

## О ТЕОРИИ ТРЕЩИН КВАЗИХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ

Д. Д. Ивлев (Москва)

Настоящий обзор преследует цели осветить развитие основных представлений теории трещин квазихрупкого разрушения, а также изложить современное состояние вопроса.

При составлении обзора автор столкнулся с трудностью выделения из очень большого числа работ, освещающих различные теоретические и экспериментальные аспекты теории разрушения и так или иначе связанных с изучением распространения макроскопических трещин определенного минимума исследований, которые, по мнению автора, в большей степени соответствуют предмету данного обзора. В обзоре не нашли отражения в достаточной степени экспериментальные исследования, вопросы динамики, балочного приближения и ряд других аспектов теории и практики.

Автор отдает себе отчет в том, что в обзоре есть упущения, и некоторые работы либо не освещены, либо освещены не в той мере, в какой они этого заслуживают. Сказанное в значительной степени относится к многочисленным отчетам и диссертациям различных зарубежных университетов и лабораторий, которые оказались недоступными для автора. Автор стремился там, где это представлялось возможным, сохранить оригинальную трактовку различными исследователями своих результатов. Для удобства чтения изменены некоторые обозначения оригинальных работ.

Обзор написан по предложению А. Ю. Ишлинского.

Автор обязан Ю. Н. Работнову и Л. И. Седову рядом существенных соображений. Полезные обсуждения проблемы автор имел с Г. П. Черепановым. Внимание зав. библиотекой Института проблем механики АН СССР Н. А. Морозовой и зав. библиотекой Отделения Механики АН СССР Е. О. Вильдт облегчили автору работу над литературой. Большую помощь при работе над обзором оказали Г. И. Быковцев, С. А. Вульман, В. В. Дудукаленко, В. А. Жалнин, Ю. П. Листрова, Т. Д. Семькина.

Всем перечисленным лицам автор выражает свою искреннюю признательность.

## I. РАЗВИТИЕ ОСНОВНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

§ 1. Математические основы теории. Теория квазихрупкого разрушения основана на результатах теории упругости при малых деформациях. Основной интерес представил ряд решений теории упругости для плоскости, ослабленной прямолинейной трещиной или трещинами, а также анализ напряженного и деформированного состояния вблизи концов трещины.

Еще в 1909 г. Г. В. Колосов [1] получил решение о равномерно растягиваемой плоскости, ослабленной эллиптическим отверстием. Как предельное, здесь содержалось решение задачи о плоскости с прямолинейной трещиной. В 1913 году решение этой задачи было получено Инглисом (Inglis) [1].

Н. И. Мухелишвили [1] в 1919 г. дал решение задачи о плоскости с эллиптическим отверстием в произвольном поле напряжений.

В последующих публикациях Г. В. Колосова, особенно Н. И. Мухелишвили, а также их последователей был создан математический аппарат теории упругости, который позволил получить решения основных плоских задач теории упругости, сыгравших большую роль в развитии теории квазихрупкого разрушения.

В 1939 г. Вестергард (Westergaard) [2] опубликовал свою работу по теории контактных задач и трещин в упругих телах. Эта работа получила на Западе широкую известность. Вестергард вводит функцию комплексного переменного

$$Z = Z(z) = Z(x + iy) = \operatorname{Re} Z + i \operatorname{Im} Z \quad (1.1)$$

Функции  $Z'$ ,  $\bar{Z}$ ,  $\bar{\bar{Z}}$  определяются им как производная, первый и второй интеграл от  $Z$

$$Z' = \frac{dZ}{dz}, \quad Z = \frac{d\bar{Z}}{\partial z}, \quad \bar{\bar{Z}} = \frac{d\bar{Z}}{dz} \quad (1.2)$$

Для некоторых, но важных групп задач напряжения могут быть представлены в виде<sup>1</sup>

$$\sigma_x = \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z', \quad \sigma_y = \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z', \quad \tau_{xy} = -y \operatorname{Re} Z' \quad (1.3)$$

<sup>1</sup> Формулы Вестергарда являются частным случаем формул Колосова — Мухелишвили при  $\Phi(z) = 1/2 Z$ ,  $\Psi(z) = -1/2 zZ$ . Ряд задач, рассмотренных Вестергардом, был рассмотрен до этого Н. И. Мухелишвили, которые были опубликованы во втором издании его книги «Некоторые основные задачи математической теории упругости» в 1935 г. Результаты Вестергарда излагаются в связи с тем, что они в этой форме используются в последующих работах Ирвина и других авторов теории квазихрупкого разрушения.

Соотношения (1.3) удовлетворяют уравнениям равновесия плоской задачи. Решения, полученные из соотношений (1.3), удовлетворяют условию

$$\sigma_x = \sigma_y, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (1.4)$$

Первое условие (1.4) имеет место на участках сплошности.

Перемещения  $u, v$  вдоль осей  $x, y$  определяются по формулам

$$2Gu = (1-2\nu) \operatorname{Re} \bar{Z} - y \operatorname{Im} Z, \quad 2Gv = 2(1-\nu) \operatorname{Im} \bar{Z} - y \operatorname{Re} Z \quad (1.5)$$

где  $G$  — модуль сдвига.

Отметим также, что величина смещения  $v$  вдоль оси  $y$  при  $y = 0$  представима в виде

$$v_0 = \frac{1-\nu}{G} \operatorname{Im} \bar{Z} \quad (1.6)$$

Задаваясь любой функцией комплексного переменного  $Z(z)$ , по формулам (1.3), (1.5) можно получить некоторое решение задачи плоской теории упругости. В этом и состоит так называемый полуобратный метод Вестергарда.

Подбирая соответствующие функции  $Z$ , Вестергард рассмотрел ряд контактных задач и задач о трещинах.

Им предложены функции  $Z$  для случая одной внутренней, а также многих коллинеарных трещин в плоскости, равномерно растягиваемой на бесконечности

$$Z = p \sqrt{1 - a^2/z^2}, \quad Z = p \sqrt{1 - \frac{\sin^2(\pi a/l)}{\sin^2(\pi z/l)}} \quad (1.7)$$

Вестергард заметил, что для того чтобы рассмотреть в качестве нагрузки равномерное давление  $p$ , приложенное по берегам трещины, функции (1.7) следует использовать в виде  $Z_1 = Z - p$ . Он рассмотрел также задачи о трещинах при расклинивании (crack opened by wedge) силой  $P$ , как указано на фиг. 1. Функции  $Z$ , рассмотренные Вестергардом, в данном случае имеют вид

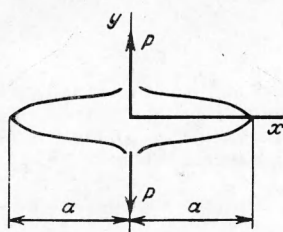
$$Z = \frac{P}{\pi(a+z)} \sqrt{\frac{a}{z}}, \quad Z = -\frac{P}{\pi(a+z)} \sqrt{\frac{z}{a}} \quad (1.8)$$

На фиг. 1, б и в показаны соответствующие диаграммы напряжений при  $y = 0$ .

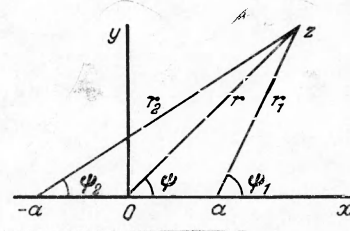
Вестергард предлагает рассматривать форму последней диаграммы (фиг. 1, в) с конечностью напряжений на конце трещины в качестве характерной для хрупких материалов, таких как бетон. Наконец, функция

$$Z = Pa/\pi z \sqrt{z^2 - a^2} \quad (1.9)$$

определяет напряженное и деформированное состояние в плоскости с трещиной, расклиниваемой посредине сосредоточенными усилиями  $P$  (фиг. 2).



Фиг. 2

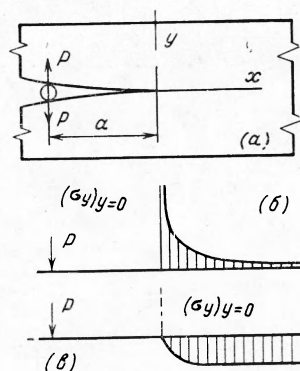


Фиг. 3

В работах Снеддона [1,2], Снеддона и Эллиота (Elliot) [1] и др. дальнейшее развитие получили математические методы теории трещин в упругих средах.

Снеддон [1] (1946 г.) рассмотрел плоскую и осесимметричную задачи об изолированных трещинах в бесконечных телах. В случае плоской задачи он использует решение Вестергарда [2] и анализирует напряженное состояние вблизи трещины длиной  $2a$ , находящейся под действием постоянного внутреннего давления  $p_0$ . Функция  $Z$  рассмотрена им в виде

$$Z = p_0 \left( \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1 \right) \quad (1.10)$$



Фиг. 1

Снеддон определил, в частности, распределение напряжений вблизи края трещин. Рассмотрим вкратце анализ Снеддона. Положим

$$z = r e^{i\psi}, \quad z - a = r_1 e^{i\psi_1}, \quad z + a = r_2 e^{i\psi_2} \quad (1.11)$$

так как указано на фиг. 3.

