ МОДЕЛИ МЕЛКОЙ ВОДЫ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СФЕРЕ

З. И. Федотова, Г. С. Хакимзянов

Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mails: zf@ict.nsc.ru, khak@ict.nsc.ru

Получены нелинейно-дисперсионные уравнения мелкой воды, описывающие распространение длинных поверхностных волн на сферической поверхности с учетом вращения Земли и подвижности дна океана. Вывод уравнений основан на разложении решения уравнений гидродинамики для сферы по малым параметрам, зависящим от относительной толщины слоя воды и дисперсии поверхностных волн.

Ключевые слова: поверхностные волны, течения идеальной несжимаемой жидкости, свободная граница, нелинейно-дисперсионные уравнения, уравнения мелкой воды на сфере.

Введение. Для численного моделирования трансокеанских волновых процессов обычно применяются приближенные гидродинамические модели, полученные при условии, что толщина слоя воды, находящегося на поверхности планеты, мала по сравнению с ее радиусом. Как правило, используются модели с гидростатической аппроксимацией давления, в которых не учитывается частотная дисперсия.

Описание бездисперсионных моделей мелкой воды на вращающейся сфере для задач метеорологии, климатологии и гидродинамики длинных поверхностных волн приведено в ряде отечественных и зарубежных монографий (см., например, [1–5]). Однако следует отметить, что подробный вывод этих уравнений выполнен недавно в работах [6, 7]. В отличие от более ранних работ в [6, 7] обсуждаются условия применимости моделей и проведено аналитическое исследование ряда частных случаев.

В настоящее время при изучении катастрофических волновых процессов в океане используются более полные модели, что обусловлено наличием новых данных, полученных в ходе численного моделирования крупнейших за последние 20 лет цунами. Установлено, что для получения приемлемого описания распространения волн на поверхности океана в течение продолжительного времени требуются модели, учитывающие дисперсию и описывающие эффекты, обусловленные сферичностью и вращением Земли (см., например, [8–10]). Это приводит к необходимости применять нелинейно-дисперсионные (НЛД) модели на вращающейся сфере. В работе [10] к уравнениям мелкой воды, записанным в сферических координатах, добавлены линейные дисперсионные члены для случая идеальной батиметрии (ровное дно). С учетом этих членов в [10] проведено моделирование цунами 2004 г. в Индийском океане, показавшее необходимость учета дисперсии и сферичности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 10-05-91052-НЦНИа, 09-05-00294а) и Совета по грантам Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (грант № НШ-6068.2010.9), а также в рамках Программы фундаментальных исследований СО РАН (проект IV.31.2.1).

Интерес авторов настоящей работы к данной теме обусловлен их непосредственным участием в исследовании проблем численного моделирования в задачах, связанных с катастрофическими волновыми процессами в океане [11]. В [12] разработан единообразный подход, с использованием которого получены известные НЛД-уравнения, описывающие поверхностные волны в декартовой системе координат с учетом подвижности донной поверхности. Это обеспечило возможность моделирования волн цунами, вызванных или сопровождающихся оползневыми процессами. Исследование было продолжено в работе [13], в которой формально построена НЛД-модель на вращающейся сфере.

В настоящей работе, являющейся продолжением исследований, выполненных в [12, 13], с использованием малых параметров и предварительного масштабирования полных уравнений получена оценка вклада нелинейности и дисперсии и предложен другой способ получения НЛД-модели на сфере. Важным результатом работы является то, что за счет специального выбора переменных полученные уравнения записываются в форме, аналогичной представлению НЛД-модели в локальных декартовых координатах на плоскости. Использование малых параметров при анализе полученных уравнений позволяет рассматривать в качестве частных случаев важные с практической точки зрения промежуточные модели типа модели Буссинеска.

Таким образом, разработанный подход обеспечивает иерархическую преемственность в классе НЛД-уравнений и соответствующих численных алгоритмов для описания волн на поверхности океана в зависимости от преобладающих масштабов моделируемого волнового процесса и геометрии области, в которой он происходит.

1. Постановка задачи для уравнений Эйлера. Уравнения Эйлера, описывающие течение жидкости в сферической системе координат с учетом вращения Земли, приведены в работе [1]. Однако для вывода НЛД-моделей целесообразно использовать уравнения, полученные в работе [13]. Вследствие важности этих уравнений ниже кратко повторяется их вывод.

Введем неподвижную декартову систему координат, чтобы ее ось Ox^3 совпадала с осью вращения Земли, координата x^3 указывала на Северный полюс, а координатная плоскость Ox^1x^2 совпадала с экваториальной плоскостью. Через R обозначим средний радиус Земли. Ньютоновская сила притяжения $\boldsymbol{g}$, действующая в точке $\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3)^{\mathrm{T}}$ на частицу жидкости единичной массы, считается направленной к центру Земли. Толщина слоя воды предполагается малой по сравнению с радиусом R, поэтому величина $g = |\boldsymbol{g}|$ и плотность воды ρ принимаются постоянными во всем слое: $\rho \equiv 1$. При этих условиях уравнения идеальной несжимаемой жидкости в декартовой системе координат записываются в виде

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\alpha} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial t} + \frac{\partial u_\beta u_\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial p}{\partial x^\beta} = -g\,\frac{x^\beta}{r}, \qquad \beta = 1, 2, 3, \tag{2}$$

где t — время; p — давление; $r = |\boldsymbol{x}|$ — расстояние от точки $\boldsymbol{x}$ до центра Земли; u_α $(\alpha = 1, 2, 3)$ — декартовы компоненты вектора скорости; по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Рассмотрим сферическую систему координат $O\lambda\theta r$, где λ — долгота, отсчитываемая от некоторого меридиана в восточном направлении $(0 \leqslant \lambda < 2\pi)$; $\theta = \pi/2 - \varphi$ — дополнительный к широте $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ угол. Предполагается, что Земля вращается с постоянной угловой скоростью Ω и вектор угловой скорости направлен к Северному полюсу. Сферические и декартовы координаты связаны следующими выражениями:

$$x^1 = r\cos(\lambda + \Omega t)\sin\theta, \qquad x^2 = r\sin(\lambda + \Omega t)\sin\theta, \qquad x^3 = r\cos\theta. \tag{3}$$

В новой системе координат уравнения (1), (2) записываются в виде

$$\frac{\partial J v^\alpha}{\partial q^\alpha} = 0; \tag{4}$$

$$\frac{\partial J u_\beta}{\partial t} + \frac{\partial J u_\beta v^\alpha}{\partial q^\alpha} + J\,\frac{\partial p}{\partial q^\alpha}\,\frac{\partial q^\alpha}{\partial x^\beta} = -gJ\,\frac{x^\beta}{r}, \qquad \beta = 1, 2, 3, \tag{5}$$

где $J = -r^2 \sin\theta$ — якобиан преобразования (3); v^α ($\alpha = 1, 2, 3$) — контравариантные компоненты скорости: $v^1 = \dot\lambda$, $v^2 = \dot\theta$, $v^3 = \dot r$; q^1, q^2, q^3 — новые обозначения для λ, θ, r соответственно.

