

его с диаметром пузырьков, то количество пузырьков в  $i$ -й подгруппе достигает максимума на таких расстояниях от среза сопла, где  $l \simeq 2R_i$  (значения  $l$  для потока даны на нижней оси фигуры).

Авторы выражают благодарность Бархатову А. Н. и Островскому Л. А. за интерес к работе и полезные советы.

Поступила 11 VII 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гаврилов Л. Р. Содержание свободного газа в жидкости и акустические методы его измерения. Обзор.— «Акуст. журнал», 1969, т. 15, № 3.
2. Калашников Ю. Н. Влияние турбулентной диффузии на изменение размеров газового пузырька в жидкости.— «Акуст. журнал», 1970, т. 16, № 4.
3. Мартынов А. И. Экспериментальное исследование динамики газовых пузырьков в турбулентном потоке.— ПМТФ, 1978, № 1.
4. Сизов А. Н. Диссипация энергии звуковых волн на маленьких газовых пузырьках.— ПМТФ, 1975, № 4.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.

УДК 536.25

#### ТЕПЛООБМЕН ЦИЛИНДРА В СЛОЖНОМ ЗВУКОВОМ ПОЛЕ

В. Б. Репин

(Казань)

Известно, что процесс теплообмена в звуковом поле интенсифицируется по сравнению со стационарным случаем, при этом было показано [1], что эти изменения обусловлены стационарными вторичными течениями. В подавляющем большинстве работ исследовался случай простого звукового поля. Однако, как это показано в [2], структура стационарных вторичных течений в сложном звуковом поле существенно изменяется, что должно отразиться как на локальных, так и интегральных характеристиках процесса теплообмена.

Рассмотрим теплообмен круглого цилиндра радиуса  $a$ , помещенного в высокочастотное сложное звуковое поле, состоящее из двух плоских волн. Температура поверхности цилиндра  $\tilde{T}_w$  и окружающей среды  $\tilde{T}_\infty$  считается постоянной, при этом разность температур  $(\tilde{T}_w - \tilde{T}_\infty)$  полагается настолько малой, что изменением физических свойств жидкости, а также естественной конвекцией можно пренебречь. Пренебрегая также диссипативными эффектами, уравнение энергии запишем в виде

$$(1) \quad \frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{\varepsilon}{1+r} \frac{\partial(\psi, \tilde{T})}{\partial(r, \theta)} - \frac{\varepsilon^2}{\text{PrRe}_{\text{ст}}} \nabla^2 T$$

с граничными условиями

$$(2) \quad T = 1 \text{ при } r = 0, \quad T = 0 \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

где  $T = (\tilde{T} - \tilde{T}_\infty)/(\tilde{T}_w - \tilde{T}_\infty)$ . Остальные величины определены в [2]. Поскольку  $\varepsilon \ll 1$ , то, используя метод возмущений, представим решение уравнения (1) в виде ряда

$$T = T_0 + \varepsilon T_1 + O(\varepsilon^2).$$

Используя аналогичное разложение для функции тока  $\psi$  и подставив в уравнение (1), получим [3]

$$(3) \quad \frac{1}{1+r} \frac{\partial (\psi_1^{(ст)}, T_0)}{\partial (r, \theta)} = \frac{1}{\text{PrRe}_{ст}} \nabla^2 T_0,$$

где  $\psi_1^{(ст)}$  — функция тока стационарного вторичного течения во внешней области.

Решение уравнения (3) должно удовлетворять второму условию соотношения (2), а при  $r \rightarrow 0$  — асимптотически срачиваться с решением во внутренней области.

Используя внутренние переменные, определенные в [2] соотношением (7), а также полагая  $\text{Re}_{ст} = O(1)$  и  $(\varepsilon^2 \text{Pr}) = O(1)$ , уравнение (1) запишем в виде [3]

$$(4) \quad \frac{\partial F}{\partial \tau} + \varepsilon \left( 1 - \frac{\varepsilon \sqrt{2}}{\text{Re}_{ст}} \eta \right) \frac{\partial (m, F)}{\partial (\eta, \theta)} = \frac{\varepsilon^2}{2(\varepsilon^2 \text{Pr})} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + O(\varepsilon^3),$$

где  $F$  — температура во внутренней области (слой Стокса). Отыщем решение (4) в виде

$$F = F_0 + \varepsilon F_1 + O(\varepsilon^2).$$

Было показано [3], что первый член разложения является решением уравнения

$$(5) \quad \frac{\partial (m_{10}^{(ст)}, F_0)}{\partial (\eta, \theta)} = \frac{1}{2(\varepsilon^2 \text{Pr})} \frac{\partial^2 F_0}{\partial \eta^2},$$

где  $m_{10}^{(ст)}$  — функция тока внутреннего вторичного течения.