Из (1.3), (1.10), (1.11) можно получить

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) &= p_0 [r (r_1 r_2)^{-1/2} \cos(\psi - \frac{1}{2}\psi_1 - \frac{1}{2}\psi_2) - 1] \\ \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) &= p_0 a^2 r (r_1 r_2)^{-1/2} \sin \psi \sin \frac{3}{2}(\psi_1 + \psi_2) \\ \tau_{xy} &= p_0 a^2 r (r_1 r_2)^{-1/2} \sin \psi \cos \frac{3}{2}(\psi_1 + \psi_2) \end{aligned} \quad (1.12)$$

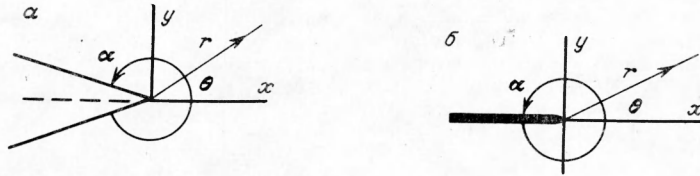
Определяя далее распределение напряжений в окрестности правого конца трещины, положим  $r_1 = \delta$ , где  $\delta$  — малый параметр. Положим далее  $\psi_1 = \theta$ . С точностью до малых высшего порядка будем иметь

$$r = a + \delta \cos \theta, \quad r_2 = 2a + \delta \cos \theta, \quad \theta = \delta \sin(\theta/a), \quad \theta_2 = \frac{1}{2} \delta \sin(\theta/2a) \quad (1.13)$$

Из (1.12), (1.13) после линеаризации и некоторых преобразований следует<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \sigma_x &= p_0 (a/2\delta)^{1/2} (\frac{3}{4} \cos \theta/2 + \frac{1}{4} \cos 5\theta/2) \\ \sigma_y &= p_0 (a/2\delta)^{3/2} (\frac{5}{4} \cos \theta/2 - \frac{1}{4} \cos 5\theta/2) \\ \tau_{xy} &= p_0 (a/8\delta)^{3/2} \sin \theta \cos 3\theta/2 \end{aligned} \quad (1.14)$$

В той же статье Снеддон методами преобразования Фурье провел исследование для случая круглой трещины, находящейся под действием осесимметричного переменного



Фиг. 4 а, б

давления. Оказалось, что в аналогичных обозначениях, для круглой трещины, находящейся под действием постоянного давления  $p_0$ , вблизи края трещины имеет место

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (2/\pi) \sigma_x, \quad \sigma_z = (2/\pi) \sigma_y, \quad \tau_{rz} = (2/\pi) \tau_{xy} \\ \sigma_\Phi &= \frac{4\nu p_0}{\pi} \left( \frac{c}{2\delta} \right)^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (1.15)$$

где  $\sigma_r$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{rz}$ ,  $\sigma_\Phi$  — компоненты напряжения в цилиндрической системе координат  $r$   $\Phi$ ,  $z$ . Компоненты  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  определяются по формулам (1.14).

Отметим анализ упругой энергии тела с трещиной, данный Снеддоном.

В статье Снеддона и Эллиота [1] (1946 г.) обсуждается распределение напряжений в окрестности плоской трещины Гриффита, находящейся под действием давления, приложенного по берегам трещины и которое может изменяться вдоль длины трещины. Авторы используют косинус-преобразование Фурье и результаты теории дуальных интегральных уравнений. Здесь получены результаты, вполне аналогичные результатам Снеддона [1], для осесимметричной задачи.

Позднее в своих монографиях Снеддон [2,3] привел аналогичные результаты как для плоской, так и осесимметричной задачи теории упругости.

Вильямс (Williams) [1] (1952 г.), [2] (1952 г.) рассмотрел общее решение теории упругости вблизи вершины сектора бесконечного угла  $\alpha$  (фиг. 4, а). Позднее Вильямс [3] (1957 г.) рассмотрел частный случай своего решения, когда  $\alpha = 2\pi$  и оба берега щели свободны от усилий (фиг. 4, б).

Используется полярная система координат  $r$ ,  $\theta$ . Бигармоническая функция напряжений  $\chi(r, \theta)$  может быть разделена на четную  $\chi_e(r, \theta)$  и нечетную  $\chi_o(r, \theta)$  части отно-

<sup>1</sup> Отметим, что Г. И. Баренблатт [1] (1956 г.) рассмотрел асимптотические выражения для напряжений и перемещений вблизи концов трещины в задаче, показанной на фиг. 2, при условии, что на бесконечности действуют равномерные сжимающие усилия —  $q_\infty$ . Приведены соотношения для напряжений вдоль оси  $x$  ( $\theta = 0$  в формулах (1.14)) для перемещения  $v$  вдоль оси  $y$  при малых  $\theta$ .

сительно оси  $y$  и представлена согласно Вильямсу в виде <sup>1</sup>

$$\chi_e(r, \theta) = \sum_{n=1, 2, 3} \left\{ (-1)^{n-1} a_{2n-1} r^{n+1/2} \left[ -\cos(n-3/2)\theta + \frac{2n-3}{2n+1} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta \right] + \right. \\ \left. + (-1)^n a_{2n} r^{n+1} [-\cos(n-1)\theta + \cos(n+1)\theta] \right\} \quad (1.16)$$

$$\chi_o(r, \psi) = \sum_{n=1, 2, 3, \dots} \left\{ (-1)^{n-1} b_{2n-1} r^{n+1/2} [\sin(n-3/2)\theta - \sin(n+1/2)\theta] + \right. \\ \left. + (-1)^n b_{2n} r^{n+1} [-\sin(n-1)\theta + \frac{n-1}{n+1} \sin(n+1)\theta] \right\} \quad (1.17)$$

Функции (1.16), (1.17) определяют поле напряжений, удовлетворяющее уравнениям равновесия и граничным условиям на свободных краях трещины. Постоянные  $a_i$ ,  $b_i$  должны быть определены из граничных условий на бесконечности в случае бесконечного сектора либо краевых условиях на фиксированных границах, когда тело имеет ограниченные размеры.

Из (1.16), (1.17) следует, что вблизи края трещины напряжения могут быть выражены в виде

$$\sigma_r = \frac{1}{4r^{1/2}} \left\{ a_1 \left[ -5 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right] + \right. \\ \left. + b_1 [-5 \sin \theta/2 + 3 \sin 3\theta/2] \right\} + 4a_2 \cos^2 \theta + 0(r^{1/2}) \quad (1.18)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{4r^{1/2}} \left\{ a_1 \left[ -3 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] + \right. \\ \left. + b_1 \left[ -3 \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right] \right\} + 4a_2 \sin^2 \theta + 0(r^{1/2}) \quad (1.19)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{4r^{1/2}} \left\{ a_1 \left[ -\sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] + b_1 \left[ \cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right] \right\} - 2a_2 \sin 2\theta + 0(r^{1/2}) \quad (1.20)$$

Очевидно, что в декартовой системе координат члены, содержащие коэффициент  $a_2$  в (1.18) — (1.20), соответствуют напряженному состоянию чистого растяжения

$$\sigma_x = 4a_2, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (1.21)$$

Так как для большинства рассматриваемых случаев вдоль края чистое растяжение отсутствует, Вильямс полагает в дальнейшем  $a_2 = 0$ .

Таким образом, изменение по радиусу компонент напряжений в общем случае будет иметь порядок  $r^{-1/2} + 0(r^{1/2})$ .

