

3. Научные основы производства катализаторов / Под ред. Р.М. Буянова. — Новосибирск: Наука, 1982.
4. Мерджанов А.Г. Самораспространяющийся высокотемпературный синтез // Физическая химия. Современные проблемы / Под ред. Я.М. Колотыркина. — М.: Химия, 1983. — С. 6—44.
5. Мерджанов А.Г., Боровинская И.П. // ДАН СССР. — 1972. — 204, № 2. — С. 366—369.
6. Индуцируемые лазером химические реакции / Под ред. Дж. Стейнфелда. — М.: Мир, 1984. — 312 с.
7. Sawano K., Haggerty J.S., Bowen H.K. // J. Ceram Soc. Japan. — 1987. — 95, N 1. — P. 64—69.
8. Азатян В.В., Айвазян Р.Г., Васильева Л.Л. и др. Заявка № 3992737, приоритет от 10.09.1985 г. "Способ получения слоев двуоксида кремния".
9. Рубцов Н. М., Азатян В.В., Нагорный С.С. и др. Патент РФ № ... по заявке № 4947204/25 от 18.06.91, положительное решение от 29.06.92 г. "Способ получения тонких пленок диоксида кремния".
10. Мерджанов А.Г., Китаин М.М., Гольдшлегер У.И. и др. // Докл. АН СССР. — 1977. — 237, № 2. — С. 391.
11. Мамян С.С., Мерджанов А.Г. Термодинамический анализ возможности получения нитридов и карбидов металлов из галогенидов в режиме горения. Препринт, Черноголовка, 1978.
12. Термодинамические свойства индивидуальных веществ: Справочник / Под ред. В.П. Глушко. — М.: Изд-во АН СССР, 1978.
13. Девярых Г.Г., Зорин А.Д. Летучие неорганические гидриды особой чистоты. — М.: Наука, 1974. — 205 с.
14. Васильева Л.Л., Гиновкер А.С., Попов В.П. и др. // Изв. СО АН СССР. Сер. хим. — 1979. — Вып. 5. — С. 54—57.
15. Hartman J.R., Famil-Ghiriha S., Ring M.A. et al. // Combust. Flame. — 1987. — 68. — P. 43—56.
16. Laurence G. Britton Plant / Operations Progress. — 1990. — 9, N 1. — P. 16—38.
17. Schalch D., Scharmann A., Wolfrat R. // Thin Solid Films. — 1985. — 124. — P. 301—308.
18. Киселев А.В., Лыгин В.И. Инфракрасные спектры поверхностных соединений. — М.: Наука, 1972. — С. 459.
19. Григ С., Синг К. Адсорбция, удельная поверхность, пористость / Пер. с англ. — М.: Мир, 1970. — 407 с.
20. Семенов Н.Н. Цепные реакции. — М.: Наука, 1986. — 535 с.
21. Барятов А.Н., Вогман Л.П., Петрова Л.Д. // ФГВ. — 1969. — 5, № 4. — С. 592—594.
22. Эмануэль Н.М., Кнорре Д.Г. Курс химической кинетики. — М.: Высш. шк., 1974. — 400 с.
23. Кондратьев В.Н., Никитин Е.Б. Химические процессы в газах. — М.: Наука, 1981. — 284 с.
24. Азатян В.В., Айвазян Р.Г., Васильева Л.Л. и др. // Кинетика и катализ. — 1984. — 25, № 5. — С. 1033.
25. Азатян В.В., Айвазян Р.Г., Калканов В.А. и др. // Там же. — 1985. — 26, № 6. — С. 1292.
26. Азатян В.В., Айвазян Р.Г., Калканов В.А. и др. // Химическая физика. — 1985. — 4, № 10. — С. 1409—1416.

142432, п. Черноголовка,  
ИСМ РАН

Поступила в редакцию  
4/ХІ 1993

УДК 532.529

А.В. Федоров

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ АЭРОВЗВЕСИ С УЧЕТОМ НЕРАВНОВЕСНОГО ПЛАВЛЕНИЯ (КРИСТАЛЛИЗАЦИИ)

В рамках механики гетерогенных сред, испытывающих фазовые превращения, предложена математическая модель для описания течения смеси газа и жидких (твердых) частиц металла. Принимается во внимание различие скоростей, температур фаз; неравновесность фазового перехода. В качестве примера решена задача о структуре ударной волны в аэровзвеси плавящихся частиц. Выведены условия, определяющие монотонное и немонотонное поведение температуры смеси. Приведены численные данные, иллюстрирующие выявленные типы движения газовзвеси.

Течение смесей газа и твердых (жидких) частиц с плавлением (кристаллизацией) фаз имеет место в различных технических устройствах, где в качестве рабочих тел используются аэровзвеси металлов. Примерами могут

служить течение продуктов горения металлизированных твердых топлив в трактах различных двигателей, движение гетерогенных сред при катастрофических взрывах смесей металлических частиц в химической промышленности, истечение от нагреваемой поверхности продуктов взаимодействия лазерного излучения с веществом.