Из уравнения (5) следует, что если  $(\varepsilon^2 \text{Pr}) \ll 1$ , то внутренняя область является существенно теплопроводной. В случае, когда  $(\varepsilon^2 \text{Pr}) \gg 1$ , толщина температурного слоя существенно меньше толщины слоя Стокса и внутренние течения играют активную роль в процессе теплообмена. Впервые этот факт был установлен в [1].

Когда процесс теплообмена определяется внешними течениями, поле температур описывается уравнением (3). Можно видеть, что для  $(\text{PrRe}_{ст}) \gg 1$  вся внешняя тепловая область носит характер пограничного слоя, толщина которого порядка  $O[a(\text{PrRe}_{ст})^{-1/2}]$ . Учитывая этот факт, введем также переменные, соответствующие тепловому пограничному слою, в которых температура  $O(1)$  и функция тока  $O(\kappa)$ , где  $\kappa = (\text{PrRe}_{ст})^{-1/2} \ll 1$ . Тогда

$$(6) \quad t_0(Y, \theta) = T_0(r_2, \theta), \quad Y = \kappa^{-1} r_2, \quad \psi_{10}^{(ст)} = \kappa \tilde{\psi}_{10}^{(ст)}.$$

Заметим, что, поскольку в дальнейшем будут использоваться решения гидродинамической части задачи, полученные в предположении  $\text{Re}_{ст} \ll 1$ , условие  $(\text{PrRe}_{ст}) \gg 1$  означает, что рассматриваем случай больших чисел Прандтля, т. е.  $\text{Pr} \gg 1$ .

Внутреннее разложение внешней функции тока  $\psi_{10}^{(ст)}$  запишется в виде

$$(7) \quad \tilde{\psi}_{10}^{(ст)} = z_1 + \kappa z_2 + O(\kappa^2),$$

где

$$z_1 = Y \left( \frac{\partial \tilde{\Psi}_{10}^{(cr)}}{\partial Y} \right)_{Y=0}; \quad z_2 = \frac{1}{2} Y^2 \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_{10}^{(cr)}}{\partial Y^2} \right)_{Y=0}.$$

Решение уравнения (3), используя условие малости  $\kappa$ , разложим в ряд

$$(8) \quad t_0 = t_{00} + \kappa t_{01} + O(\kappa^2).$$

Подставив (7), (8) в (3) и ограничившись членами первого порядка по  $\kappa$ , получим следующее уравнение, записанное в переменных (6):

$$(9) \quad \frac{\partial(z_1, t_{00})}{\partial(Y, \theta)} - \frac{\partial^2 t_{00}}{\partial Y^2}$$

с граничными условиями

$$(10) \quad t_{00} = 0 \text{ при } Y \rightarrow \infty, \quad t_{00} = 1 \text{ при } Y = 0.$$

Второе граничное условие (10) следует из того факта, что область слоя Стокса является существенно теплопроводной, в силу чего можно пренебречь изменением температуры в этой области. Это выполняется при условии  $(\varepsilon^2 \text{Pr}) \ll 1$ , что налагает ограничение на число Прандтля сверху.

Поскольку аналитическое представление  $\psi_{10}^{(cr)}$  зависит от соотношения между частотами двух волн [2], рассмотрим случай различных частот. Поместим систему координат в точку набегающих внешних вторичных течений на поверхность цилиндра, для этого введем переменную

$$\sigma_1 = 2\theta - \text{arctg} \left[ \frac{B^2 b^{-2} \sin 2\theta_1}{1 + B^2 b^{-2} \cos 2\theta_1} \right] + \pi.$$

Используя (7), а также соотношение (25) работы [2], уравнение (9) запишем в виде

$$3N_1 \sin \sigma_1 \frac{\partial t_{00}}{\partial \sigma_1} - 3N_1 Y \cos \sigma_1 \frac{\partial t_{00}}{\partial Y} = \frac{\partial^2 t_{00}}{\partial Y^2},$$