Далее определяется плотность общей потенциальной энергии  $W$ . Соответствующее выражение имеет вид

$$32ErW = a_1^2 \left[ (34 - 30\nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2(1 + \nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2(1 + \nu) - 4(1 + \nu) \cos 2\theta \right] + \\ + \left[ b_1^2 (30 - 34\nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2(1 + \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 18(1 + \nu) + 12(1 + \nu) \cos 2\theta \right] + \\ + 2a_1 b_1 \left[ (32 - 22\nu) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - 8(1 + \nu) \sin 2\theta \right] + \dots \quad (1.22)$$

Выражение для плотности энергии формоизменения  $W_d$  имеет вид

$$2GrW_d = a_1^2 \left( 1 + 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} + \\ + 2b_1^2 \left[ 3 + \left( 1 + 3 \cos \frac{\theta}{2} \right) \left( 1 - 3 \cos \frac{\theta}{2} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] + 2a_1 b_1 \sin \theta + \dots \quad (1.23)$$

Наконец, приведем выражения для компонент перемещений

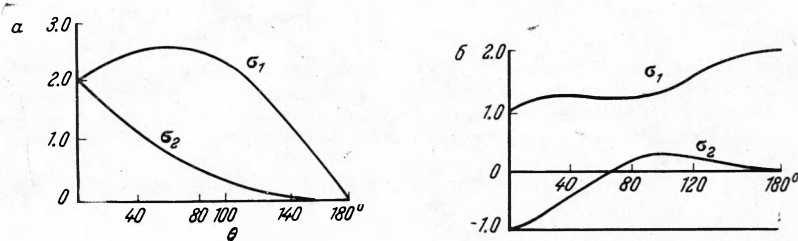
$$2Gu_r = r^{1/2} \left\{ a_1 \left[ \left( -\frac{5}{2} + 4\nu \right) \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] + \right. \\ \left. + b_1 \left[ \left( -\frac{5}{2} + 4\nu \right) \sin \frac{\theta}{2} + \frac{3}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \right\} + \dots \quad (1.24)$$

<sup>1</sup> Исправленный вариант формул содержится в работе Вильямса [5].

$$2Gu_0 = r^{1/2} \left\{ a_1 \left[ \left( \frac{7}{2} - 4\gamma \right) \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + b_1 \left[ - \left( \frac{7}{2} - 4\gamma \right) \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right] \right\} + \dots \quad (1.25)$$

Где  $u_r, u_\theta$  — компоненты перемещения в полярной системе координат,  $\gamma = \nu / (1 + \nu)$ .

Далее рассматривается в отдельности симметричное ( $b_i = 0$ ) и антисимметричное ( $a_i = 0$ ) распределение напряжений относительно оси  $y$ .



Фиг. 5 а, б

Для симметричного случая характер особенности вблизи конца трещины согласуется с характером особенности, определенной Инглисом, Вестергардом и другими. Вильямс отмечает, что так как  $\tau_{r\theta} = 0$  при  $\theta = 0$ , а  $\sigma_r \rightarrow \sigma_\theta = -a_1 r^{-1/2}$ , то вблизи конца плоской трещины существует сильная тенденция к состоянию равномерного двумерного (гидростатического) напряжения, которое позволяет использовать упругий анализ вблизи конца трещины, несмотря на пропорциональность компонент напряжения величине  $r^{-1/2}$ .

Определяется разность главных напряжений вблизи вершины трещины и показано, что тенденция к гидростатическому растяжению уменьшается по мере удаления от конца трещины.

Вильямс определил изменение главных напряжений вдоль окружности малого радиуса  $r = r_0$ , с центром в вершине трещины, соответствующий график приведен на фиг. 5, а. Максимальное растягивающее напряжение достигается на площадках, направленных под углами  $\theta = \pm \pi/3$ , максимальное касательное напряжение действует на площадке  $\theta = \pi/2$  и равно половине гидростатического растяжения, действующего вдоль направления  $\theta = 0$  на том же самом радиальном направлении. На фиг. 6 показаны величина и ориентация главных напряжений для характерных направлений,  $\sigma_0 = -a_1 r_0^{1/2}$ . Максимум энергии формоизменения приходится



Фиг. 6. Максимальное растягивающее напряжение соответствует направлению угла  $60^\circ$ , максимальное октаэдрическое напряжение —  $70^\circ$ , максимальное касательное напряжение —  $90^\circ$

не вдоль линии направления трещины, а на направление  $\theta = \pm \cos^{-1}(1/3) \approx \pm 70^\circ$ , где он выше на  $1/3$ . Соответствующий график приведен на фиг. 7, а.

Вильямс отмечает, что при  $a_1 = 0$  можно прийти к задачам, рассмотренным Вестергардом [1,2], для которых концентрацией напряжений в конце трещины можно пренебречь.

В антисимметричном случае им проведен аналогичный анализ. Снова особенность для напряжений имеет порядок  $r^{-1/2}$ . Изменение главных напряжений показано на фиг. 5, б, изменение плотности энергии формоизменения — на фиг. 7, б.

Из результатов цитированных работ следует, что асимптотический характер поведения компонент напряжений и деформаций вблизи конца трещины не зависит от вида напряженного состояния. Величины характерных размеров трещины и тела, нагрузки и другие параметры граничных условий определяют лишь значения коэффициентов  $a_1, b_1$  в (1.18) — (1.20), характеризующих интенсивность напряжений и величины деформаций вблизи вершины трещины.

§ 2. Основы теории Гриффита-Ирвина. Основоположником математической теории распространения трещин в упругой среде, теории квазихрупкого разрушения принято считать Гриффита (Griffith) [1,2]. Изучая разрушение стекла, Гриффит предположил, что стекло содержит трещинообразные дефекты. Согласно Гриффиту, наибольшая трещина становится самораспространяющейся, когда скорость распространения энергии деформации превышает скорость увеличения поверхностной энергии расширяющейся трещины.

Рассуждения Гриффита могут быть представлены в следующей форме. Представим идеально упругое тело, содержащее трещину (поверхность разрыва перемещений или разрез нулевой толщины) площадью  $S$ . Предположим, что тело деформировано некоторой системой внешних объемных и поверхностных усилий  $F_i, p_i$ . Предположим далее, что внешняя граница тела фиксирована и поверхность разрыва перемещений получает некоторое приращение  $\delta S$ . Приращение  $\delta S$  соответствует освобождению внутренних связей в упругом теле. Работа внешних сил при фиксированных границах равна нулю, а упругая энергия тела уменьшается на величину  $\delta W$ . Величина  $\delta W/\delta S$  получила название скорости освобождения упругой энергии при распространении трещины.

С другой стороны, увеличение поверхности трещины ведет к увеличению поверхностной энергии трещины на  $\delta\Pi$ ; аналогично  $\delta\Pi/\delta S$  — скорость увеличения поверхностной энергии тела при распространении трещины. Согласно Гриффиту, энергетический критерий равновесного состояния трещины можно записать в виде

$$\frac{\delta(W - \Pi)}{\delta S} = 0 \tag{1.26}$$

Устойчивое состояние трещины имеет место при

$$\frac{\delta^2(W - \Pi)}{\delta S^2} > 0 \tag{1.27}$$

Неустойчивое при

$$\frac{\delta^2(W - \Pi)}{\delta S^2} < 0 \tag{1.28}$$

Гриффит предположил, что

$$\delta\Pi = 2T\delta S, \quad T = \text{const} \tag{1.29}$$

где  $T$  — поверхностное натяжение.

Условие (1.26), таким образом, может быть записано в виде

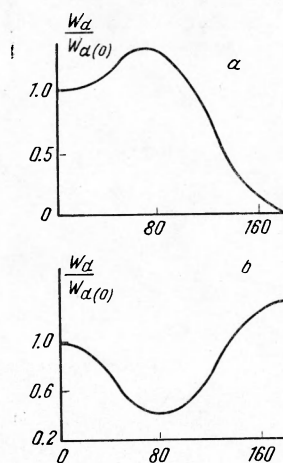
$$\frac{\delta W}{\delta S} = 2T \tag{1.30}$$

В качестве примера Гриффит рассмотрел плоскость с прямолинейным разрезом длиной  $2l$ , находящуюся на бесконечности под действием равномерного всестороннего растяжения  $p$ . Используя решение Инглиса (Inglis) [1], Гриффит получил критические значения  $p_0$  для случаев плоской деформации и плоского напряженного состояния

$$p_0 = \sqrt{\frac{2ET}{\pi(1-\nu^2)l}}, \quad p_0 = \sqrt{\frac{2ET}{\pi l}} \tag{1.31}$$

где  $E$  — модуль упругости,  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

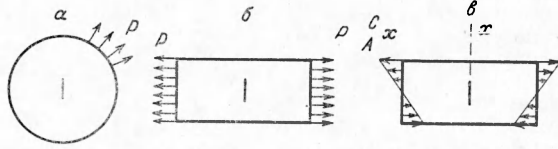
Решение задачи теории упругости о прямолинейной щели в растягиваемой плоскости обладает следующей особенностью: при любой сколь угодно малой, но конечной растягивающей нагрузке  $p_0$  контур прямолинейной щели деформируется в эллиптическую полость, а напряжения на концах трещины при этом оказываются бесконечно большими. Подобные сингулярности, вообще говоря, присущи решениям уравнений линейной теории упругости в случаях, когда краевые геометрические или силовые условия имеют особенности. В качестве примера можно указать поведение решений линейной теории упругости в задачах о вдавливании штампов с угловыми границами, при действии сосредоточенных сил, при наличии угловых надрезов на границе тела и т. д. В задаче Колосова — Инглиса подобная особенность имеет место на концах щели, где радиус кривизны равен нулю, а кривизна — бесконечности.



Фиг. 7

Известно, что подобные особенности решения не соответствуют физическому поведению реальных сред, но уже в достаточно малой окрестности могут правильно описывать характер напряженного и деформированного состояния тела.