Для математического описания поведения таких газозвесей естественно использовать методы механики гетерогенных сред с фазовыми переходами [1]. При этом выписываются законы сохранения массы, импульса и энергии фаз с источниками членами, описывающими массоперенос, силовое и тепловое взаимодействие. Основная трудность для исследователей заключается в замыкании этих моделей, т.е. определении связи микроуровня описания переноса массы с макроуровнем — средними характеристиками смеси.

Рассмотрим смесь, состоящую из конденсированной среды, находящейся в твердом и жидком состояниях, и газа. Для математического описания некоторых частных случаев подобных гетерогенных систем в настоящее время имеются модели различной сложности. Используем развиваемые в них представления и понятия для замыкания предлагаемой ниже математической модели аэросмеси.

В первой группе моделей полагается, что в единичном объеме, заполненном смесью, отсутствует газовая фаза. Тогда процесс фазового перехода между жидкой и твердой фазами описывается таким параметром, как температура фазы в соответствующем состоянии. Считается, что скорость фаз равна нулю [2, 3].

Вторая группа моделей основана на учете движения жидкой фазы, фильтрующейся через совокупность неподвижных мелких частиц — дендритов. Течение жидкой фазы может описываться законом Дарси либо в полной постановке уравнениями Навье — Стокса [4—6].

Третья группа моделей, описывающая поведение смеси жидкой и твердой фаз, учитывает напряженно-деформированное состояние твердого тела, подверженного фазовому переходу. Относительно тела полагается, что его состояние может быть описано в рамках механики термовязкоупругих или упругопластических деформаций [7 — 10]. Считается, что тело образовано матрицей слабозаимодействующих частиц, которые под действием внешних напряжений и фазового перехода плавятся. При завершении фазового перехода среда переходит в некоторое жидкоподобное состояние, а тензор напряжений становится шаровым.

Эти три группы математических моделей основаны на феноменологическом подходе. Фазовый переход описывается дифференциальным уравнением или граничным условием для истинных параметров смеси. В этих теориях используется понятие линейной скорости кристаллизации (плавления)  $w = dr/dt$ , где  $r = r(t)$  — траектория границы фазового превращения либо размер сферического образования фазы, претерпевающей фазовый переход. На основе принятого структурного вида зависимости

$$w = w(\Delta T, T_s, p, \dots),$$

где  $\Delta T = T_s - T$  — переохлаждение;  $T_s$  — температура равновесия фаз;  $p$  — давление, производится замыкание соответствующей модели. Выражение для  $w$  может служить замыканием и в моделях механики гетерогенных сред, если удастся связать микроуровень описания фазового перехода со средними характеристиками смеси.

Известны различные соотношения для линейной скорости кристаллизации (плавления). В дальнейшем используем

$$w = K\Delta T,$$

где  $K$  — кинетический коэффициент, характеризующий процессы обмена между твердой и жидкой фазами,

$$K = DL/\alpha T_s^2 k,$$

$D$  — коэффициент диффузии для перехода через границу фаз;  $\alpha$  — длина скачка атомов;  $k$  — постоянная Больцмана [11, 12].

Анализ этих математических моделей и изучаемых в дальнейшем физических задач показывает, что для адекватного описания течений газозвешей необходимо принимать во внимание различие скоростей и температур фаз, неравновесность фазового перехода.

#### ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТЕЧЕНИЯ СМЕСИ ГАЗА И ТВЕРДЫХ (ЖИДКИХ) ЧАСТИЦ С УЧЕТОМ ПЛАВЛЕНИЯ (КРИСТАЛЛИЗАЦИИ)