решением которого является

$$(11) \quad t_{00} = 1 - \frac{2}{\Gamma(1/2)} \int_0^{x_1} e^{-\xi^2} d\xi,$$

где

$$x_1 = \left( \frac{3N_1}{2} \right)^{1/2} Y \cos(\sigma_1/2); \quad N_1 = (1 + 2B^2 b^{-2} \cos 2\theta_1 + B^4 b^{-4})^{1/2};$$

$\Gamma(\alpha)$  — гамма-функция. Используя (11), вычислим локальный и интегральный коэффициент теплообмена, подсчитанный по радиусу цилиндра

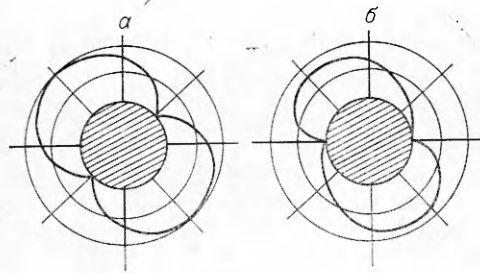
$$(12) \quad \text{Nu}_a = \left( \frac{6}{\pi} \right)^{1/2} (\text{Pr Re}_{cr})^{1/2} (1 + 2B^2 b^{-2} \cos 2\theta_1 + B^4 b^{-4})^{1/4} |\cos(\sigma_1/2)|,$$

$$\overline{\text{Nu}}_a = 0,88 (\text{Pr Re}_{cr})^{1/2} (1 + 2B^2 b^{-2} \cos 2\theta_1 + B^4 b^{-4})^{1/4}.$$

Можно заметить, что при  $B = 0$  выражения (12) переходят в зависимости, характеризующие процесс теплообмена круглого цилиндра в простом звуковом поле [1],

$$(13) \quad \text{Nu}_a = \left( \frac{6}{\pi} \right)^{1/2} (\text{Pr Re}_{cr})^{1/2} |\cos(\theta + \pi/2)|,$$

$$\overline{\text{Nu}}_a = 0,88 (\text{Pr Re}_{cr})^{1/2} = 0,88 \frac{A_i}{V \omega_1 \varepsilon^D},$$



где  $\mathcal{D}$  — коэффициент теплопроводности жидкости;  $A_1$  и  $\omega_1$  — амплитуда скорости и частота в первой волне. В выражениях (12), (13) берется абсолютное значение, так как коэффициент теплообмена является положительной величиной.

Таким образом, аналитические зависимости, описывающие теплообмен цилиндра в сложном звуковом поле для случая различных частот колебаний, отличаются от аналогичных выражений для простого звукового поля только лишь наличием дополнительного сомножителя вида

$$(1 + 2B^2b^{-2} \cos 2\theta_1 + B^4b^{-4})^{1/4},$$

причем характер распределения локального коэффициента теплообмена по поверхности цилиндра не меняется — распределение является симметричным относительно линии, проведенной через экстремум и центр цилиндра (фигура, *a*), а максимум коэффициента теплообмена совпадает с точкой набегающих внешних течений на поверхность цилиндра.

Рассмотрим, при каких условиях наличие второго колебательного движения приводит к интенсификации процесса теплообмена по сравнению со случаем простого звукового поля, т. е.

$$(14) \quad 1 + 2B^2b^{-2} \cos 2\theta_1 + B^4b^{-4} > 1 \text{ или } (Bb^{-1})^2 > -2 \cos 2\theta_1.$$

Из последнего соотношения, в частности, следует, что независимо от амплитудно-частотных соотношений процесс теплообмена в сложном звуковом поле будет проходить более интенсивно, чем в простом, если угол между направлением распространения двух волн удовлетворяет условию

$$|\theta_1| \leq \pi/4 + \pi n \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Можно убедиться, что при  $\theta_1 = 0$  или  $\pi$  происходит максимальная интенсификация теплообмена для заданных величин  $b$  и  $B$ . Кроме того, если  $(Bb^{-1})^2 > 2$ , то наличие второго колебания также приводит к интенсификации теплообмена независимо от величины  $\theta_1$ . Когда соотношение (14) не выполняется, наличие второго колебания ухудшает теплообмен по сравнению со случаем простого звукового поля, при этом может реализоваться такая ситуация, когда присутствие второго колебания полностью подавляет конвективный теплообмен. Это произойдет в случае, когда