Гриффит рассмотрел также в качестве трещины эллиптическую полость с конечным малым радиусом кривизны. Однако его попытка избежать бесконечно больших напряжений вблизи концов трещины и увязать представления механики сплошной среды и физики твердого тела не привели к успеху.



Фиг. 8

данном случае не оказалась необходимой.

Как показало дальнейшее развитие, видоизмененные концепции Гриффита оказались пригодными для описания достаточно широкого класса разрушения твердых тел в рамках феноменологической теории.

Отметим, что Гриффит провел экспериментальные исследования по подтверждению своих результатов.

После выхода первой работы Гриффита, Смекал (Smekal) [1] опубликовал обсуждение проблемы квазихрупкого разрушения, в частности, он исправил некоторые неточности, вкравшиеся в решение Гриффита<sup>1</sup>.

Вольф (Wolf) [1] дал свое изложение идей Гриффита и привел решение задач распространения трещин для прямолинейной щели для трех вариантов: всестороннего равномерного растяжения на бесконечности (фиг. 8, а) (случай рассмотренный Гриффитом), одноосного равномерного растяжения на бесконечности (фиг. 8, б) и случая чистого изгиба (фиг. 8, в).

В послесловии к своей работе Вольф обсуждает проблему разрушения тела, в котором есть много различно ориентированных малых трещин длиной  $2l$ . Предполагая, что напряженное состояние является комбинацией трех, рассмотренных им, он формулирует условие растрескивания материала

$$4\nu\sigma_2 + (1 - 3\nu)(\sigma_2 - \sigma_1)\sigma_2 = 4TE/\pi l \quad (1.32)$$

где  $\sigma_1, \sigma_2$  — главные напряжения на достаточном удалении от трещины.

Величину  $4TE/\pi l$  Вольф предлагает рассматривать как константу материала<sup>2</sup>.

Ряд результатов, оказавших заметное влияние на развитие теории квазихрупкого разрушения, принадлежит Нейберу [1].

Нейбер непосредственно не занимался теорией трещин, ему принадлежит исследование концентрации напряжений вблизи различного рода выточек для ряда плоских и осесимметричных задач, а также задач кручения теории упругости.

Нейбер использовал полуобратные методы теории упругости, исходя из общего решения в соответствующей системе координат<sup>3</sup>. Несмотря на известную громоздкость метода, Нейберу принадлежит ряд эффективных решений важных задач.

В качестве предельных из решений Нейбера могут быть получены результаты для тел, ослабленных различного рода щелями и разрезами.

Для глубоких гладких выточек (фиг. 9, а) максимальное напряжение достигается в вершине выточки и коэффициент концентрации  $\alpha$  выражается в виде

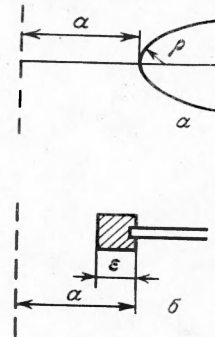
$$\alpha = f(a/\rho) \quad (1.33)$$

где  $a$  — половина ширины наиболее узкого поперечного сечения,  $\rho$  — минимальный радиус кривизны выточки.

<sup>1</sup> Ссылки на другие работы Смекала по разрушению см. Вейсс (Weiss) и Юкава (Yukawa) [1].

<sup>2</sup> Обсуждение результатов Вольфа содержится в недавно вышедшей работе Swidloу [1]. Попытка построения теории прочности исходя из представлений трещиноватости материала содержится также в работе В. И. Моссаковского и М. Т. Рыбка [1].

<sup>3</sup> До Нейбера аналогичное решение было получено Г. Д. Гродским и П. Ф. Папковичем (Папкович П. Ф., Теория упругости, Оборонгиз, 1939, стр. 120—131).



Фиг. 9 а, б

Занимаясь теорией выточек с острыми углами, Нейбер столкнулся с особенностями решений теории упругости, характерными для математической теории трещин. При достаточно малом радиусе кривизны вычисленный формально коэффициент концентрации напряжений получает сколь угодно большие значения, лишенные практического смысла. Поэтому в достаточно малой окрестности выточки Нейбер предлагает ввести некоторую частицу, наделенную новыми свойствами, отличными от упругих. Величина этой частицы принимает на себя роль новой постоянной материала. И после того, как эта постоянная определяется опытным путем, практически возможная ошибка в определении коэффициента концентрации в остальной зоне становится вполне приемлемой.

Рассмотрим фиг. 9, б. Вблизи конца надреза показана «частица Нейбера» шириной  $\epsilon$ . Предположим, что решение классической теории упругости найдено. Частица предполагается настолько малой, что напряжения, действующие по ее поверхности, можно считать постоянными. Новые значения напряжений в частице получаются через осреднение старых значений на поверхности частицы. Тогда коэффициент концентрации приобретает вид

$$\alpha = f(2a/\epsilon) \quad (1.34)$$

Таким образом, согласно (1.33), (1.34) для выточек с острым углом роль радиуса кривизны играет величина  $\epsilon/2$ . Обозначая  $\rho' = \epsilon/2$ , Нейбер отмечает, что постоянная  $\rho'$  связана со структурой материала и для различных материалов принимает различные значения. Так, для стали величина  $\rho'$  равна приблизительно полмиллиметра.

Нейбер отмечает, что есть другой путь, каким можно объяснить уменьшение коэффициента концентрации напряжений: вместо того, чтобы, следуя линейной теории упругости, рассматривать напряженное состояние отнесенным к недеформированному состоянию, можно воспользоваться теорией конечных деформаций и относить уравнения равновесия к деформированному состоянию<sup>1</sup>. Но так как и учет влияния деформации и введение соответствующей «частицы», учитывающей структуру материала, приводит к уменьшению концентрации напряжений сильно искривленной выточки, можно принять за основу один из этих путей, например, предложенный Нейбером, если, конечно, выбрать постоянную  $\rho'$  в соответствии с опытными данными. Таким образом, введение  $\rho'$  в определенной степени соответствует учету конечных деформаций вблизи конца остроугольной выточки.

Нейбер показал, что линейная теория упругости дает в ряде случаев вполне приемлемые результаты уже в непосредственной близости от вершин остроугольных выточек.

В 1948 г. Ирвин (Irwin) [1] и в 1950 г. Орованом (Orowan) [1] было высказано предположение, что теория Гриффита может быть использована для описания разрушения ряда материалов при развитии в них трещин<sup>2</sup>. Оказалось, что ряд металлов, обладающих значительными пластическими свойствами, при наличии трещин разрушаются по схеме хрупкого разрушения.

Это связано с тем, что вблизи вершин трещин или надрезов напряженное состояние близко к равномерному трехосному растяжению. Хрупкое разрушение в обычных ковких металлах всегда сопровождается небольшой пластической деформацией в тонком слое у поверхности разрушения. Поэтому упругая энергия тела при разрушении подобных материалов идет не только на образование поверхностной энергии, но и на работу, затрачиваемую на образование пластических деформаций в приповерхностном слое трещины. По оценкам Орована, например, для железа последняя величина больше в  $10^3$  раз величины энергии поверхностного натяжения и последней можно пренебречь. Для высокоуглеродистой стали обе величины сравнимы.

Перепишем соотношение (1.30) в виде

$$\frac{\delta W}{\delta S} = \mathcal{S} \quad (1.35)$$

По теореме Кастилиано в теории упругости сила есть частная производная от упругой энергии по соответствующему перемещению, поэтому соотношение (1.35) может быть рассмотрено с этой точки зрения. Тогда величину  $\mathcal{S}$  можно интерпретировать как силу на единицу площади (или длины) края трещины, которая стремится вызвать распространение трещины.

Согласно Ирвину и Оровану, существует некоторое предельное значение  $\mathcal{S}_c$ , являющееся константой материала, при достижении которого начинается распространение трещины.

Итак, критерий распространения трещин принимает вид

$$\mathcal{S} \geq \mathcal{S}_c \quad (1.36)$$

<sup>1</sup> Соответствующие результаты принадлежат Фешлю (Förpl L., Ing. Arch. 1936. Bd 7, p. 229).

<sup>2</sup> Ирвин [1] отмечает, что впервые связь идей Гриффита с квазихрупким разрушением металлов рассмотрели Зенер (Zener) и Холломон (Hollomon), Trans. Am. Soc. Metals, 1944, vol. 33, p. 163—235.



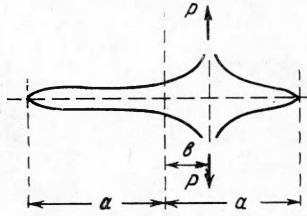
Трещины устойчивы в случае

$$\mathcal{S} < \mathcal{S}_c \quad (1.37)$$

Вопросам экспериментального определения величины  $\mathcal{S}_c$  посвящена обширная литература, среди которой отметим работы Ирвина [1], Орована [1,2], Ирвина, Кисса (Kies) [1,2], Ирвина, Кисса и Смита (Smith) [1] и др.<sup>1</sup>

По существу этапной для дальнейшего развития математической теории трещин явилась работа Ирвина [3], развитие которой содержит его дальнейшие публикации.