Рассмотрим смесь газа и частиц, занимающих парциальные доли в единичном объеме. Под действием температуры газа твердые частицы могут проплаваться с поверхности. Тогда уравнения сохранения массы, импульса и энергии, записанные для каждой фазы, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 u_1}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 u_2}{\partial x} &= \kappa_2, \\ \frac{\partial \rho_3}{\partial t} + \frac{\partial \rho_3 u_3}{\partial x} &= \kappa_3, \\ \frac{\partial \rho_1 u_1}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_1 u_1^2 + m_1 p)}{\partial x} &= p \frac{\partial m_1}{\partial x} + F_{21} + F_{31}, \\ \frac{\partial (\rho_2 + \rho_3) u_2}{\partial t} + \frac{\partial ((\rho_2 + \rho_3) u_2^2 + (m_2 + m_3) p)}{\partial x} &= p \frac{\partial (m_2 + m_3)}{\partial x} - R, \\ \frac{\partial \rho_1 E_1}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_1 E_1 u_1 + m_1 p u_1)}{\partial x} &= -p \frac{\partial m_1}{\partial t} + q_{21} + q_{31} + R w, \\ \frac{\partial \rho_2 E_2}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_2 E_2 u_2 + m_2 p u_2)}{\partial x} &= -p \left( \frac{\partial m_2}{\partial t} - \frac{\kappa_2}{\rho_{22}} \right) + q_{12} + q_{32} - \\ &- \zeta_2 R w + \kappa_2 (e_{32} + u_2^2/2), \\ \frac{\partial \rho_3 E_3}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_3 E_3 u_3 + m_3 p u_3)}{\partial x} &= -p \left( \frac{\partial m_3}{\partial t} - \frac{\kappa_3}{\rho_{33}} \right) + q_{13} + q_{23} - \\ &- \zeta_3 R w + \kappa_3 (e_{23} + u_3^2/2), \\ q_{12} &= -(T_2 - T_1) \rho_2 c_{v2} / \tau_{12}, \quad q_{31} = 0, \quad u_2 = u_3. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $u_1, u_2$  — скорости;  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  — средние плотности;  $E_i = e_i + u_i^2/2$  — полные энергии;  $e_i$  — внутренние энергии фаз;  $p$  — давление смеси;  $\kappa_2 + \kappa_3 = 0$ ;  $\kappa_i$  — источники фазового перехода (индексы  $i = 1, 2, 3$  используются для обозначения параметров газа, жидких и твердых частиц);

$$\begin{aligned} F_{12} &= -\rho_2 C_D \text{Re}(u_2 - u_1) / 24 \tau_s; \quad F_{13} = -\rho_3 C_D \text{Re}(u_2 - u_1) / 24 \tau_s; \\ F_{21} + F_{31} &= -(\rho_3 + \rho_2) C_D \text{Re}(u_1 - u_2) / 24 \tau_s = R = -(F_{12} + F_{13}); \\ F_{32} &= F_{23} = 0, \end{aligned}$$

$C_D$  — коэффициент сопротивления сферы в потоке газа;  $\text{Re}$  — относительное число Рейнольдса;  $\tau_s$  — время стоксовой релаксации;  $\zeta_i = \rho_i / (\rho_2 + \rho_3)$ ,  $i = 2, 3$ ;  $\rho_i$  — истинная плотность фазы;  $w = \beta u_1 + (1 - \beta) u_2$ ;  $\beta \in (0, 1)$ ;  $e_{32}, e_{23}$  — источники энергии от фазового перехода [1];  $q_j$  — функции, описывающие теплообмен между фазами, такие, что  $q_{12} + q_{21} = q_{31} + q_{13} = 0$  и  $\kappa_2 (i_{32} - i_{23}) + q_{32} + q_{23} = 0$ . Задавая  $q_{12}, q_{13}, q_{23}$ , найдем  $q_{21}, q_{31}, q_{32}$ .

Последнее условие получено из закона сохранения полной энергии смеси, которое находится путем сложения уравнений энергии и имеет вид

$$\Sigma(\rho_i E_i)_t + (\rho_i u_i E_i + p m_i u_i)_x = R \kappa (1 - \xi_2 - \xi_3) + (q_{12} + q_{21}) + (q_{31} + q_{13}) + \kappa_2 (l_{32} - l_{23}) + q_{32} + q_{23} = 0.$$

Дополним (1) уравнениями состояния

$$p = \rho_{11} R_1 T_1, \rho_{22} = r, \rho_{33} = s, r, s = \text{const.} \\ j = 2, 3; \quad (2)$$

$$e_1 = c_{v1}(T_1 - T_0) + e_{10}, e_j = c_{vj}(T_j - T_0) + e_{j0}.$$

Система (1), (2), будет полной для описания течения смеси. Заметим, что поскольку  $r, s \gg 1$ , то  $p/\rho_{ii}$  для  $i = 2, 3$  много меньше  $e_i$  и можно полагать далее  $e_i \approx i_i$  ( $i_i$  — энтальпия жидкой и твердой фазы).

Теплота фазового перехода [1]

$$l(p) = i_{2s} - i_{3s} = e_2(p, T_s(p)) - e_3(p, T_s(p)).$$

Подставим сюда величины из (2) и получим

$$l(p) = c_{v2}(T_s - T_0) + e_{20} - c_{v3}(T_s - T_0) - e_{30} = (c_{v2} - c_{v3})(T_s(p) - T_0) + e_{20} - e_{30}.$$

Если из эксперимента независимо найдена теплота фазового перехода, то отсюда следует определение

$$e_{30} = e_{20} - l_0 + (c_{v2} - c_{v3})(T_{s0} - T_0), l_0 = l(p_0).$$

**З а м е ч а н и е.** Если  $c_{v2}T_0 = e_{20}$ ,  $T_{s0} = T_0$  или  $c_{v2} = c_{v3}$ , то  $e_2 = c_{v2}T_2$ ,  $e_3 = c_{v3}T_3$ ,  $l_0 = c_{v2}T_3 - l_0$ .