Уравнение неразрывности записано в форме (4), удобной для вывода уравнений НЛД-моделей, а уравнения движения (5) с использованием уравнения неразрывности и связи между декартовыми и контравариантными компонентами скорости в результате преобразований приводятся к виду

$$\frac{\partial v_\gamma}{\partial t} + v^\alpha\,\frac{\partial v_\gamma}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial p}{\partial q^\gamma} = -g\delta^3_\gamma + r_\gamma, \qquad \gamma = 1, 2, 3, \tag{6}$$

где δ^3_γ — символы Кронекера; v_γ — ковариантные компоненты вектора скорости;

$$r_\gamma = \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{00}}{\partial q^\gamma} + v^1\,\frac{\partial g_{10}}{\partial q^\gamma} + \frac{1}{2}\,(v^1)^2\,\frac{\partial g_{11}}{\partial q^\gamma} + \frac{1}{2}\,(v^2)^2\,\frac{\partial g_{22}}{\partial q^\gamma}, \qquad \gamma = 1, 2, 3; \tag{7}$$

g_{00}, $g_{\alpha 0}$, $g_{\alpha\beta}$ ($\alpha = 1, 2, 3$; $\beta = 1, 2, 3$) — ковариантные компоненты метрического тензора преобразования (3), которые вычисляются по формулам [14]

$$g_{00} = 1 + \Omega^2 r^2 \sin^2\theta, \qquad g_{10} = \Omega r^2 \sin^2\theta, \qquad g_{20} = g_{30} = 0; \tag{8}$$

$$g_{11} = r^2 \sin^2\theta, \qquad g_{22} = r^2, \qquad g_{33} = 1, \qquad g_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha \ne \beta. \tag{9}$$

Так как компоненты (8), (9) не зависят от координаты λ, то $r_1 \equiv 0$. Заметим, что в выражении (7) слагаемое

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{00}}{\partial q^\gamma} = \begin{cases} 0, & \gamma = 1, \\ r^2\Omega^2 \sin\theta\cos\theta, & \gamma = 2, \\ r\Omega^2 \sin^2\theta, & \gamma = 3 \end{cases} \tag{10}$$

зависит от центробежной силы, возникающей вследствие вращения Земли. Наличие этой силы приводит к отклонению градиента давления в покоящейся жидкости от радиального направления.

Запишем уравнения движения (6), выделив радиальное направление:

$$\boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + w\boldsymbol{v}_r + \nabla p = \boldsymbol{r}; \tag{11}$$

$$w_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla w + w w_r + p_r = -g + r_3. \tag{12}$$

Здесь w — радиальная, или “вертикальная”, составляющая скорости v^3; $\boldsymbol{u} = (v^1, v^2)^{\mathrm{т}}$ — вектор “горизонтальной” составляющей скорости; $\nabla = (\partial/\partial\lambda; \partial/\partial\theta)$; $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2)^{\mathrm{т}}$;

$$r_1 = 0, \quad r_2 = \frac{(\Omega + v^1)^2}{2}\,\frac{\partial g_{11}}{\partial\theta}, \quad r_3 = \frac{(\Omega + v^1)^2}{2}\,\frac{\partial g_{11}}{\partial r} + \frac{(v^2)^2}{2}\,\frac{\partial g_{22}}{\partial r}; \tag{13}$$

$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)^{\mathrm{т}}$; ковариантные компоненты скорости v_γ ($\gamma = 1, 2, 3$) выражаются через контравариантные по известной формуле [14]

$$v_\gamma = g_{\gamma 0} + g_{\gamma\beta} v^\beta,$$

которая с учетом равенств (8), (9) приводит к следующим выражениям:

$$v_1 = g_{10} + g_{11}v^1, \qquad v_2 = g_{22}v^2, \qquad v_3 = v^3 = w. \tag{14}$$

Теперь уравнения Эйлера записаны в форме, удобной для вывода НЛД-модели.

Формулировка задачи дополняется краевыми условиями и подходящими начальными данными. Далее будем считать, что снизу слой жидкости ограничен непроницаемым подвижным дном $r = R - h(\lambda, \theta, t)$, а сверху — свободной поверхностью $r = R + \eta(\lambda, \theta, t)$. В сферической системе координат краевые условия на этих участках границы записываются в виде [14]

$$(\eta_t + \boldsymbol{u} \cdot \nabla\eta - w)\big|_{r=R+\eta} = 0; \tag{15}$$

$$p\big|_{r=R+\eta} = 0; \tag{16}$$

$$(h_t + \boldsymbol{u} \cdot \nabla h + w)\big|_{r=R-h} = 0. \tag{17}$$

2. Вывод НЛД-уравнений мелкой воды на сфере. В моделях мелкой воды искомыми величинами являются полная глубина слоя жидкости $H = \eta + h$ и вектор скорости $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(\lambda, \theta, t)$, связанный с вектором скорости трехмерного течения. В настоящей работе в качестве величины $\boldsymbol{c}$ выберем осредненную по глубине “горизонтальную” составляющую скорости

$$\boldsymbol{c} = (c^1, c^2)^{\mathrm{т}} = \frac{1}{H}\int\limits_{-h}^{\eta} \boldsymbol{u}\, ds, \tag{18}$$

где $s = r - R$ — новая переменная в радиальном направлении.