Ирвин [3], используя полуобратный метод Вестергарда, наряду с функциями (1.7), приводит три новых решения. Первое из них относится к случаю трещины длиной  $2a$ , расположенной вдоль оси  $x$ , находящейся под действием расклинивающих сил  $P$ , приложенных в точках  $x = b$  (фиг. 10). Соответствующая функция Вестергарда имеет вид



Фиг. 10

$$Z = \frac{Pa}{\pi(z-a)z} \left[ \frac{1 - (b/a)^2}{1 - (b/z)^2} \right]^{1/2} \quad (1.38)$$

Второй пример сохраняет все условия предыдущего и отличается добавлением расклинивающих сил  $P$  в точках  $x = -b$ , функция Вестергарда имеет вид

$$Z = \frac{Pa}{\pi(z^2 - a^2)} \left[ \frac{1 - (b/a)^2}{1 - (b/z)^2} \right]^{1/2} \quad (1.39)$$

Третий пример относится к случаю периодической системы трещин длиной  $2a$ , центры которых удалены на расстояние  $l$  и расклинивающие силы  $P$  приложены в центре трещины. Функция Вестергарда имеет вид

$$Z = \frac{P \sin(\pi a/l)}{l \sin^2(\pi z/l)} \left[ \frac{1 - \sin^2(\pi a/l)}{1 - \sin^2(\pi z/l)} \right]^{-1/2} \quad (1.40)$$

Здесь же Ирвин обсуждает вопрос о применимости решения (1.40) к пластине конечной ширины  $l$ .

Для всех пяти примеров аналогично Снеддону [1] вводится замена переменных

$$z = a + re^{i\theta}, \quad r^2 = (x-a)^2 + y^2, \quad \operatorname{tg} \theta = y/(x-a) \quad (1.41)$$

Ограничиваясь малой окрестностью вблизи конца трещины и предполагая, что величинами  $r/a$ ,  $r/(a-b)$  можно пренебречь по сравнению с единицей, Ирвин, аналогично Снеддону [1], получает

$$\sigma_x = \left( \frac{E\mathcal{S}}{\pi} \right)^{1/2} \frac{\cos \theta/2}{\sqrt{2r}} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right), \dots \quad (1.42)$$

где  $\mathcal{S}$  — величина, зависящая от нагрузки (связь между в (1.42) и (1.35) пока не установлена).

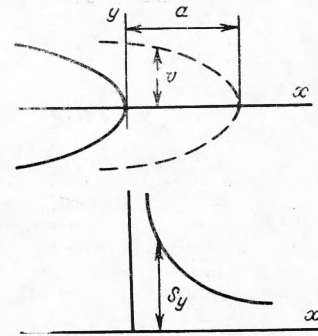
Разложения Ирвина (1.42) отличаются от разложений Снеддона (1.14) и первого члена разложения Вильямса (1.18) — (1.20) только записью и описывают одно и то же напряженное состояние вблизи конца трещины.

Величина  $(E\mathcal{S}/\pi)^{1/2}$  определяется Ирвиным как коэффициент интенсивности напряжений. В дальнейшем для рассматриваемого случая трещин поперечного разрыва для коэффициента интенсивности напряжений вводится обозначение

$$K_I = (E\mathcal{S}/\pi)^{1/2} \quad (1.43)$$

Далее следует вывод формулы, позволившей установить тождественность величин  $\mathcal{S}$  входящих в (1.42) и (1.35) и тем самым сформулировать силовой подход в теории трещин, эквивалентный энергетическому подходу Гриффита. Приведем эти рассуждения.

Пусть начало координат смещено в правый конец трещины, как показано на фиг. 11. Предположим, что далее трещина распространилась до значения  $x = \alpha$ . Будем предполагать  $\alpha$  много меньше длины трещины. Если усилия, действующие вдоль оси  $\mathcal{S}$ , определены в виде



Фиг. 11

$$S_y(q) = q \left( \frac{E\mathcal{S}}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2x}}, \quad 0 \leq x \leq \alpha \quad (1.44)$$

<sup>1</sup> Более подробные ссылки читатель может найти в сборнике «Fracture Toughness Testing and Its Applications», Philadelphia, 1965.

где  $q$  — параметр, и приложены на краях трещины, то и при изменении параметра  $q$  от нуля до единицы трещина на отрезке  $0 \leq x \leq \alpha$  закрывается.

Форма закрывающейся части трещины в том же приближении может быть представлена в виде

$$v(q) = (1 - q) \frac{2}{E} \left( \frac{E\mathcal{G}}{\pi} \right)^{1/2} \sqrt{2(\alpha - x)} \quad (1.45)$$

Поэтому работа, необходимая для закрытия трещины на рассматриваемом участке, будет равна

$$\int_0^{\alpha} S_y(1) v(0) dx = \frac{2\mathcal{G}}{\pi} \int_0^{\alpha} \left( \frac{\alpha - x}{x} \right)^{1/2} dx = \alpha\mathcal{G} \quad (1.46)$$

Величина работы (1.46) равна изменению упругой энергии тела  $\delta W$ . Роль вариации длины трещины  $\delta l$  играет величина  $\alpha$ , откуда и следует, что выражение (1.46) вполне эквивалентно (1.35) для случая раскрывающихся трещин в плоском случае.

Ирвин отмечает, что приведенный анализ основан на соотношениях линейной теории упругости, тогда как вблизи трещины имеют место такие эффекты, как местная релаксация напряжений, искажение открывающейся трещины за счет пластического течения. Однако не следует предполагать, что эти причины могут обусловить отличие действительной скорости потери энергии деформации от вычисленной на значительную величину. Метод, приводящий к соотношению (1.46), эквивалентен вычислению производной по длине трещины от общей энергии деформации. Вклад концевой зоны в общий баланс энергии сравнительно невелик.

Ссылаясь на экспериментальные исследования, Ирвин пишет, что если пластические деформации вблизи трещины влияют на поле напряжений только в пределах расстояния от трещины, меньше чем длина трещины, то тогда влияние этих пластических деформаций на вычисление  $\mathcal{G}$  соответственно мало.

Далее Ирвин обсуждает вопросы экспериментального определения величины  $\mathcal{G}_c$ .

В последующей работе [4] Ирвин вновь формулирует основные положения теории. Он вычисляет плотность энергии деформации  $\Psi$  в области радиуса  $r_1$  вокруг края круглой трещины

$$\int_0^{r_1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial a} r dr d\theta = \left( \frac{5 - 8\nu}{8 - 8\nu} \right) r_1 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial a} \quad (1.47)$$

где  $a$  — радиус трещины.

Для центральной трещины в достаточно большой пластине, подверженной однородному растяжению, на достаточном удалении величина  $\mathcal{G}$  пропорциональна  $a$ , поэтому

$$r_1 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial a} = \frac{r_1}{a} \quad (1.48)$$

Для трещин, расположенных подобным образом, но открывающихся под действием расклинивающих сил, приложенных в центре трещины,  $\mathcal{G}$  обратно пропорциональна  $a$ , поэтому

$$r_1 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial a} = - \frac{r_1}{a} \mathcal{G} \quad (1.49)$$

Интеграл (1.47) по Ирвину представляет порядок величины ошибки в определении  $\mathcal{G}$  вследствие пренебрежения пластическими деформациями, если зона, ограниченная радиусом  $r_1$ , включает главную часть пластической зоны деформирования. Когда  $\mathcal{G}$ , рассматриваемая как функция расширения трещины, проходит через экстремум, интеграл (1.47) равен нулю. По предположению, пластические деформации располагаются в приповерхностном слое, толщина которого мала по сравнению с длиной трещины. Поэтому ослабление напряжений пластическим течением около поверхностей трещины можно оценить изменением  $\mathcal{G}$ , характеризуемым производной  $\partial \mathcal{G} / \partial a$ , но это изменение относительно мало. Здесь же приведены экспериментальные данные по определению константы материала  $\mathcal{G}_c$ , полученные при расширении центральных трещин в пластинах при условии плоского напряженного состояния. Отмечается, что величина  $\mathcal{G}_c$  имеет такое значение в теории квазихрупкого разрушения, как понятие предела текучести в теории пластичности.

В следующем году была опубликована дискуссия по статье Ирвина [3].

Мак Клинтон (Mc Clintock) отметил, что хотя приложенное напряжение может быть очень высоким, тем не менее радиус пластической зоны является малым по сравнению с длиной трещины. Им проведены соответствующие оценки. Далее он отметил,

что пластическая зона состоит из двух областей: первая вызывается общей текучестью макроскопических областей, прилежащих к надрезу, вторая связана с хрупким разрушением, необходимым для соединения разветвлений трещины в близлежащих зернах. Радиус последней области равен порядку размера зерна.