Вычтем одно равенство из другого и получим выражение

$$e_2 = e_3 + c_{v2}(T_2 - T_3) + l_0, \quad (3)$$

которое с точностью до обозначения  $L = l_0$  совпадает с замыкающим уравнением состояния из [11].

Выведем кинетическое уравнение плавления в терминах параметров смеси. Воспользуемся для этого представлением  $m_3 = 4\pi r_3^3 n_3 / 3$ ,  $r_3$  — радиус твердой частицы,  $n_3$  — их количество в объеме смеси. Уравнение сохранения массы третьей фазы может быть записано в виде  $\rho \partial \xi_3 / \partial t_2 = \kappa_3 \equiv \frac{3\rho_3}{r_3} \frac{\partial r_3}{\partial t_2}$ .

Постулируем для твердых частиц линейную кинетику с полным проплавлением, когда при небольших перегревах имеем

$$\frac{dr_3}{dt_2} = - (T_2 - T_s) r_3 / T_s \tau_3, \quad (4)$$

где  $\tau_3$  — время релаксации плавления, которое можно определить по коэффициенту  $K$ , упомянутому выше. Тогда

$$\kappa_3 = - 3(T_3 - T_s) \rho_3 / T_s \tau_3 \quad (5)$$

определена.

#### СТРУКТУРА УДАРНОЙ ВОЛНЫ В СМЕСИ МЕЛКИХ ЧАСТИЦ И ГАЗА С УЧЕТОМ НЕРАВНОВЕСНОГО ПЛАВЛЕНИЯ

Рассмотрим течение смеси газа и твердых частиц, при котором скорости и температуры фаз одинаковы. Допустим, что в одномерном пространстве распространяется ударная волна (УВ), за фронтом которой давление и температура возрастают, так что возможно плавление твердых частиц.

Уравнения (1), (2), записанные в сопутствующей УВ системе координат, имеют вид

$$\begin{aligned} \rho u &= C_1, \quad p + C_1 u = C_2, \quad e + pV + u^2/2 = C_3, \\ e &= \bar{c}_v T - L\xi_3, \quad \bar{c}_v = \bar{\alpha}c_{v1} + \xi_2 c_{v2} + \xi_3 c_{v3}, \\ p &= \bar{\alpha}RT/W, \quad W = V - \beta - \delta\xi_3, \quad \delta = s^{-1} - r^{-1}, \\ \xi_2 + \xi_3 &= \alpha, \quad u \frac{d\xi_3}{dx} = -3(T - T_e)(\xi_3/\tau_3)/T_e = \kappa. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $C_i$  — потоки массы, импульса и энергии, взятые перед фронтом УВ,  $\alpha = (\rho_{20} + \rho_{30})/\rho_0$ ,  $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$ ,  $\beta = \alpha/s$ ,  $T_e = T_s = T_0$  — температура перед фронтом УВ, равная температуре плавления,  $\tau_3$  — время релаксации плавления,  $\kappa$  определена по (5),  $V = 1/\rho$ .

Уравнения (6) удовлетворяют условиям стационарности вверх и вниз по потоку от УВ для вектора решения  $\Phi(\rho, u, p, T, \xi_3)$ :

$$\Phi \rightarrow \Phi_{0,k}, \quad \dot{\Phi} \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \pm \infty. \quad (7)$$

Индексы нуль и  $k$  используются для обозначения величин перед и за фронтом УВ. Таким образом, решение задачи определения структуры УВ, обусловленной плавлением твердых частиц в высокотемпературном потоке газа за ее фронтом, свелось к краевой задаче (6), (7). Приведем (6) к одному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{du}{dx} = - \frac{(C_1(\nu_T(L - \Delta C_v T) + \Delta C_v p_{\xi_3}))}{(\bar{c}_v \rho^2 (u^2 - c_{ef}^2))} \frac{d\xi_3}{dx}, \quad (8)$$

где  $\bar{c}_{ef}$  — равновесно-замороженная скорость звука в смеси, равновесной по скоростям и температурам, замороженной по фазовому переходу,  $p_{\xi_3} = \partial p / \partial \xi_3(V, T, \xi_3)$ ,  $p_T = \partial p / \partial T(V, T, \xi_3)$ ,  $\Delta C_v = c_{v3} - c_{v2}$ . Выбирая  $c_{v3} = c_{v2}$ ,  $\kappa = -(\xi_3 - \xi_e(T))/\tau_3$ , получим, что (8) совпадает с уравнением, использованным в [11] для описания структуры УВ в трехфазной смеси газа, жидких и твердых частиц.