$$(15) \quad 1 + 2B^2b^{-2} \cos 2\theta_1 + B^4b^{-4} = 0$$

или

$$B = b, \theta_1 = \pi(2n + 1)/2 \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Таким образом, в случае, когда плоскости двух колебаний перпендикулярны друг другу, а амплитудно-частотные соотношения подчиняются уравнению (15), цилиндр, помещенный в сложное звуковое поле, не обменивается энергией с окружающим пространством. Это означает, что процесс передачи тепла конвекцией происходит значительно медленней, чем теплопроводностью. Такая, на первый взгляд, странная картина объясняется тем, что при вышеназванных условиях внешние вторичные

течения, генерируемые каждым колебательным движением, с точностью до членов порядка  $O(\delta_{ak}/a)$  компенсируют друг друга.

Рассмотрим случай одинаковых частот. Поместив систему координат в точку набегания внешних вторичных течений и используя соотношение (32) работы [2], а также (7), уравнение (9) запишем в виде

$$(16) \quad 3N_2 [\sin(\sigma_2 \pm \beta) \mp A] \frac{\partial t_{00}}{\partial \sigma_2} - 3N_2 Y \cos(\sigma_2 \pm \beta) \frac{\partial t_{00}}{\partial Y} = \frac{\partial^2 t_{00}}{\partial Y^2},$$

где  $\beta = \arcsin A$ ;  $A = (2B \sin \theta_1 \cdot \sin \varphi)/N_2$ ;

$$N_2 = [(1 + B^2 \cos 2\theta_1 + 2B \cos \varphi \cdot \cos \theta_1)^2 + (B^2 \sin 2\theta_1 + 2B \sin \theta_1 \cos \varphi)^2]^{1/2};$$

$$\sigma_2 = \pm [2\theta - \beta - \arctg(D/C) - \pi]; \quad D = B \sin \theta_1 \cdot \cos \varphi +$$

$$+ \frac{1}{2} B^2 \sin 2\theta_1; \quad C = \frac{1}{2} + B \cos \theta_1 \cdot \cos \varphi + \frac{1}{2} B^2 \cos 2\theta_1,$$

здесь знак плюс относится к случаю, когда течение жидкости вблизи поверхности происходит по часовой стрелке, а знак минус — против часовой стрелки.

Вводя переменную

$$x_2 = \left(\frac{3N_2}{4}\right)^{1/2} Y \frac{\sin(\sigma_2 \pm \beta) \mp A}{[\sqrt{1 - A^2 - \cos(\sigma_2 \pm \beta) \mp A\sigma_2}]^{1/2}},$$

уравнение (16) сведем к обыкновенному дифференциальному уравнению, решение которого описывается соотношением (11) с той лишь разницей, что вместо  $x_1$  необходимо подставить  $x_2$ . Тогда выражение для локального и интегрального коэффициента теплообмена примет вид

$$(17) \quad Nu_a = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/2} (\text{PrRe}_{\text{ст}})^{1/2} N_2^{1/2} \frac{\sin(\sigma_2 \pm \beta) \mp A}{[\sqrt{1 - A^2 - \cos(\sigma_2 \pm \beta) \mp A\sigma_2}]^{1/2}},$$

$$\overline{Nu}_a = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/2} (\text{PrRe}_{\text{ст}})^{1/2} N_2^{1/2} [(2\sqrt{1 - A^2} + 2A\beta - A\pi)^{1/2} + (2\sqrt{1 - A^2} + 2A\beta - A\pi)^{1/2}].$$

На фигуре представлено распределение локального коэффициента теплообмена по поверхности цилиндра для различных значений разности фаз ( $a - \varphi = 0$ ,  $b - \varphi = 45^\circ$ ), при этом

$$(\varepsilon^2 \text{Pr}) \ll 1, \quad \omega_1 = \omega_2, \quad A_1 = A_2.$$

$B = 1$ ,  $\theta_1 = 90^\circ$ . При определенных условиях распределение локального коэффициента теплообмена не является симметричным относительно линии, проведенной через точку набегания внешних вторичных течений и центр цилиндра. Эта асимметрия обусловлена наличием крупномасштабного циркулирующего движения, интенсивность которого характеризуется параметром  $A$ . Когда  $A = 0$ , крупномасштабное течение отсутствует и характер вторичных течений, а также распределение локального коэффициента теплообмена совпадает с точностью до поправочного множителя с аналогичными явлениями, происходящими в простом звуковом поле (см. фигуру, а). В частности, если  $B = 0$ , т. е. второе колебание отсутствует, то  $A = 0$ ,  $N_2 = 1$  и выражения (17) сводятся к (13).