Вильямс предложил дополнительную интерпретацию величины  $\mathcal{E}$ , указав на ее связь с радиусом кривизны в основании трещины. Первый член разложения перемещения нормального к трещине в ее конце имеет вид

$$v(x, 0) = \frac{2}{E} \left( \frac{E\mathcal{E}}{\pi} \right)^{1/2} (2x)^{1/2} \quad (1.50)$$

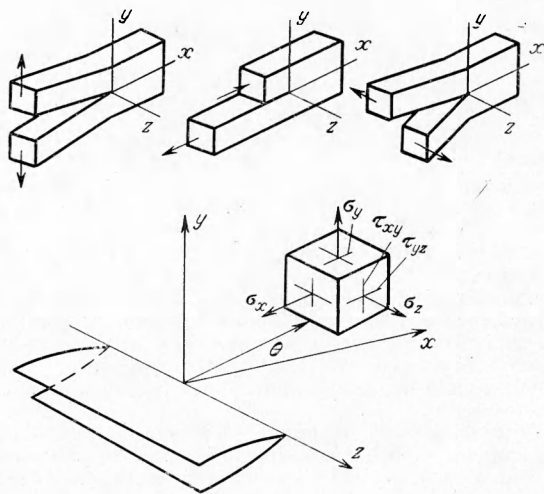
здесь начало координат помещено в конце трещины.

Локальный радиус кривизны  $\rho$  в основании трещины и величина  $\mathcal{E}$  связаны соотношением

$$\mathcal{E} = \frac{\pi E}{4} \rho \quad (1.51)$$

Вильямс обратил также внимание на связь представлений Ирвина и Нейбера.

В заключении дискуссии Ирвин отметил как его результаты могут быть распространены на случай продольного сдвига. Для этого достаточно представить функцию напряжения Эри в виде  $F = -y \operatorname{Re} \bar{Z}$ , где  $Z$  — функция Вестергарда, и тогда пять функций напряжений (1.7), (1.38) —



Фиг. 12

(1.40) определяют решение пяти специальных задач для трещин, находящихся под действием сил сдвига. Сила, расширяющая трещину, связанная с каждым из этих полей напряжений, определяет расширение трещины как сдвиговую дислокацию.

Ирвин отмечает, что связь гипотезы Нейбера о пластической частице и теории Гриффита обсуждалась Орованом [2]. Используя гипотезу Нейбера, Ирвин приводит выражение коэффициента интенсивности напряжений

$$K = \sigma_p \sqrt{\frac{\epsilon}{2}} \quad (1.52)$$

где  $\sigma_p$  — среднее растягивающее напряжение у конца трещины, а  $\epsilon$  — длина частицы Нейбера.

Эксперименты по сопротивлению разрушению не определяют отдельно величин  $\sigma_p$  или  $\sqrt{\epsilon}$ , поэтому для получения критического размера частицы Нейбера следует предполагать известную величину  $\sigma_p$ , являющейся обычно предельной величиной сопротивления разрыву.

Напомним, что в теории квазихрупкого разрушения достаточно определения величины коэффициента интенсивности напряжений  $K$ .

Далее Ирвин останавливается на особенностях экспериментального определения величины  $\mathcal{E}_c$ .

В обстоятельной статье «Разрушение», опубликованной в шестом томе «Физической энциклопедии», вышедшей в 1958 г. Ирвин [5], подробно осветил различные аспекты теории разрушения.

Обзор Ирвина состоит из пяти разделов: 1) сопротивление разрыву в жидкостях; 2) соотношения для напряжений и усилий при разрушениях; 3) образование и распространение трещин; 4) поле напряжений, скорость и ветвление распространяющейся трещины; 5) влияние размеров на разрушение. К теме настоящего обзора непосредственно относится второй раздел, где формулируются основные результаты теории квазихрупкого разрушения. В разделе освещаются основные этапы развития теории. Далее отмечается, что напряженное состояние в общем случае вблизи края трещины может быть представлено как наложение трех основных типов: поперечного (разрывающего или открывающего), связанного с  $\sigma_y$  и двух сдвиговых, связанных с  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$  (фиг. 12) <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Фиг. 12 заимствована из статьи Париса и Си [1], см. также Дональдсон и Андерсон [1].

Разрывающий тип напряженного состояния для случая плоского деформированного состояния описывается формулами

$$\begin{aligned}
 F &= \operatorname{Re} \bar{Z} + y \operatorname{Im} \bar{Z}, \quad \bar{Z} = K_I \sqrt{2z}, \quad z = x + iy \\
 \sigma_x &= K_I \frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2r}} \left\{ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right\} \\
 \sigma_y &= K_I \frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2r}} \left\{ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right\}, \quad \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) = 2\nu K_I \frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2r}} \\
 \tau_{xy} &= K_I \frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \quad \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0 \\
 u &= \frac{K_I \sqrt{2r}}{2G} \cos \frac{\theta}{2} \left\{ 1 + 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \\
 v &= \frac{K_I \sqrt{2r}}{2G} \sin \frac{\theta}{2} \left\{ 2(1-\nu) - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right\}, \quad w = 0
 \end{aligned} \tag{1.53}$$

Здесь  $F$  — функция напряжений,  $K_I$  — коэффициент интенсивности напряжений, связанный с величиной  $\mathcal{S}_I$  выражением

$$K_I = \frac{2C\mathcal{S}_I}{1-\nu} = \frac{E\mathcal{S}}{\pi(1-\nu^2)} \tag{1.54}$$

Для случая плоского напряженного состояния

$$\sigma_z = 0, \quad K_I^2 = E\mathcal{S}_I/\pi \tag{1.55}$$

Для сдвигового типа, вызванного напряжением  $\tau_{xy}$ , имеет место

$$\begin{aligned}
 F &= -y \operatorname{Re} \bar{Z}, \quad \bar{Z} = K_{II} \sqrt{2z} \\
 \sigma_x &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2r}} \sin \frac{\theta}{2} \left\{ 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right\} \\
 \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \quad \sigma_z = -2\nu \frac{K_{II}}{\sqrt{2r}} \sin \frac{\theta}{2} \\
 \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left\{ 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right\}, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\
 u &= \frac{K_{II} \sqrt{2r}}{2G} \sin \frac{\theta}{2} \left\{ 2(1-\nu) - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right\} \\
 v &= -\frac{K_{II} \sqrt{2r}}{2G} \cos \frac{\theta}{2} \left\{ (1-2\nu) - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}, \quad w = 0
 \end{aligned} \tag{1.56}$$

Здесь  $K_{II}$  — соответствующий коэффициент интенсивности напряжений, связанный с  $\mathcal{S}_{II}$  — силой, вызывающей распространение трещины при данном скольжении, или модулем сдвига при распространении трещины, выражением

$$K_{II}^2 = \frac{2G\mathcal{S}_{II}}{\pi(1-\nu)} \tag{1.57}$$

Наконец, для сдвигового типа, вызванного напряжением  $\tau_{zy}$ , имеет место

$$\begin{aligned}
 u = v = 0, \quad Gw &= K_{III} \operatorname{Im} (\sqrt{2z}) = K_{III} \sqrt{2r} \sin \frac{\theta}{2} \\
 \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} &= 0 \\
 \tau_{xy} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2r}} \cos \frac{\theta}{2}, \quad \tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2r}} \sin \frac{\theta}{2}
 \end{aligned} \tag{1.58}$$

Здесь обозначения  $K_{III}$ ,  $\mathcal{S}_{III}$  имеют аналогичный предыдущему смысл, причем

$$K_{III}^2 = \frac{2G\mathcal{S}_{III}}{\pi} \tag{1.59}$$

Три величины  $\mathcal{S}_I, \mathcal{S}_{II}, \mathcal{S}_{III}$  характеризуют скорости передачи энергии при распространении трещины от окружающего упругого поля деформации другим формам энергии.

Процессы сдвига, связанные с  $\mathcal{S}_{II}, \mathcal{S}_{III}$ , если они не сопровождаются первым типом развития трещин, не представляют собой трещиноподобные деформации в обычной интерпретации. Твердые тела могут быть очень чувствительны к местному сдвигу, например, керамика. Однако у металлов локализация пластической зоны вблизи конца трещины при сдвиге, как правило, места не имеет, и основное внимание исследователей, работающих в области квазихрупкого разрушения, сосредоточено, как отмечает Ирвин, на изучении разрушений открывающихся типов трещин.

Ирвин показывает, как из решения задач о концентрации напряжений может быть получено выражение коэффициента интенсивности напряжений

$$K = \lim_{\rho \rightarrow 0} (1/2 \sigma_{\max} \sqrt{\rho}) \quad (1.60)$$

где  $\sigma_{\max}$  — максимальное напряжение, а  $\rho$  — радиус в вершине надреза.