Определим состояние за замороженной ударной волной, при этом параметры течения будем отмечать индексом  $\sim$ . Примем для простоты  $\delta \ll 1$ ,  $\Delta c_v = 0$ . Тогда уравнение состояния может быть записано в виде  $pV = RT$ ,  $R = \bar{\alpha}R$ . Будем иметь в виду также кинетический закон плавления в форме (5), отличной от [11]. Итак  $\bar{u}$  — скорость смеси за замороженной УВ определяется из уравнения

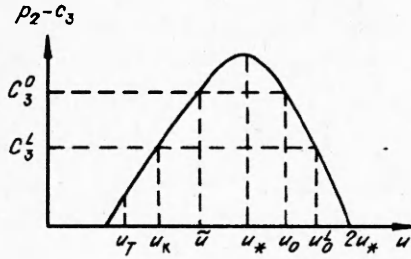
$$\begin{aligned} -(\gamma + 1)/(\gamma - 1)u^2/2 + \gamma C_{21}u/(\gamma - 1) - C_3^0 &= 0, \\ C_3^0 &= -(\gamma + 1)/(\gamma - 1)u_0^2/2 + \gamma C_{21}u_0/(\gamma - 1), \\ C_{21} &= C_2/C_1. \end{aligned}$$

Здесь величины  $\gamma = c_p/c_v$ ,  $c_p = \bar{\alpha}c_{p1} + \alpha c_{p2}$ ,  $c_v = \bar{\alpha}c_{v1} + \alpha c_{v2}$  суть удельные теплоемкости псевдогаза, равновесного по динамическим, термодинамическим параметрам и замороженного по плавлению. Отметим, что в течении смеси такого рода равновесная и замороженная скорости звука в начальном состоянии не различаются.

Для  $\bar{u}$  существует представление  $\bar{u} = 2\gamma/(\gamma + 1)C_{21} - u_0$ , которое позволяет получить оценку

$$\bar{u} > u_T,$$

где  $u_T = C_{21}/2$  — скорость, при которой функция  $T = T(u)$ , определяемая из интегралов (6), имеет максимум  $T_{\max}$ . Данная оценка справедлива при  $M_0^2 < M_T^2 = (3\gamma - 1)/(3 - \gamma)$ , что позволяет сформулировать



У т в е р ж д е н и е 1. Если  $1 < M_0 < M_T$ , то скорость за замороженной УВ больше скорости, при которой достигается максимум функции  $T = T(u)$ , и, возможно, температура смеси немонотонна; при  $M_0 > M_T$  будет  $\tilde{u} < u_T$  и температура смеси может быть монотонна.

Функция  $M_T = M_T(\gamma)$  монотонно возрастает, больше 1 при  $\gamma > 1$ , имеет разрыв второго рода при  $\gamma \rightarrow 3 - 0$ .

Покажем, что скорость за фронтом УВ в равновесном состоянии полного расплавления твердых частиц  $u_k$  может удовлетворять неравенству

$$u_k > u_T. \tag{9}$$

Величина  $u_k$  определяется из уравнения

$$p_2(u) = C_3^0 - L\xi_{30}, \tag{10}$$

$$p_2(u) = -(\gamma + 1)u^2/2/(\gamma - 1) + \gamma C_{21}u/(\gamma - 1).$$

Для выполнения неравенства  $u_k > u_T$  достаточно

$$p_2(u_T) < p_2(u_k).$$

Поскольку

$$p_2(u_T) = (3\gamma - 1)C_{21}^2/8(\gamma - 1).$$

$$p_2(u_k) = -(\gamma + 1)u_0^2/2/(\gamma - 1) + \gamma C_{21}u_0/(\gamma - 1) - L\xi_{30},$$

то предыдущее неравенство сводится к

$$L\xi_{30} < C_{21}^2 Q(Y)/2(\gamma - 1) \equiv L_T(M_0), \tag{11}$$

где  $Y = u_0/C_{21}$ ;  $Q(Y) = -(1 + \gamma)Y^2 + 2\gamma Y - (3\gamma - 1)/4$ . Функция  $Q(Y)$  положительна при  $Y \in (0, 5, (3\gamma - 1)/(1 + \gamma)2)$ , откуда следует, что для выполнения (9)  $M_0^2 \in (\gamma^{-1}, M_T^2)$ . Картина расположения величин  $u_T, u_k, \tilde{u}, u_0, u_0^L$  ( $u_0^L$  — псевдона начальная скорость смеси, соответствующая конечной скорости  $u_k$  в силу уравнения (10)) приведена на рис. 1. Отсюда  $\tilde{u} \geq u_k$ .

У т в е р ж д е н и е 2. Если  $1 < M_0 < M_T, L\xi_{30} < L_T$ , то выполняется система неравенств  $\tilde{u} > u_k > u_T$ , означающая, что температура смеси в зоне релаксации за фронтом замороженной УВ монотонно возрастает, оставаясь меньше  $T_{max}$ . При  $M_0 < M_T, L\xi_{30} > L_T$  имеем  $\tilde{u} > u_T > u_k$ , и температура за фронтом УВ немонотонна. Если же  $M_0 > M_T$ , то  $u_k < \tilde{u} < u_T$  без условий на  $L$ , и температура монотонно убывает.