2.1. *Переход к безразмерным переменным.* Для получения уравнений мелкой воды на сфере введем характерные масштабы и перейдем к безразмерным величинам, чтобы оценить относительный вклад каждого слагаемого в исходных уравнениях (4), (11), (12). Пусть L, h_0 — характерные масштабы в горизонтальном и вертикальном направлениях соответственно, a_0 — характерная амплитуда волны, $\alpha = a_0/h_0$. С величиной L свяжем характерный горизонтальный масштаб λ_0, измеренный в радианах:

$$\lambda_0 = \frac{L}{R} = \frac{\varepsilon}{\mu}$$

($\varepsilon = h_0/R \ll 1$; $\mu = h_0/L$). Масштаб времени t_0 определим следующим образом:

$$t_0 = \frac{L}{\sqrt{gh_0}}.$$

Тогда характерный масштаб угловой скорости распространения волны будет определяться формулой

$$\omega_0 = \frac{\lambda_0}{t_0} = \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{\sqrt{gh_0}}{L} = \frac{\sqrt{gh_0}}{R}.$$

В качестве масштаба “горизонтальной” угловой скорости частиц жидкости в волне примем величину $\alpha\omega_0$.

В соответствии с введенными масштабами определим безразмерные переменные:

$$\bar\lambda = \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad \bar\theta = \frac{\theta}{\lambda_0}, \quad \bar h = \frac{h}{h_0}, \quad \bar s = \frac{s}{h_0}, \quad \bar H = \frac{H}{h_0}, \quad \bar\eta = \frac{\eta}{a_0}, \quad \bar t = \frac{t}{t_0}, \quad \bar\Omega = \frac{\Omega}{\omega_0},$$

$$\bar v^\beta = \frac{v^\beta}{\alpha\omega_0}, \quad \bar v_\beta = \frac{v_\beta}{\alpha R\sqrt{gh_0}} \quad (\beta = 1, 2), \quad \bar w = \frac{w}{\alpha\mu\sqrt{gh_0}}, \quad \bar p = \frac{p}{gh_0}.$$

С помощью безразмерных параметров ε, α, μ можно охарактеризовать вид течения. Предположение о малости значений этих параметров и их возможной взаимосвязи позволяет получать те или иные классы приближенных уравнений гидродинамики. Параметр ε представляет собой относительную толщину океанического слоя воды и обычно не превышает значения порядка 10^{-3}, поэтому далее наличие множителя ε перед конечными по величине слагаемыми в уравнении будет указывать на пренебрежимо малое влияние этих членов. Отметим также, что параметр μ характеризует частотную дисперсию в теории Буссинеска, а параметр α является мерой нелинейности процесса в теории мелкой воды.

2.2. *Уравнение неразрывности приближенной модели.* В уравнении неразрывности (4) перейдем к безразмерным переменным и оценим вклад каждого слагаемого в исходное уравнение с учетом предположения о малости величины ε. Уравнение (4) после обезразмеривания принимает вид

$$\frac{1}{\lambda_0}\frac{\partial}{\partial\bar\lambda}\,(J_0\bar J\alpha\omega_0\bar v^1)+\frac{1}{\lambda_0}\frac{\partial}{\partial\bar\theta}\,(J_0\bar J\alpha\omega_0\bar v^2)+\frac{1}{h_0}\frac{\partial}{\partial\bar s}\,\big(J_0\bar J\alpha\mu\sqrt{gh_0}\,\bar w\big)=0,$$

где

$$J_0=-R^2\sin\theta; \tag{19}$$

$$\bar J=\frac{J}{J_0}=\frac{r^2}{R^2}=\Big(\frac{s+R}{R}\Big)^2=(1+\varepsilon\bar s)^2=1+O(\varepsilon). \tag{20}$$

Отбрасывая в полученном уравнении слагаемые порядка $O(\varepsilon)$, имеем уравнение

$$\frac{\partial\bar J_0\bar v^1}{\partial\bar\lambda}+\frac{\partial\bar J_0\bar v^2}{\partial\bar\theta}+\frac{\partial\bar J_0\bar w}{\partial\bar s}=0, \tag{21}$$

где $\bar J_0=-\sin\theta$. Возвращаясь к исходным размерным переменным, получаем уравнение

$$\frac{\partial J_0v^1}{\partial\lambda}+\frac{\partial J_0v^2}{\partial\theta}+\frac{\partial J_0w}{\partial s}=0, \tag{22}$$

из которого будет выведено уравнение неразрывности приближенной модели. Заметим, что уравнение (22) можно получить непосредственно из уравнения (4), если предположить, что в тонком по сравнению с радиусом Земли слое воды можно пренебречь изменением якобиана по глубине, т. е. если в уравнении (4) вместо якобиана $J=-r^2\sin\theta$ использовать его приближенное значение (19).

Проинтегрируем уравнение (22) по переменной s:

$$\int\limits_{-h}^{\eta}\Big(\frac{\partial J_0v^1}{\partial\lambda}+\frac{\partial J_0v^2}{\partial\theta}+\frac{\partial J_0w}{\partial s}\Big)\,ds=0$$

и преобразуем полученное соотношение к виду

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big(J_0\int\limits_{-h}^{\eta}v^1\,ds\Big)+\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(J_0\int\limits_{-h}^{\eta}v^2\,ds\Big)-J_0\,(\boldsymbol u\cdot\nabla\eta-w)\big|_{s=\eta}-J_0(\boldsymbol u\cdot\nabla h+w)\big|_{s=-h}=0. \tag{23}$$

Из этого равенства с учетом краевых условий (15), (17) и формулы (18) для осредненной скорости следует уравнение неразрывности НЛД-модели на сфере

$$(J_0H)_t+(J_0Hc^1)_\lambda+(J_0Hc^2)_\theta=0. \tag{24}$$

Если использовать оператор дивергенции в сферических координатах

$$\nabla\cdot\boldsymbol c=\frac{(J_0c^1)_\lambda+(J_0c^2)_\theta}{J_0}, \tag{25}$$

то уравнение неразрывности (24) примет следующий вид:

$$H_t + \nabla \cdot (H\boldsymbol{c}) = 0. \tag{26}$$

В безразмерных переменных последнее уравнение записывается в виде

$$\bar{H}_{\bar{t}} + \alpha\bar{\nabla} \cdot (\bar{H}\bar{\boldsymbol{c}}) = 0, \tag{27}$$

где

$$\bar{H} = \bar{h} + \alpha\bar{\eta}, \qquad \bar{\boldsymbol{c}} = (\bar{c}^1, \bar{c}^2)^{\mathrm{т}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\alpha\omega_0} = \frac{1}{\bar{H}}\int\limits_{-\bar{h}}^{\alpha\bar{\eta}} \bar{\boldsymbol{u}}\, d\bar{s},$$

$$\bar{\nabla} = \Big(\frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}}, \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}\Big), \qquad \bar{\nabla} \cdot \bar{\boldsymbol{c}} = \frac{(\bar{J}_0\bar{c}^1)_{\bar{\lambda}} + (\bar{J}_0\bar{c}^2)_{\bar{\theta}}}{\bar{J}_0}.$$