Ирвин обсуждает вопросы экспериментального определения величины  $\mathcal{S}$ . Рассмотрим растягиваемую пластину с центральной расположенной трещиной (фиг. 13).



Фиг. 13

Подобный образец можно создать следующим образом: выпилить или вырезать узкое отверстие перпендикулярно направлению растяжения и приложить расклинивающие силы так, чтобы создать единственные концы трещины в крае каждого выреза. Предположим, что трещина получила приращение длины  $\delta x$ . Пусть процесс происходит достаточно медленно и кинетической энергией можно пренебречь. Обозначим соответствующее удлинение пластинки  $\delta l$ . Упругую часть удлинения обозначим  $l_e$ , пластическую через  $l_p$ . Тогда

$$l = l_e + l_p, \quad \delta l = \delta l_e + \delta l_p \quad (1.61)$$

Примем  $F = M l_e$ , где  $M$  — характеристика жесткости образца (spiring constant), которая зависит от конфигурации тела, включая и размер трещины, и является убывающей функцией длины трещины.

Энергия деформации пластины будет иметь вид

$$U = 1/2 F l_e \quad (1.62)$$

Отсюда

$$\delta U = F \delta l_e - 1/2 F^2 \delta (1/M) \quad (1.63)$$

Рассмотрим равенство

$$F \delta l = \delta U + \delta W \quad (1.64)$$

Отсюда

$$\delta W = F \delta l_p + 1/2 F^2 \delta (1/M) \quad (1.65)$$

Если считать фиксированным расстояние между захватами, то при распространении трещины

$$\frac{dW}{dx} \delta x = -\delta U_1 = F \delta l_p + 1/2 F^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{M} \right) \delta x \quad (1.66)$$

где  $(-\delta U_1)$  — потеря энергии деформации при условиях постоянной длины растягиваемого образца. Если пластические удлинения малы, то из (1.66) следует

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} F^2 \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{M} \right) \quad (1.67)$$

В выражение (1.67) не входят члены, содержащие приращение силы  $dF$ , поэтому величина  $\mathcal{S}$  не зависит от способа нагружения (например, распространения трещины в случае постоянных сил или постоянного удлинения). Зависимость (1.67) позволяет осуществить экспериментальное определение константы  $\mathcal{S}_c$ .

В конце раздела Ирвин приводит ряд экспериментально определенных констант  $\mathcal{S}_c$  для различных материалов.

В этом же разделе Ирвин приводит некоторые новые решения задач о трещинах, полученных методом Вестергарда. Ряд коллинеарных плоских трещин, находящихся под действием всестороннего растягивающего напряжения  $p$  на бесконечности, описываются функцией Вестергарда

$$Z = p \prod_{i=1}^N \left\{ 1 - \frac{a_i}{(z - b_i)^2} \right\}^{-1/2} \quad (1.68)$$

где  $b_i$  — последовательность возрастающих действительных чисел, величины  $a_i$  положительны

$$b_i + a_i + a_{i+1} < b_{i+1} \quad (1.69)$$

В данном случае имеет место  $N$  трещин со свободными поверхностями

$$|x - b_i| < a_i \quad (1.70)$$

На правом конце  $j$ -й трещины параметр интенсивности напряжений имеет вид

$$K_j = p \sqrt{a_j} \prod_{i \neq j}^N \left\{ 1 - \frac{a_i}{(a_j + b_j - b_i)^2} \right\}^{-1/2} \quad (1.71)$$

Для случая ряда коллинеарных трещин, рассмотренных Вестергардом (вторая формула (1.7)), вычислен коэффициент интенсивности напряжений

$$K = p \left( \frac{l}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{l} \right)^{1/2}, \quad (1.72)$$

Коэффициент интенсивности напряжений в окрестности точки для случая (1.38) определен в виде

$$K = \frac{P}{\pi \sqrt{a}} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \quad (1.73)$$

Так как величины  $Z$  и  $K$  аддитивны для полей напряжений, то решение задачи для любого распределения давления вдоль краев трещины может быть получено из (1.38), (1.73) заменой  $P = p(b) db$  и интегрированием этих соотношений по  $b$ .

Не имея возможности подробно осветить богатый материал других разделов Ирвина, остановимся на данном им анализе структуры края трещины (раздел 4, подраздел II, стр. 557 и последующие).

Исследование уравнений (1.53) для открытой трещины показывает, что наибольшее напряжение растяжения не лежит в плоскости трещины  $xz$  (фиг. 12). Величина угла  $\theta$ , при котором достигается максимальное значение растягивающего напряжения на малом фиксированном расстоянии  $r$  от конца трещины, равна  $\pm \pi/3$  (фиг. 6). Следовательно, вблизи конца трещины наибольшее разрушение может иметь место при  $\theta = \pm \pi/3$ , где компоненты касательных напряжений достаточно велики, а растягивающие напряжения достигают максимума. Когда новые элементарные разрушения, образующиеся в стороне от идеализированного местоположения главной трещины, достигают достаточных размеров, малые, но постепенно развивающиеся дефекты соединяют их с главной трещиной и таким образом образуется сложный край главной трещины. Величина шероховатости границ разрушения зависит отчасти от текучести материала, которая препятствует образованию местных полостей, и т. п. Вследствие природы образования и характера полей напряжений избежать появления шероховатости при разрушении можно только в исключительных случаях, например, при расщеплении хрупких единичных кристаллов. Вообще же характер образования трещины зависит от текучести материала, направлений ослабления материала, природы местных дефектов, полей напряжения. Так для низкоуглеродистой стали по мнению Паркера (Parker, 1957 г.) при комнатной температуре преимущественный вклад в образование малых элементов разрушения вносят плоскости максимальных касательных напряжений, хотя главная трещина располагается в плоскости, нормальной к наибольшему нормальному напряжению общего поля напряжений. В том же самом материале при низкой температуре доминируют раскалывающие образования и поверхность разрушения содержит много малых элементов образований в плоскостях, почти параллельных главной трещине.

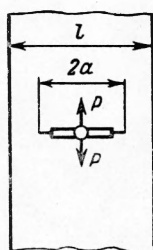
В основном Ирвин рассматривает вопросы, связанные с неустойчивым быстрым разрушением. В разделе 5 (подраздел 15, стр. 586 и последующие) Ирвин обсуждает ряд вопросов, связанных с устойчивым (самотормозящимся) (self — arresting) процессом распространения трещин.

Вопросам экспериментального и теоретического определения констант разрушения  $\mathcal{K}_c$  для конструкций типа роторов посвящена статья Винна (Winne) и Вундта (Wundt) [1].

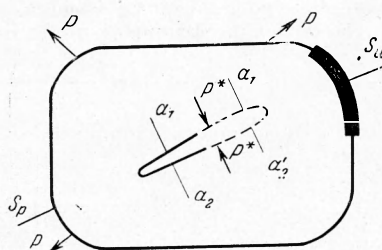
Рассматривались диски, имеющие внутреннее отверстие, ослабленные выточками, имитирующими трещины. Наряду с испытаниями дисков, проводились эксперименты по определению  $\mathcal{K}_c$  на изгиб надрезанных образцов. Авторы пришли к выводу, что величина  $\mathcal{K}_c$  является константой материала. Статья Винна и Вундта содержит ряд теоретических решений. Работа Винна и Вундта вызвала оживленную дискуссию среди специалистов. В ней приняли участие Фельбек (Felbeck), Ирвин, Петерсон (Peterson), Робинсон (Robinson), Уэллс (Wells).

Вопросам экспериментального определения констант  $\mathcal{F}_c$ , в основном, посвящена также статья Ирвина, Киса (Kies) и Смита (Smith) [1]. В аннотации к работе авторы отмечают, что определение величины  $\mathcal{F}_c$  совместно с анализом напряжений и начальной длины трещины имеет большое значение при исследовании разрушений фюзеляжа реактивных самолетов, турбогенераторных двигателей, реактивных двигателей и т. п.

В статье описаны различные экспериментальные методы определения константы  $\mathcal{F}_c$ : эксперименты на изгиб надрезанных образцов, растяжение круглых надрезанных образцов, растяжение надрезанных в центре плоских листов. Обсуждаются вопросы различия разрушения при плоской деформации и плоском напряженном состоянии. При плоской деформации разрушения начинаются с центра надреза (в глубине материала по кромке трещины), при плоском напряженном состоянии сдвиговые разрушения начинаются с поверхности пластины.