Рассмотрим некоторые аспекты качественного поведения динамических и термодинамических параметров смеси во фронте УВ. В таблице приведены данные расчетов, иллюстрирующие влияние объемной концентрации твердой фазы  $m_{30}$  на параметры за фронтом замороженной УВ (отмечены индексом  $\sim$ ) и равновесной УВ в конце зоны релаксации (отмечено индексом  $k$ ). Видно, что при фиксированном значении скорости набегающего потока смеси  $u_0$  с ростом содержания частиц возрастают термодинамические параметры

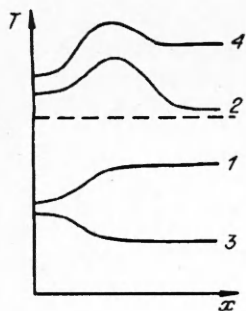


Рис. 2.

Вариант	$m_{30} \cdot 10^5$	$C_0$ , м/с	$\bar{u}$ , м/с	$u_T$ , м/с	$u_k$ , м/с	$L_T$ , Дж/кг	$T_k$ , К	$\bar{T}$ , К	$\gamma$	$M_T$	$M_0$	$\bar{p}$ , Па	$p_k$ , Па
1	1	484,8	454,4	403,8	408,6	454113,64	1126,3	1108,8	1,804	1,43	1,20	1,59	1,79
2	2	458,8	416,5	400,0	356,6	89573,5	1130,9	1142,4	1,67	1,34	1,27	1,78	2,06
3	3	438,3	385,2	397,6	319,4	-53189,5	1123,8	1167,8	1,58	1,29	1,34	1,98	2,30
4	4	421,4	360,5	393,1	290,5	—	1100,0	1172,5	1,51	1,25	1,38	2,11	2,46
5	1	$u_0 = 634,8$ м/с	446,1	420,0	410,2	278401,0	1218,2	1214,1	1,804	1,43	1,31	1,91	2,09

$\bar{p}$ ,  $\bar{T}$  за фронтом замороженной УВ. Это связано с тем, что с добавлением частиц осуществляется более мощное торможение смеси. Например, скорость смеси  $\bar{u} = 454,37$  м/с при  $m_{30} = 10^{-5}$ , а при  $m_{30} = 4 \cdot 10^{-5}$   $\bar{u} = 360,49$  м/с. Аналогично влияние  $m_{30}$  и на  $u_k$ .

Однако величина скорости в точке перегиба температуры зависит от изменения количества частиц слабо: так  $\Delta u_T \approx 10$  м/с, по сравнению с  $\Delta \bar{u} \approx 94$  м/с ( $\Delta \varphi = \varphi(m_{30} = 10^{-5}) - \varphi(m_{30} = 4 \cdot 10^{-5})$ ,  $\varphi = \bar{u}, u_T$ ).

Рассмотрим далее изменение скорости, давления и других параметров в зоне релаксации за замороженной УВ. Возьмем для простоты случай  $\Delta c_V = 0$ ,  $p_{\xi_3} = 0$  и обозначим  $\varphi(u) = -(T - T_e) C_{1,p} L_3 \xi_3 / \sqrt{c_V \rho^2 / (u^2 - c_{ef}^2) T_e \tau_3}$ . Найдем величину  $\lambda(u) = d\varphi/du$  в начальной и конечной точках в виде

$$\lambda_0 = \varphi_0 / (T_0 - T_e) \left. \frac{dT}{du} \right|_0, \lambda_k = \varphi_k / \xi_3 \left. \frac{d\xi_3}{du} \right|_k.$$

Легко убедиться, что  $\left. \frac{dT}{du} \right|_0 = \rho_0 C_1^2 (1 - \gamma M_0^2) / \gamma > 0$  при  $M_0^2 > 1 > \gamma^{-1}$ , поэтому  $\lambda_0 < 0$ . Функция  $\xi_3 = (P_2(u) - C_3^L) / L$  представляет собой параболу, направленную ветвями вниз, проходящую через ось  $\xi_3 = 0$  в точках  $u_*$ ,  $u_0'$ , имеющую максимум в точке  $u = \gamma C_{21} / (1 + \gamma)$ , при  $u \in (u_*, \bar{u})$  монотонно возрастает от 0 до  $\xi_{30}$ , поэтому  $\left. \frac{d\xi_3}{du} \right|_0 > 0$ . Отсюда и  $\lambda_k < 0$ , поскольку конечная равновесная точка является дозвуковой по скорости звука  $c_{ef,k}$ . Отсюда следует, что непрерывного решения, удовлетворяющего условиям (7), не существует (дисперсных ударных волн нет), но имеется решение в виде замороженного скачка  $u_0 \rightarrow \bar{u}$  в точке  $x = 0$  с последующей зоной релаксации.