Исключая из рассмотрения случай  $B = 0$ , можно сказать, что коэффициент теплоотдачи в сложном звуковом поле будет максимальным при  $\theta_1 = \varphi = 0$ , при этом

$$\overline{Nu}_a = 0,88(\text{Pr Re}_{\text{ср}})^{1/2}(1 + B),$$

т. е. теплоотдача определяется суммарной амплитудой скорости.

В случае, когда  $B = 1$ ,  $\theta_1 = 0$ ,  $\varphi = \pi$  (или  $\theta_1 = \pi$ ,  $\varphi = 0$ ), колебательное движение отсутствует, так как колебания компенсируют друг друга, поэтому отсутствует стационарное движение жидкости. Это приводит к тому, что  $\overline{Nu}_a = 0$ .

Итак, наличие крупномасштабного циркулирующего течения приводит к асимметрии в распределении локального коэффициента теплоотдачи, при этом по мере увеличения интенсивности этого движения (параметр  $A$  увеличивается) происходит подавление течений Шлихтинга и при  $A > 1$  области возвратного течения отсутствуют. Укажем, что соотношения (17) получены для  $A \leq 1$ . Можно показать, что по мере увеличения  $A$  происходит ухудшение теплообмена и при  $B = 1$ ,  $\theta_1 = \varphi = 90^\circ$  теплообмен отсутствует. Действительно, в этом случае уравнение (9) сводится к уравнению типа теплопроводности

$$-3 \frac{\partial t_{00}}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 t_{00}}{\partial Y^2}.$$

Так как в граничных условиях (10) отсутствует зависимость от  $\theta$ , то уравнение сведется к уравнению

$$d^2 t_{00} / dY^2 = 0,$$

решение которого, ограниченное на бесконечности, является тривиальным ( $t_{00} = 0$ ).

Когда процесс теплообмена определяется внутренними вторичными течениями, поле температур описывается уравнением (5), причем если  $(\varepsilon^2 \text{Pr}) \gg 1$ , то тепловой пограничный слой значительно меньше слоя Стокса и его поперечный размер порядка  $O[a(\varepsilon^2 \text{Pr})^{-1/3}]$ . Учитывая это, введем переменные, соответствующие тепловому пограничному слою

$$h = \Delta^{-1} \eta, t_0(h, \theta) = F_0(\eta, \theta), \Delta = (\varepsilon^2 \text{Pr})^{-1/3}.$$

Разложим функцию тока  $m_{10}^{\text{ср}}$  и температуру  $t_0$  в ряд

$$(18) \quad m_{10}^{\text{ср}} = \Delta^2 \Omega_1 + \Delta^3 \Omega_2 + O(\Delta^4), \quad t_0 = t_{00} + \Delta t_{01} + O(\Delta^2),$$

где

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} h^2 \left( \frac{\partial^2 m_{10}^{\text{ср}}}{\partial h^2} \right)_{h=0}; \quad \Omega_2 = \frac{1}{6} h^3 \left( \frac{\partial^3 m_{10}^{\text{ср}}}{\partial h^3} \right)_{h=0}.$$

Подставив (18) в (5) и ограничившись членами первого порядка по  $\Delta$ , получим

$$(19) \quad \frac{\partial(\Omega_1, t_{00})}{\partial(h, \theta)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 t_{00}}{\partial h^2}$$

с граничными условиями

$$t_{00} = 0 \text{ при } h \rightarrow \infty, \quad t_{01} = 1 \text{ при } h = 0.$$

Рассмотрим случай различных частот. Поместим систему координат в точку набегания внутренних течений на поверхность цилиндра. Тогда, вводя переменную

$$\sigma_3 = 2\theta - \operatorname{arctg} \left[ \frac{B^2 b^{-1} \sin 2\theta_1}{1 + B^2 b^{-1} \cos 2\theta_1} \right],$$