2.3. *Модифицированные уравнения Эйлера в безразмерном виде.* Для того чтобы получить уравнения движения НЛД-модели на сфере, выполним анализ уравнений Эйлера (11), (12) в безразмерных переменных. Тогда уравнение (11) для компоненты скорости в направлении долготы (при $\gamma = 1$)

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v^1\,\frac{\partial v_1}{\partial\lambda} + v^2\,\frac{\partial v_1}{\partial\theta} + w\,\frac{\partial v_1}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial\lambda} = 0 \tag{28}$$

записывается в виде

$$\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial\bar{t}} + \alpha\Big(\bar{v}^1\,\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial\bar{\lambda}} + \bar{v}^2\,\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial\bar{\theta}} + \bar{w}\,\frac{\partial\bar{v}_1}{\partial\bar{s}}\Big) + \frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{\lambda}} = 0. \tag{29}$$

Здесь

$$\bar{v}_1 = \frac{v_1}{\alpha R\sqrt{gh_0}} = \frac{g_{10} + g_{11}v^1}{\alpha R\sqrt{gh_0}} = \frac{(\Omega + v^1)r^2\sin^2\theta}{\alpha R\sqrt{gh_0}} = \frac{1}{\alpha}\,(\bar{\Omega} + \alpha\bar{v}^1)\bar{J}\sin^2\theta.$$

Учитывая равенство (20) и пренебрегая членами порядка $O(\varepsilon)$, получаем приближенную формулу

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{\alpha}\,(\bar{\Omega} + \alpha\bar{v}^1)\sin^2\theta, \tag{30}$$

которую подставим в уравнение (29). Если в этом уравнении вернуться к размерным переменным, то получим уравнение того же вида, что и (28). Единственное отличие заключается в том, что при вычислении компоненты $v_1 = g_{10} + g_{11}v^1$ вместо точных значений (8), (9) используются приближенные значения

$$g_{10} = \Omega R^2\sin^2\theta, \qquad g_{11} = R^2\sin^2\theta. \tag{31}$$

С учетом формулы (31) для g_{11} уравнение (11) в направлении широты ($\gamma = 2$) записывается следующим образом:

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v^1\,\frac{\partial v_2}{\partial\lambda} + v^2\,\frac{\partial v_2}{\partial\theta} + w\,\frac{\partial v_2}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial\theta} = (\Omega + v^1)^2R^2\sin\theta\cos\theta, \tag{32}$$

а в безразмерных переменных принимает вид

$$\frac{\partial\bar{v}_2}{\partial\bar{t}} + \alpha\Big(\bar{v}^1\,\frac{\partial\bar{v}_2}{\partial\bar{\lambda}} + \bar{v}^2\,\frac{\partial\bar{v}_2}{\partial\bar{\theta}} + \bar{w}\,\frac{\partial\bar{v}_2}{\partial\bar{s}}\Big) + \frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{\theta}} = \frac{\varepsilon}{\alpha\mu}\,(\bar{\Omega} + \alpha\bar{v}^1)^2\sin\theta\cos\theta, \tag{33}$$

где $\bar{v}_2 = \bar{J}\bar{v}^2$. Пренебрегая в уравнении (33) членами порядка $O(\varepsilon)$, т. е. полагая

$$\bar{v}_2 = \bar{v}^2, \tag{34}$$

можно показать, что обратный переход к размерным переменным приводит к уравнению движения вида (32), в котором ковариантная компонента $v_2 = g_{22}v^2$ вычисляется с использованием приближенной формулы

$$g_{22} = R^2. \tag{35}$$

С учетом принятых допущений о независимости компонент в (31), (35) от переменной s уравнение (12) в "радиальном" направлении преобразуется к виду

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v^1 \frac{\partial w}{\partial \lambda} + v^2 \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial s} = -g. \tag{36}$$

В безразмерных переменных последнее уравнение записывается следующим образом:

$$\mu^2 \Big[\frac{\partial \bar w}{\partial \bar t} + \alpha \Big(\bar v^1 \frac{\partial \bar w}{\partial \bar\lambda} + \bar v^2 \frac{\partial \bar w}{\partial \bar\theta} + \bar w \frac{\partial \bar w}{\partial \bar s}\Big)\Big] + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \bar p}{\partial \bar s} = -\frac{1}{\alpha}. \tag{37}$$

Таким образом, отбрасывая в обезразмеренных уравнениях члены порядка $O(\varepsilon)$ и переходя к размерным величинам, получаем модифицированные уравнения движения, которые в работе [13] были получены на основе формального предположения о том, что в тонком по сравнению с радиусом Земли слое воды изменением компонент метрического тензора преобразования (3) по глубине можно пренебречь. Учитывая аналогичное утверждение в подп. 2.2 о якобиане преобразования (3), можно сделать вывод, что выполненный выше переход к модифицированным уравнениям является обоснованием формальной процедуры упрощения уравнений в [13].

Ниже на основе уравнения (37) выводится формула для давления в НЛД-модели, а на основе уравнений (29), (33), записанных в векторной форме

$$\bar{\boldsymbol v}_{\bar t} + \alpha(\bar{\boldsymbol u} \cdot \bar\nabla)\bar{\boldsymbol v} + \alpha \bar w\, \bar{\boldsymbol v}_{\bar s} + \frac{1}{\alpha} \bar\nabla \bar p = \bar{\boldsymbol r}, \tag{38}$$

где $\bar{\boldsymbol u} = (\bar v^1, \bar v^2)^{\text{т}}$; $\bar{\boldsymbol v} = (\bar v_1, \bar v_2)^{\text{т}}$; $\bar{\boldsymbol r} = (\bar r_1, \bar r_2)^{\text{т}}$;

$$\bar r_1 = 0, \quad \bar r_2 = \frac{\varepsilon}{\alpha\mu} (\bar\Omega + \alpha \bar v^1)^2 \sin\theta\cos\theta, \tag{39}$$

получаются уравнения движения этой модели.

2.4. *Предположение о потенциальности течения и вывод вспомогательных соотношений для компонент скорости.* Ниже выводятся НЛД-уравнения на основе дополнительного предположения о безвихревом характере течения. Это условие означает, в частности, что выполняется равенство $\boldsymbol v_s = \nabla w$ (см. [14]), которое в безразмерных переменных имеет вид

$$\bar{\boldsymbol v}_{\bar s} = \mu^2 \bar\nabla \bar w. \tag{40}$$

Далее используются только безразмерные величины, причем для упрощения обозначений черта над ними опускается.