У т в е р ж д е н и е 3. Решение задачи о структуре УВ (6), (7) существует в виде замороженных ударных волн при  $M_0 > 1$ , при этом имеют место оценки на параметры течения, сформулированные в утверждениях 1.2 и функция  $u = u(x)$  при  $x > 0$  монотонно убывает.

Дадим классификацию типов поведения температуры смеси, основываясь на утверждениях 1—3 и данных расчетов структуры УВ (см. таблицу).

1) Температура за фронтом замороженной УВ монотонно возрастает. Действительно, в соответствии с утверждением 2  $\bar{u} > u_k > u_T$  и  $L_{\xi_{30}}^{\xi_3} < L_T$ , поэтому функция  $T = T(u)$  имеет вид, изображенный на рис. 2, 1 (см. вариант 1 таблицы).

2) Температура за фронтом УВ немонотонна. В начале УВ температура возрастает до  $T = T_{\max} = T(u_T)$ , а затем смесь остывает до  $T_k$ , причем  $T_k < \bar{T}$ . Таково поведение температуры, когда не выполняется неравенство  $L_{\xi_{30}}^{\xi_3} < L_T$  (см. вариант 2 таблицы и рис. 2, 2) и в смеси увеличено содержание твердой фазы.

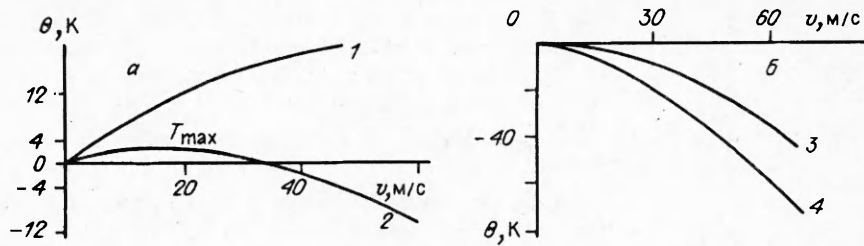


Рис. 3.

Частицы требуют для расплавления большое количество тепла, которое выделяется при торможении смеси в зоне релаксации. Это и приводит к тому, что здесь смесь за УВ не нагревается, а остывает.

3) Температура за фронтом УВ монотонно убывает. При значительном торможении, наблюдаемом во фронте УВ, и добавлении частиц (см. вариант 3, 4 таблицы) имеем  $u_T > \tilde{u} > u_k$ . Поэтому температура за УВ изменяется на левом скате графика  $T(u)$  и, следовательно, убывает (рис. 2, 3). Из таблицы видно, что добавление частиц приводит в этом случае к большему охлаждению смеси за УВ. Так при  $m_{30} = 3 \cdot 10^{-5}$  и  $4 \cdot 10^{-5}$   $\bar{T} - T_k = 44$  и  $72$  К соответственно.

Чтобы продолжить классификацию типов поведения температуры, приведем в последней строке таблицы данные некоторых расчетов при фиксированном  $m_{30} = 10^{-5}$  и переменном  $u_0$ . При этом обнаружен следующий тип течения.

4) Температура за фронтом немонотонна, причем в конце зоны релаксации  $T_k > T$ . Этот тип течения (вариант 5 таблицы) отличается от варианта 1 большей скоростью набегающего потока ( $u_0 = 634,81$  м/с по сравнению с  $584,81$  м/с в варианте 1). В результате более резкого торможения наблюдается больший разогрев смеси в УВ ( $T = 1214,13$  К и  $T = 1108$  К в варианте 1). Поскольку не выполняется неравенство  $L_{530}^{\xi} > L_T$ , динамические параметры за УВ связаны неравенствами  $\tilde{u} > u_T > u_k$ . При этом  $u_k$  лежит к  $u_T$  ближе, чем  $\tilde{u}$  к  $u_T$ , откуда  $T_k > \bar{T}$ . Физически описанная картина поведения температуры соответствует тому, что тепло, выделяемое при торможении смеси, в случае достаточно мощных УВ превышает теплотери на плавление частиц (см. рис. 2, 4).

Что же касается поведения давления и плотности смеси, то зависимости  $p(x)$ ,  $\rho(x)$  возрастают за фронтом УВ, что следует из интегралов сохранения импульса и массы. Иллюстрацией к этому положению для  $p$  служат последние два столбца в таблице, где приведены давления  $\bar{p}$  и за равновесной УВ —  $p_k$ , причем  $\bar{p} < p_k$ .