а также используя выражение (24) работы [2], уравнение (19) запишем в виде

$$2hN_3 \sin \sigma_3 \frac{\partial t_{00}}{\partial \sigma_3} - h^2 N_3 \cos \sigma_3 \frac{\partial t_{00}}{\partial h} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 t_{00}}{\partial h^2},$$

решением которого является

$$(20) \quad t_{00} = 1 - \frac{5}{\Gamma(1/3)} \int_0^{\sigma_3} e^{-\xi^3} d\xi,$$

где

$$N_3 = (1 + 2B^2 b^{-1} \cos 2\theta_1 + B^4 b^{-2})^{1/2};$$

$$\sigma_3 = \left( \frac{4N_3}{9} \right)^{1/2} h \frac{\sin^{1/2} \sigma_3}{\left[ \int_0^{\sigma_3} \sin^{1/2} \chi d\chi \right]^{1/3}}.$$

Тогда локальный и интегральный коэффициенты теплообмена примут вид

$$(21) \quad \text{Nu}_a = 0,6 \left( \frac{A_1^2 a}{V \nu \omega_1 \mathcal{D}} \right)^{1/3} (1 + 2B^2 b^{-1} \cos 2\theta_1 + B^4 b^{-2})^{1/6} \frac{\sin^{1/2} \sigma_3}{\left( \int_0^{\sigma_3} \sin^{1/2} \chi d\chi \right)^{1/3}},$$

$$\overline{\text{Nu}}_a = 0,52 \left( \frac{A_1^2 a}{V \nu \omega_1 \mathcal{D}} \right)^{1/3} (1 + 2B^2 b^{-1} \cos 2\theta_1 + B^4 b^{-2})^{1/6}.$$

Если второе колебательное движение отсутствует ( $B = 0$ ), то выражения (21) сводятся к соотношениям, описывающим процесс теплообмена в простом звуковом поле [1, 3]

$$(22) \quad \text{Nu}_a = 0,6 \left( \frac{A_1^2 a}{V \nu \omega_1 \mathcal{D}} \right)^{1/3} \frac{\sin^{1/2} 2\theta}{\left( \int_0^{2\theta} \sin^{1/2} \chi d\chi \right)^{1/3}},$$

$$\overline{\text{Nu}}_a = 0,52 \left( \frac{A_1^2 a}{V \nu \omega_1 \mathcal{D}} \right)^{1/3}.$$

Однако полученный коэффициент в выражении (22) для интегрального коэффициента теплообмена отличается от результата работы [3]. Поэтому приведем некоторые подробности.

Поскольку выражение для локального коэффициента теплообмена (22) совпадает с [1], интегральный коэффициент теплообмена определится в виде

$$\overline{Nu}_a = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} Nu_a d\theta = \frac{0,6}{\pi} \left( \frac{A_1}{\sqrt{1-\cos 2\theta_1}} \frac{a}{D} \right)^{1/3} \int_0^{\pi} \frac{\sin^{1/2} k dk}{\left( \int_0^k \sin^{1/2} \chi d\chi \right)^{1/3}},$$

где  $k = 2\theta$ . Интеграл вычислим следующим образом. Обозначим

$$z = \int_0^k \sin^{1/2} \chi d\chi, \quad dz = \sin^{1/2} k dk,$$

тогда

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^{1/2} k dk}{\left( \int_0^k \sin^{1/2} \chi d\chi \right)^{1/3}} = \int_0^{\pi} \frac{dz}{z^{1/3}} = \frac{3}{2} z^{2/3} \Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2} \left( \int_0^{\pi} \sin^{1/2} \chi d\chi \right)^{2/3}.$$

Воспользовавшись [4]

$$\int_0^{\pi} \sin^{1/2} \chi d\chi = \frac{\pi^{1/2} \Gamma(3/4)}{\Gamma(5/4)} \simeq \frac{4}{3} \pi^{1/2},$$

получим искомый результат.

Из соотношений (22) следует, что аналитические зависимости, описывающие теплообмен цилиндра в сложном звуковом поле для случая различных частот колебаний, отличаются от аналогичных соотношений для простого звукового поля наличием дополнительного сомножителя вида

$$(1 + 2B^2 b^{-1} \cos 2\theta_1 + B^4 b^{-2})^{1/6},$$

при этом распределение локального коэффициента теплообмена по поверхности цилиндра остается симметричным. Можно показать, что если  $B^2 b^{-1} > -2 \cos 2\theta_1$ , то наличие второго колебательного движения приводит к интенсификации процесса теплообмена, причем при  $\theta_1 = 0$  или  $\pi$  происходит максимальная интенсификация для заданных величин  $b$  и  $B$ . Когда же плоскости колебаний перпендикулярны друг другу, а амплитудно-частотные характеристики удовлетворяют соотношению  $B^2 = b$ , наличие второго колебательного движения полностью подавляет конвективный теплообмен.