Из равенства (40) следует, что для вывода приближенной модели целесообразно использовать разложение компонент скорости в ряды по степеням параметра μ^2:

$$\boldsymbol u = \boldsymbol u^0 + \mu^2 \boldsymbol u^1 + O(\mu^4), \quad \boldsymbol v = \boldsymbol v_0 + \mu^2 \boldsymbol v_1 + O(\mu^4), \quad w = w_0 + \mu^2 w_1 + O(\mu^4). \tag{41}$$

Здесь $\boldsymbol u = (v^1, v^2)^{\text{т}}$; $\boldsymbol v = (v_1, v_2)^{\text{т}}$; $\boldsymbol u^k = (v^{k1}, v^{k2})^{\text{т}}$; $\boldsymbol v_k = (v_{k1}, v_{k2})^{\text{т}}$ $(k = 0, 1)$. Определив для удобства величины

$$\boldsymbol V_0 = \begin{pmatrix} \Omega/\alpha \, \sin^2\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

из соотношений (30), (34) получаем представления

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}_0 + M\boldsymbol{u}; \tag{42}$$

$$\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{V}_0 + M\boldsymbol{u}^0, \qquad \boldsymbol{v}_1 = M\boldsymbol{u}^1. \tag{43}$$

Ниже с использованием разложений (41) функции $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, w выражаются через скорость $\boldsymbol{c}$ в НЛД-модели.

В результате подстановки второго разложения (41) в соотношение (40) можно сделать вывод, что функция $\boldsymbol{v}_0$ не зависит от “вертикальной” координаты s. В силу первого равенства в (43) таким же свойством обладает функция $\boldsymbol{u}^0$.

Сначала выразим w_0 через $\boldsymbol{u}^0$. Подставляя функции $\boldsymbol{u}$ и w в уравнение неразрывности (21), имеем равенство $\nabla\cdot\boldsymbol{u}^0 + (w_0)_s = 0$. Интегрируя это равенство по “вертикальной” координате:

$$\int\limits_{-h}^{s} \left[\nabla\cdot\boldsymbol{u}^0 + (w_0)_\zeta\right] d\zeta = 0$$

и учитывая, что функция $\boldsymbol{u}^0$ не зависит от s, получаем

$$(s+h)\,\nabla\cdot\boldsymbol{u}^0 + w_0(s) - w_0\big|_{s=-h} = 0. \tag{44}$$

Далее используем условие на дне (17), которое в безразмерных переменных записывается в виде уравнения

$$h_t + \alpha(\boldsymbol{u}\cdot\nabla h + w) = 0, \qquad s = -h.$$

При использовании разложений (41) из этого уравнения следует равенство

$$h_t + \alpha(\boldsymbol{u}^0\cdot\nabla h + w_0) = 0, \qquad s = -h,$$

которое можно записать в виде

$$w_0\big|_{s=-h} = -\frac{1}{\alpha}\,D_0 h,$$

где D_0 — оператор полной производной:

$$D_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \alpha\boldsymbol{u}^0\cdot\nabla.$$

С учетом этого соотношения из (44) следует, что составляющая w_0 “вертикальной” компоненты скорости выражается через нулевое приближение “горизонтальной” компоненты скорости следующим образом:

$$w_0 = -\frac{1}{\alpha}\,D_0 h - (s+h)\nabla\cdot\boldsymbol{u}^0.$$

С помощью этой формулы определим составляющую $\boldsymbol{v}_1$ в разложении (41). Для этого проинтегрируем по переменной s равенство $(\boldsymbol{v}_1)_s = \nabla w_0$, следующее из условия (40). Выполнив необходимые преобразования, получаем выражение

$$\boldsymbol{v}_1(s) = \boldsymbol{v}_1\big|_{s=-h} + \nabla\int\limits_{-h}^{s} w_0\,d\zeta - w_0\big|_{s=-h}\nabla h =$$

$$= -(s+h)\Big(\frac{\nabla D_0 h}{\alpha} + \nabla h\,(\nabla\cdot\boldsymbol{u}^0)\Big) - \frac{(s+h)^2}{2}\,\nabla\,(\nabla\cdot\boldsymbol{u}^0) + \boldsymbol{v}_1\big|_{s=-h}.$$

Подставим $\boldsymbol{v}_1$ в первое разложение (41), которое в силу второго равенства (43) записывается в виде

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^0 + \mu^2 M^{-1}\boldsymbol{v}_1 + O(\mu^4). \tag{45}$$

Тогда с использованием формул (18), (45) получаем

$$\boldsymbol{c} = \frac{1}{H}\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} \boldsymbol{u}\,ds = \boldsymbol{u}^0 - \mu^2 M^{-1}\Big[\frac{H}{2}\Big(\frac{\nabla D_0 h}{\alpha} + \nabla h\,(\nabla\cdot\boldsymbol{u}^0)\Big) + \frac{H^2}{6}\,\nabla\,(\nabla\cdot\boldsymbol{u}^0)\Big] + \\ + \mu^2 M^{-1}\boldsymbol{v}_1\big|_{s=-h} + O(\mu^4).$$

Следовательно, $\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{c} + O(\mu^2)$, и формулу (45) можно записать в виде

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{c} + \mu^2 M^{-1}\boldsymbol{V}_1 + O(\mu^4), \tag{46}$$

где

$$\boldsymbol{V}_1 = \Big(\frac{H}{2} - (s+h)\Big)\Big(\frac{\nabla Dh}{\alpha} + \nabla h\,(\nabla\cdot\boldsymbol{c})\Big) + \Big(\frac{H^2}{6} - \frac{(s+h)^2}{2}\Big)\,\nabla\,(\nabla\cdot\boldsymbol{c}); \tag{47}$$

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \alpha\boldsymbol{c}\cdot\nabla. \tag{48}$$

С учетом формулы (42) получаем

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}_0 + M\boldsymbol{c} + \mu^2\boldsymbol{V}_1 + O(\mu^4). \tag{49}$$

Что касается “вертикальной” компоненты скорости, то далее потребуется ее представление с точностью лишь до членов порядка $O(\mu^2)$:

$$w = -\alpha^{-1}Dh - (s+h)\,\nabla\cdot\boldsymbol{c} + O(\mu^2). \tag{50}$$

Формулы (46), (49), (50) используются ниже при вычислении давления и выводе уравнений движения в НЛД-модели.