Изменение параметров потока в зоне релаксации за замороженной УВ изображены на рис. 3 в виде зависимостей  $\Theta = T - T_0$  от  $U = |u - \tilde{u}|$ . Линия  $n = 1$  соответствует первому типу течения смеси, в котором температура смеси монотонно возрастает. Это обусловлено небольшим влиянием фазового перехода, когда тепло, запасенное в газе, при торможении превышает тепло, требуемое для плавления. Кривая 2 описывает течение второго типа. В голове зоны релаксации, по-видимому, слабо проявляется влияние фазового перехода, температура растет за счет торможения, проходит через точку максимума и начинает убывать, опускаясь даже ниже, чем температура за фронтом УВ. Поскольку частиц здесь в 2 раза больше, чем в предыдущем случае, температура падает весьма значительно.

Результаты вычислений для третьего типа течения приведены на рис. 3, б для  $m_{30} = 3 \cdot 10^{-5}$  (линия 3) и  $m_{30} = 4 \cdot 10^{-5}$  (линия 4). Расчеты были проведены для смеси ксенона и алюминия.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. — М.: Наука, 1987. — Т. 1, 2. — 464 с.
2. Любов Б.Я. Математический анализ процессов теплопроводности и диффузии в металлических материалах // ФММ. — 1989. — 67, вып. 1. — С. 5—35.
3. Cranc J. Free and moving boundary problems. — Oxford: Clarendon Press, 1984.
4. Patancar S. Numerical heat transfer and fluid flow. — Washington: Hemisphere, 1984.
5. Brent A.D., Voller V.R., Reid K.J. Entalpy — porosity technique for modelling convection — diffusion phase change: application to the melting of pure metall // Numerical heat transfer. — 1988. — 13. — P. 297—318.
6. Шаропов В.И., Черепанов А.Н. Динамика дифференциации магм. — Новосибирск: Наука, 1986. — 186 с.
7. Bennon W.D., Incropera F.P. Numerical analysis of binary solid — liquid phase change using a continuum model // Entalpy — porosity technique for modelling convection — diffusion phase change: application to the melting of pure metall // Numerical heat transfer. — 1988. — 13. — P. 297 — 318.
8. Hills R.N., Roberts P.H. Relaxation effects in a mixed phase region. I. General theory. II. Illustrative examples // J. Nonequilib. Thermodyn. — 1987. — 12. — P. 169—195.
9. Розов А.И. Механика материалов с фазовыми превращениями. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Л., 1984.
10. Лодиз Р., Паркер Р. Рост монокристаллов. — М.: Мир, 1974. — 540 с.
11. Федоров А.В., Фомин В.М., Охунов М.Х. Математическое описание течения смеси газа и частиц с учетом кристаллизации и плавления. — Новосибирск, 1983. — (Препр./ АН СССР. ИТПМ; № 8).
12. Любов Б.Я. Теория кристаллизации в больших объемах. — М.: Наука, 1975. — 255 с.
13. Стернин Л.Е. Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. — М.: Машиностроение, 1974. — 211 с.
14. Федоров А.В., Фомин В.М., Еремеева Т.А. Течение типа бегущей волны в смеси газа и плавящихся частиц. — Новосибирск, 1984. — (Препр./ АН СССР. ИТПМ; № 12).
15. Федоров А.В., Фомин В.М. Структура ударной волны в смеси газа и плавящихся частиц // ПМТФ. — 1986. — № 2. — С. 133—138.

630090, г. Новосибирск,  
ИТПМ СО РАН

Поступила в редакцию 28/IV 1993,  
после доработки — 25/I 1994

УДК 621.787.044 — 621.7.044.2

*В.Ф. Нестеренко, М.П. Бондарь*

### ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ СХЛОПЫВАНИИ ТОЛСТОСТЕННОГО ЦИЛИНДРА

Методом толстостенного цилиндра исследован характер локализации пластической деформации (ЛПД) материалов, отличающихся типом кристаллической решетки, величиной энергии дефекта упаковки и размером зерен в исходном материале. Показано, что развитие процесса ЛПД приводит к структурированию среды в процессе коллапса. Характер структурирования среды, определенный типом полос ЛПД и трещинообразованием, в большой степени зависит от размера зерна. Установлено качественное подобие структурированной среды мелкозернистой меди и фторопласта. В мелкозернистой меди обнаружена особенность развития микроструктуры с ростом скорости деформации.

Локализация сдвига, будучи следствием неустойчивости пластического течения материалов при высокоскоростной деформации, представляет существенный научный интерес, так как не выяснен детальный механизм его возникновения, зависимость от природы и структурных параметров среды. Это не позволяет контролировать данный процесс и управлять им.

Локализации пластической деформации при высокоскоростных нагружениях посвящено большое количество работ, объединенных понятием «адиабатический сдвиг». Считается [1], что это явление присуще материалам, имеющим высокую твердость. Роль исходной структуры в инициировании процесса локализации деформации признана незначительной, и лишь при небольших динамических параметрах нагружения плоскости преимущественной