Рассмотрим случай одинаковых частот (при этом по-прежнему полагается  $(\varepsilon^2 Pr) \gg 1$ ). Поместив систему координат в точку набегающих вторичных течений и используя соотношения (31) работы [2], уравнение (19) запишем в виде

$$(23) \quad 2hN_2 [\sin(\sigma_4 \pm \beta) \mp A] \frac{\partial t_{00}}{\partial \sigma_4} - h^2 N_2 \cos(\sigma_4 \pm \beta) \frac{\partial t_{00}}{\partial h} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 t_{00}}{\partial h^2},$$

где  $\sigma_4 = \pm(2\theta - \arcsin A - \operatorname{arctg}(D/C))$ .

Вводя переменную

$$[x_4 = \left( \frac{4N_2}{9} \right)^{1/3} h \frac{[\sin(\sigma_4 \pm \beta) \mp A]^{1/2}}{\left[ \int_0^{\sigma_4} [\sin(\chi \pm \beta) \mp A]^{1/2} d\chi \right]^{1/3}},$$

уравнение (23) сведем к обыкновенному дифференциальному уравнению



решение которого описывается соотношением (20), где  $x_3$  необходимо заменить на  $x_1$ . Тогда выражение для локального коэффициента теплоотдачи примет вид

$$(24) \quad Nu_a = 0,6 \left( \frac{A_1^2}{\sqrt{\nu \omega_1}} \frac{a}{D} \right)^{1/3} N_2 \frac{[\sin(\sigma_4 \pm \beta) + A]^{1/2}}{\left[ \int_0^{\sigma_4} [\sin(\chi \pm \beta) + A]^{1/2} d\chi \right]^{1/3}}$$

Из (24) следует, что, как и в случае  $(\varepsilon^2 Pr) \ll 1$ , распределение локального коэффициента теплообмена по поверхности цилиндра является симметричным, что обусловлено наличием крупномасштабного циркулирующего течения.

Поступила 17 X 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Накоряков В. Е., Бурдуков А. П., Болдарев А. М., Терлеев П. Н. Тепло- и массообмен в звуковом поле. Новосибирск, изд. Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1970.
2. Репин В. Б. Вторичные течения возле цилиндра в сложном звуковом поле. — ПМТФ, 1977, № 6.
3. Davidson B. J. Heat transfer from a vibrating circular cylinder. — «Int. J. Heat and Mass Transfer», 1973, vol. 16, N 9.
4. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов. М., «Наука», 1973.

УДК 532.72

### О КОНВЕКТИВНОМ ТЕПЛОМАСОБМЕНЕ В ДВИЖУЩЕЙСЯ УПОРЯДОЧЕННОЙ СИСТЕМЕ КАПЕЛЬ (ПУЗЫРЕЙ) ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ ПЕКЛЕ

А. Д. Полянин, Ю. А. Сергеев

(Москва)

В задачах о конвективной диффузии в системе реагирующих капель (пузырей) при больших числах Пекле существенную роль играет структура особых линий тока, начинающихся и оканчивающихся на поверхностях капель [1—3]. При этом оказывается, что в потоке существуют цепочки капель, внутренний массообмен в которых сильно заторможен взаимодействием диффузионных следов и пограничных слоев капель, принадлежащих цепочке.

1. Рассмотрим процесс конвективной диффузии в концентрированной системе осаждающихся сферических капель или всплывающих пузырей радиуса  $a$ , движущихся в безграничном объеме неподвижной жидкости. Будем считать, что обтекание отдельной частицы системы ламинарно, а скорость движения  $U$  всех капель (пузырей) одинакова. Пусть при своем движении капли образуют прямолинейные цепочки, расстояние между каплями в каждой из цепочек постоянно и равно  $b$ , а расстояние между соседними цепочками по порядку величины то же, что и расстояние между частицами в одной цепочке.

Описанная ситуация реализуется на практике при осуществлении, например, процессов экстракции и барботаж. В первом случае сделан-