2.5. *Формула для давления в НЛД-модели на сфере.* Для того чтобы выразить давление через переменные НЛД-модели, проинтегрируем уравнение (37) по “вертикальной” координате:

$$\alpha\mu^2\int\limits_s^{\alpha\eta}\big[w_t + \alpha(\boldsymbol{u}\cdot\nabla w + ww_\zeta)\big]\,d\zeta + \int\limits_s^{\alpha\eta} p_\zeta\,d\zeta = -\int\limits_s^{\alpha\eta} d\zeta, \qquad -h \leqslant s \leqslant \alpha\eta.$$

С учетом динамического условия (16) и равенства $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{c} + O(\mu^2)$, вытекающего из (46), получаем соотношение

$$\alpha\mu^2\int\limits_s^{\alpha\eta}\big(Dw + \alpha ww_\zeta + O(\mu^2)\big)\,d\zeta - p(s) = s - \alpha\eta,$$

подынтегральное выражение в котором вычисляется с использованием формулы (50) для w:

$$Dw + \alpha ww_s = -\alpha^{-1}D^2h - (s+h)D(\nabla\cdot\boldsymbol{c}) + \alpha(s+h)(\nabla\cdot\boldsymbol{c})^2 + O(\mu^2) = \\ = -R_2 - (s+h)R_1 + O(\mu^2).$$

Здесь

$$R_1 = D(\nabla\cdot\boldsymbol{c}) - \alpha(\nabla\cdot\boldsymbol{c})^2, \qquad R_2 = \alpha^{-1}D^2h. \tag{51}$$

Следовательно, формула для вычисления давления имеет вид

$$p = H - (s+h) - \alpha\mu^2\Big[\big(H-(s+h)\big)R_2 + \Big(\frac{H^2}{2} - \frac{(s+h)^2}{2}\Big)R_1\Big] + O(\mu^4), \quad -h \leqslant s \leqslant \alpha\eta. \tag{52}$$

2.6. *Уравнения движения НЛД-модели на сфере.* На основе выражений (46), (49), (50) и формулы для давления (52) выведем уравнения движения НЛД-модели. Интегрируя уравнение (38) по толщине слоя воды:

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}\Big(\boldsymbol{v}_t + \alpha\,(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \alpha w\boldsymbol{v}_s + \frac{1}{\alpha}\,\nabla p\Big)\,ds = \int\limits_{-h}^{\alpha\eta}\boldsymbol{r}\,ds$$

и учитывая динамическое условие (16), получаем соотношение

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}\big(\boldsymbol{v}_t + \alpha(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \alpha w\boldsymbol{v}_s\big)\,ds + \frac{1}{\alpha}\Big(\nabla\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}p\,ds - p\big|_{s=-h}\nabla h\Big) = \int\limits_{-h}^{\alpha\eta}\boldsymbol{r}\,ds. \tag{53}$$

Здесь $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2)^{\mathrm{т}}$; $r_1 = 0$; согласно формулам (39), (46)

$$r_2 = \frac{\varepsilon}{\alpha\mu}\,\big[\Omega + \alpha(c^1 + O(\mu^2))\big]^2\sin\theta\cos\theta = \frac{\varepsilon}{\alpha\mu}\,(\Omega+\alpha c^1)^2\sin\theta\cos\theta + O(\varepsilon\mu).$$

В силу предположения о малости ε будем считать, что

$$r_2 = \frac{\varepsilon}{\alpha\mu}\,(\Omega+\alpha c^1)^2\sin\theta\cos\theta,$$

поэтому вектор $\boldsymbol{r}$ не зависит от переменной s. Тогда

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}\boldsymbol{r}\,ds = \boldsymbol{r}H.$$

Преобразуем соотношение (53), используя представление w и p через переменные модели мелкой воды. Для вычисления членов с давлением используем формулу (52):

$$\frac{1}{\alpha}\Big(\nabla\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}p\,ds - p\big|_{s=-h}\nabla h\Big) = \\ = H\nabla\eta - \mu^2\Big[\nabla\Big(\frac{H^3}{3}\,R_1 + \frac{H^2}{2}\,R_2\Big) - H\nabla h\Big(\frac{H}{2}\,R_1 + R_2\Big)\Big] + O(\mu^4), \tag{54}$$

а слагаемое с “вертикальной” компонентой скорости вычислим, применяя формулы (47), (50):

$$\alpha\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}w\boldsymbol{v}_s\,ds = \mu^2 Dh\boldsymbol{V}_1\big|_{s=-h} - \mu^2\big(Dh + \alpha H(\nabla\cdot\boldsymbol{c})\big)\boldsymbol{V}_1\big|_{s=\alpha\eta} + O(\mu^4).$$

Наконец, на основе выражений (46), (49) получаем соотношение

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}\big[\boldsymbol{v}_t + \alpha(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\big]\,ds = \int\limits_{-h}^{\alpha\eta}\big[M\boldsymbol{c}_t + \alpha(\boldsymbol{c}\cdot\nabla)(\boldsymbol{V}_0 + M\boldsymbol{c})\big]\,ds + \\ + \mu^2\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}\big[\boldsymbol{V}_{1t} + \alpha\big((\boldsymbol{c}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}_1 + M^{-1}(\boldsymbol{V}_1\cdot\nabla)(\boldsymbol{V}_0 + M\boldsymbol{c})\big)\big]\,ds + O(\mu^4).$$

Выполнив ряд преобразований, покажем, что выражение при μ^2 обращается в нуль. Действительно,

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} \boldsymbol{V}_1\,ds = 0,$$

поэтому

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} \boldsymbol{V}_{1t}\,ds = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} \boldsymbol{V}_1\,ds - (\alpha\eta)_t\boldsymbol{V}_1\big|_{s=\alpha\eta} - h_t\boldsymbol{V}_1\big|_{s=-h} = -(\alpha\eta)_t\boldsymbol{V}_1\big|_{s=\alpha\eta} - h_t\boldsymbol{V}_1\big|_{s=-h},$$

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} (\boldsymbol{c}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}_1\,ds = (\boldsymbol{c}\cdot\nabla)\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} \boldsymbol{V}_1\,ds - (\boldsymbol{c}\cdot\nabla(\alpha\eta))\boldsymbol{V}_1\big|_{s=\alpha\eta} - (\boldsymbol{c}\cdot\nabla h)\boldsymbol{V}_1\big|_{s=-h} =$$

$$= -(\boldsymbol{c}\cdot\nabla(\alpha\eta))\boldsymbol{V}_1\big|_{s=\alpha\eta} - (\boldsymbol{c}\cdot\nabla h)\boldsymbol{V}_1\big|_{s=-h},$$

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} M^{-1}(\boldsymbol{V}_1\cdot\nabla)(\boldsymbol{V}_0 + M\boldsymbol{c})\,ds = M^{-1}\Big(\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} \boldsymbol{V}_1\,ds\cdot\nabla\Big)(\boldsymbol{V}_0 + M\boldsymbol{c}) = 0.$$

Используя эти равенства, получаем следующее уравнение:

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} (\boldsymbol{v}_t + \alpha(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \alpha w\boldsymbol{v}_s)\,ds = HM\boldsymbol{c}_t + \alpha H(\boldsymbol{c}\cdot\nabla)(\boldsymbol{V}_0 + M\boldsymbol{c}) -$$

$$- \mu^2\big[(\alpha\eta)_t + \alpha(\boldsymbol{c}\cdot\nabla(\alpha\eta)) + Dh + \alpha H(\nabla\cdot\boldsymbol{c})\big]\boldsymbol{V}_1\big|_{s=\alpha\eta} -$$

$$- \mu^2\big[h_t + \alpha(\boldsymbol{c}\cdot\nabla h) - Dh\big]\boldsymbol{V}_1\big|_{s=-h} + O(\mu^4).$$

В этом уравнении выражения в квадратных скобках обращаются в нуль: первое равенство

$$(\alpha\eta)_t + \alpha(\boldsymbol{c}\cdot\nabla(\alpha\eta)) + Dh + \alpha H(\nabla\cdot\boldsymbol{c}) = 0$$

выполнено в силу уравнения неразрывности (27), которое может быть записано в эквивалентной форме $DH + \alpha H(\nabla\cdot\boldsymbol{c}) = 0$, а справедливость второго соотношения

$$h_t + \alpha(\boldsymbol{c}\cdot\nabla h) - Dh = 0$$

следует из определения (48). Таким образом,

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} \big(\boldsymbol{v}_t + \alpha(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \alpha w\boldsymbol{v}_s\big)\,ds = HM\boldsymbol{c}_t + \alpha H(\boldsymbol{c}\cdot\nabla)(\boldsymbol{V}_0 + M\boldsymbol{c}) + O(\mu^4).$$

Сравнивая полученное равенство с соотношением (53) и учитывая (54), получаем уравнение движения НЛД-модели

$$\boldsymbol{v}_t + \alpha(\boldsymbol{c}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \nabla\eta = \mu^2\Big[\frac{1}{H}\nabla\Big(\frac{H^3}{3}R_1 + \frac{H^2}{2}R_2\Big) - \nabla h\Big(\frac{H}{2}R_1 + R_2\Big)\Big] + \boldsymbol{r} + O(\mu^4). \qquad (55)$$

Здесь для упрощения записи введен новый вектор $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)^{\text{т}}$, который в отличие от вектора в (42) не зависит от s и определяется через среднюю скорость:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}_0 + M\boldsymbol{c},$$

т. е.

$$v_1 = \alpha^{-1}(\Omega + \alpha c^1)\sin^2\theta, \qquad v_2 = c^2.$$

3. Полные уравнения НЛД-модели на сфере. Вернемся в полученных уравнениях к размерным величинам, отбросив предварительно в уравнении (55) члены порядка $O(\mu^4)$, и запишем систему НЛД-уравнений в окончательном виде

$$H_t + \nabla \cdot (H\boldsymbol{c}) = 0; \tag{56}$$

$$\boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{c} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} + g\nabla\eta = \frac{1}{H}\nabla\Big(\frac{H^3}{3}R_1 + \frac{H^2}{2}R_2\Big) - \nabla h\Big(\frac{H}{2}R_1 + R_2\Big) + \boldsymbol{r}, \tag{57}$$

где

$$\boldsymbol{c} = (c^1, c^2)^{\mathrm{т}}, \quad \boldsymbol{v} = (v_1, v_2)^{\mathrm{т}}, \quad v_1 = g_{10} + g_{11}c^1, \quad v_2 = g_{22}c^2,$$

$$\boldsymbol{r} = (r_1, r_2)^{\mathrm{т}}, \quad r_1 \equiv 0, \quad r_2 = \frac{(\Omega + c^1)^2}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial \theta},$$

величины g_{10}, g_{11}, g_{22} вычисляются по формулам (31), (35),

$$R_1 = D(\nabla \cdot \boldsymbol{c}) - (\nabla \cdot \boldsymbol{c})^2, \quad R_2 = D^2 h, \quad D = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{c} \cdot \nabla.$$

За счет выбора переменных эти уравнения имеют компактный вид аналогично уравнениям, полученным на плоскости в декартовой системе координат в работе [12].

При численном решении задачи может потребоваться запись уравнения движения (57) в виде уравнения с дивергентной левой частью:

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial \boldsymbol{F}_2}{\partial \theta} = J_0(\nabla\Phi + \Psi\nabla h + H\boldsymbol{r}). \tag{58}$$

Здесь

$$\boldsymbol{V} = J_0 H \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{F}_\beta = J_0 H \boldsymbol{v} c^\beta \quad (\beta = 1, 2),$$

$$\Phi = \frac{H^3}{3}R_1 + \frac{H^2}{2}R_2 - g\frac{H^2}{2}, \qquad \Psi = gH - \frac{H^2}{2}R_1 - HR_2.$$

Система уравнений (56), (57) или (56), (58) используется для определения полной глубины H и контравариантных компонент c^β вектора скорости $\boldsymbol{c}$. При численном решении задачи целесообразно использовать линейные компоненты u и v этого вектора:

$$u = Rc^1 \sin\theta, \qquad v = Rc^2.$$

Из формул (19), (24), (58) следует, что уравнения НЛД-модели для зависимых переменных H, u, v имеют вид

$$(HR\sin\theta)_t + (Hu)_\lambda + (Hv\sin\theta)_\theta = 0,$$

$$(HuR\sin\theta)_t + (Hu^2)_\lambda + (Huv\sin\theta)_\theta = -(2\Omega R\sin\theta + u)Hv\cos\theta + \Phi_\lambda + \Psi h_\lambda,$$

$$(HvR\sin\theta)_t + (Huv)_\lambda + (Hv^2\sin\theta)_\theta = (\Omega R\sin\theta + u)^2 H\cos\theta + \sin\theta(\Phi_\theta + \Psi h_\theta),$$

при этом величины R_α $(\alpha = 1, 2)$, входящие в дисперсионные члены, вычисляются по формулам

$$R_1 = (\nabla \cdot \boldsymbol{c})_t + \frac{1}{R\sin\theta}\big(u(\nabla \cdot \boldsymbol{c})_\lambda + v\sin\theta\,(\nabla \cdot \boldsymbol{c})_\theta\big) - (\nabla \cdot \boldsymbol{c})^2,$$

$$R_2 = (Dh)_t + \frac{1}{R\sin\theta}\big(u(Dh)_\lambda + v\sin\theta\,(Dh)_\theta\big),$$

где

$$\nabla \cdot \boldsymbol{c} = \frac{1}{R\sin\theta}\big(u_\lambda + (v\sin\theta)_\theta\big), \qquad Dh = h_t + \frac{1}{R\sin\theta}\big(uh_\lambda + v\sin\theta\,h_\theta\big).$$

Модель гидродинамики поверхностных волн, описываемая системой уравнений (56), (57), принадлежит к классу так называемых полных НЛД-моделей второго гидродинамического приближения. Из этой модели с помощью упрощений могут быть получены многочисленные промежуточные варианты НЛД-моделей между полученной "полной" НЛД-моделью и классической моделью мелкой воды первого приближения.

4. Модель мелкой воды первого приближения. Пренебрегая в уравнениях (55) дисперсионными членами, имеющими порядок $O(\mu^2)$, получаем уравнения мелкой воды

$$(HR\sin\theta)_t + (Hu)_\lambda + (Hv\sin\theta)_\theta = 0,$$

$$(HuR\sin\theta)_t + (Hu^2 + gH^2/2)_\lambda + (Huv\sin\theta)_\theta = -(2\Omega R\sin\theta + u)Hv\cos\theta + gHh_\lambda,$$

$$(HvR\sin\theta)_t + (Huv)_\lambda + \big((Hv^2 + gH^2/2)\sin\theta\big)_\theta = \big[(\Omega R\sin\theta + u)^2 H + gH^2/2\big]\cos\theta + gHh_\theta\sin\theta.$$

Записав эти уравнения в недивергентной форме, нетрудно заметить, что они совпадают с уравнениями, приведенными в работах [6, 7]. Эти уравнения отличаются от классических уравнений мелкой воды [4, 5] наличием дополнительного слагаемого $\Omega^2 R\sin\theta\cos\theta$. В работе [6] показано, что это слагаемое следует учитывать при изучении течений в атмосфере на протяжении длительного промежутка времени (порядка 10 сут). Временной масштаб существования цунами составляет порядка нескольких часов, поэтому при моделировании распространения цунами слагаемое $\Omega^2 R\sin\theta\cos\theta$ обычно не учитывается [8–10].

Заключение. В настоящей работе вывод НЛД-уравнений осуществлен после перехода к безразмерным величинам в пренебрежении членами порядка $O(\varepsilon)$ и $O(\mu^4)$. Правая часть векторного уравнения движения (55) содержит параметры α, μ^2, входящие в формулы (48), (51). Если предположить, что $\alpha \approx \mu^2$, то члены $O(\alpha\mu^2)$ имеют порядок $O(\mu^4)$, и ими также можно пренебречь. Эта формальная процедура позволяет получить уравнения Буссинеска, более простые по сравнению с полной НЛД-моделью.

Важным результатом работы является то, что уравнения (56), (57) за счет специального выбора переменных записываются в форме, аналогичной представлению НЛД-модели в локальных декартовых координатах на плоскости. Таким образом, получена НЛД-модель в форме, являющейся в определенном смысле универсальной, что облегчает разработку численных алгоритмов при моделировании распространения поверхностных волн в океане.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кочин Н. Е.** Теоретическая гидромеханика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 1.
2. **Марчук Г. И.** Численное решение задач динамики атмосферы и океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1974.
3. **Haltiner G. J.** Numerical prediction and dynamic meteorology / G. J. Haltiner, R. T. Williams. N. Y.: John Wiley and Sons, 1980.
4. **Murty T. S.** Storm surges-meteorological ocean tides. Ottawa, 1984. (Fish. Res. Board of Canada; Bull. N 212).
5. **Kowalik Z.** Numerical modeling of ocean dynamics / Z. Kowalik, T. S. Murty. Singapure: World Sci. Publ. Co., 1993. (Advanced series on ocean engineering; V. 5).
6. **Черевко А. А., Чупахин А. П.** Уравнения мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере. 1. Вывод и общие свойства // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 2. С. 24–36.
7. **Черевко А. А., Чупахин А. П.** Уравнения мелкой воды на вращающейся притягивающей сфере. 2. Простые стационарные волны и звуковые характеристики // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 3. С. 82–96.

8. **Murty T. S., Rao A. D., Nirupama N., Nistor I.** Numerical modelling concepts for tsunami warning systems // Current Sci. 2006. V. 90, N 8. P. 1073–1081.
9. **Dalrymple R. A., Grilli S. T., Kirby J. T., Watts P.** Tsunamis and challenges for accurate modeling // Oceanography. 2006. V. 19, N 1. P. 142–151.
10. **Dao M. H., Tkalich P.** Tsunami propagation modelling — a sensitivity study // Nat. Hazards Earth Syst. Sci. 2007. V. 7. P. 741–754.
11. **Бабайлов В. В., Бейзель С. А., Гусев А. А. и др.** Информационно-вычислительные аспекты совершенствования национальной системы предупреждения о цунами // Вычисл. технологии. 2008. Т. 13, спецвып. 2. С. 4–20.
12. **Федотова З. И., Хакимзянов Г. С.** Нелинейно-дисперсионные уравнения мелкой воды на нестационарном дне // Вычисл. технологии. 2008. Т. 13, № 4. С. 114–126.
13. **Федотова З. И., Хакимзянов Г. С.** Нелинейно-дисперсионные уравнения мелкой воды на вращающейся сфере // Вычисл. технологии. 2010. Т. 15, № 3. С. 135–145.
14. **Хакимзянов Г. С.** Численное моделирование течений жидкости с поверхностными волнами / Г. С. Хакимзянов, Ю. И. Шокин, В. Б. Барахнин, Н. Ю. Шокина. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001.

Поступила в редакцию 26/I 2011 г.