Фиг. 14



Фиг. 15

Достижение величиной  $\mathcal{F}$  критического значения  $\mathcal{F}_c$  связывается в статье в основном с началом быстрого неустойчивого роста трещин. Это обстоятельство связано с характером рассмотренных экспериментов: в них действительно начавшийся рост трещины приводит к разрушению образца. Однако в этой же статье авторы описывают эксперимент по расклиниванию трещин длиной  $2a$  в пластине шириной  $l$  центрально приложенными силами  $P$  (фиг. 14). Используя решение (1.40), авторы приводят выражение для  $\mathcal{F}$ , которое имеет вид

$$\mathcal{F} = \frac{2P^2}{El \sin\left(\frac{2\pi a}{l}\right)} \quad (1.74)$$

При подобных испытаниях расширение трещины при постоянном нагружении вызывает уменьшение напряжений на конце трещины и процесс расширения трещины является устойчивым (самотормозящимся) (crack extension process is self — arresting).

Авторы отмечают, что величина константы  $\mathcal{F}_c$ , определенная при экспериментах с устойчивыми (равновесными) трещинами, будет несколько меньше значения той же константы, определенной из экспериментов, связанных с устойчивым ростом трещин.

Это обстоятельство связано с зависимостью свойств материала от скорости деформации: более быстрое развитие трещины встречает большее сопротивление.

Для измерения  $\mathcal{F}_c$  или  $K_c$  в данном случае авторы предлагают использовать зависимость между приложенной нагрузкой и длиной трещины, с одной стороны, и величинами  $\mathcal{F}_c$  или  $K_c$ , с другой, определяемую соотношением (1.74).

В статье обсуждаются также вопросы влияния температуры, толщины образцов, динамической нагрузки на разрушение. В последнем разделе «приложения анализа сопротивления разрушению» авторы обсуждают вопросы предотвращения роста трещин, например, в герметических кабинах самолетов. Указано, как можно считать соответствующие условия прекращения роста трещин (crack arrest).

В обстоятельной статье Ирвин [2] вновь излагает основные представления механики квазирупкого разрушения. Ирвин приводит ряд новых выражений для коэффициентов концентрации напряжений. Аналогично своей статье [5], он подробно обсуждает экспериментальные данные.

В 1958 г. появилась статья Бюкнера (Bueckner) [1], посвященная анализу изменения упругой энергии тела при развитии трещин.

Следуя Бюкнеру, рассмотрим тело объемом  $v$ , ограниченное поверхностью  $S = S_p + S_u$  (фиг. 15). Массовые силы обозначим через  $\bar{x}_i$ , на части поверхности  $S_p$  определены усилия  $p_i$ , на  $S_u$  — перемещения  $u_{i0}$ . Исходное напряженное и деформированное состояние тела с трещиной до ее развития характеризуется тензорами  $\sigma_{ij}$ ,  $\epsilon_{ij}$ , вектором перемещений  $u_i$ .

Предположим, что при нагружении боковые поверхности трещины  $a_1$ ,  $a_2$  отделяются и что они свободны от поверхностных усилий. Рассмотрим виртуальное расширение трещин, которое приводит к образованию ее дополнительных боковых поверх-

ностей  $a_1', a_2'$ , указанных пунктиром на фиг. 15. Массовые и поверхностные усилия предполагаются неизменными. Напряженное и деформированное состояние тела с измененной трещиной (варьированное состояние) будет характеризоваться соответственно компонентами  $\sigma_{ij}', e_{ij}', u_i'$ .

Исходное состояние в дальнейшем можно интерпретировать как состояние тела с расширенной трещиной. Тогда вдоль  $a_1', a_2'$  должны действовать вполне определенные усилия  $p_i^*$ , удерживающие трещину в нераскрытом состоянии на этом участке (разрыв  $[u_i]$  на участке длиной  $|a_1'|$  в исходном состоянии равен нулю). Очевидно, что вектор  $p_i^*$  изменяет направление на обратное при переходе к противоположному берегу трещины.

Изменение работы внешних сил при распространении трещины имеет вид

$$W_e = \int_V X_i (u_i' - u_i) dv + \int_{S_p} p_i (u_i' - u_i) dS \quad (1.75)$$

Приращение работы внутренних сил обозначим

$$W_i = U - U' \quad (1.76)$$

где энергии деформации исходного и варьированного состояний определены в виде

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} e_{ij} dV, \quad U' = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}' e_{ij}' dV \quad (1.77)$$

Условие распространения трещины Бюкнер записывает в виде

$$W = W_e + W_i > \mathcal{E}_c |a_1'| \quad (1.78)$$

где  $W$  — общее приращение работы,  $|a_1'|$  — приращение площади трещины.

Введем выражение смешанной энергии тела

$$U_m = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}' e_{ij} dv = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} e_{ij}' dV \quad (1.79)$$

Из (1.76), (1.77), (1.79) следует, что

$$-W_i = U' - U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij}' + \sigma_{ij}) (e_{ij}' - e_{ij}) dV \quad (1.80)$$

Рассмотрим два вспомогательных состояния: «суммарное» с напряжениями  $\sigma_{ij}^+ = \sigma_{ij}' + \sigma_{ij}$ , деформациями  $e_{ij}^+ = e_{ij}' + e_{ij}$ , перемещениями  $u_i^+ = u_i' + u_i$  и «разностное» с соответствующими компонентами  $\sigma_{ij}^- = \sigma_{ij}' - \sigma_{ij}$ ,  $e_{ij}^- = e_{ij}' - e_{ij}$ ,  $u_i^- = u_i' - u_i$ .

В связи с указанной выше интерпретацией исходного состояния суммарное и разностное состояния могут быть представлены следующим образом.

Суммарное состояние соответствует напряженному и деформированному телу  $V$  с расширенной трещиной при массовых силах  $2X_i$ , поверхностных  $2p_i$  на  $S_p$ , смещениях  $2u_{i0}$  на  $S_u$ , нулевым поверхностным силам на  $a_1, a_2$  и поверхностным силам  $p_i^*$  вдоль  $a_1', a_2'$ . Аналогично разностное состояние соответствует отсутствию массовых сил в теле, отсутствию усилий и перемещений на  $S_p$  и  $S_u$ , отсутствию поверхностных усилий на  $a_1, a_2$  и определяется лишь поверхностными усилиями  $p_i^*$  на  $a_1', a_2'$ .

Тогда согласно теореме Бетти, переходя от внутренних сил к внешним, интеграл (1.80) может быть переписан в виде

$$-W_i = U' - U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^+ e_{ij}^- dV = \int_V X_i u_i^- dV + \int_{S_p} p_i u_i^- dS + \frac{1}{2} \int_{a_1'+a_2'} p_i^* u_i^- dS \quad (1.81)$$

Из (1.81), (1.75) следует

$$W = W_e + W_i = -\frac{1}{2} \int_{a_1'+a_2'} p_i^* u_i^- dS \quad (1.82)$$

Используя теорему Клайперона, переходя от внешних сил к внутренним, преобразуем (1.82) к виду

$$W = -\frac{1}{2} \int_{a_1'+a_2'} p_i^* u_i^- dS = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^- e_{ij}^- dV = U^{(-)} \quad (1.83)$$

где  $U^{(-)}$  — энергия деформации разностного состояния.



Энергия разностного состояния  $U^{(-)}$  всегда неотрицательна. Анализ соотношений (1.78), (1.82) показывает, что искомое изменение энергии  $W$  равно работе усилий  $p_i^*$ , закрывающих трещину на соответствующих перемещениях. Это обстоятельство в форме предположения было использовано Ирвиным при выводе своей формулы (1.48), Бюкнером дано обоснование этого приема.

Итак, согласно (1.78), (1.82), (1.83), условие распространения трещины может быть записано в виде

$$\lim_{a_1' \rightarrow 0} \frac{U^{(-)}}{|a_1'|} = \frac{\partial U^{(-)}}{\partial a} \geq \mathcal{E}_c \quad (1.84)$$

где  $\partial U^{(-)}/\partial a$  — скорость освобождения упругой энергии.

Бюкнер замечает, что так как на распространение трещины влияет только энергия разностного состояния  $\bar{U}^{(-)}$ , то ничего не изменится, если из исходного и варьированного состояний будет вычтено одно и то же напряженное и деформированное состояние. В качестве такого состояния, могут быть взяты компоненты  $\sigma_{ij}^{\circ}$ ,  $e_{ij}^{\circ}$ ,  $u_i^{\circ}$ , характеризующие напряженное и деформированное состояние тела  $V$  без трещины, находящейся под действием тех же массовых сил и граничных условий на  $S$ . Напряженное и деформированное состояние  $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{\circ}$ ,  $e_{ij} - e_{ij}^{\circ}$ ,  $u_i - u_i^{\circ}$  соответствует состоянию тела  $V$  в случае отсутствия массовых сил, нулевых граничных условиях на  $S$ . Трещина находится под действием усилий  $p_i^{\circ}$ , возникающих в теле без трещины на поверхности, соответствующей поверхности трещины. Таким образом, можно считать, что расширение трещины зависит только от усилий  $p_i^{\circ}$ , приложенных по берегам трещины.

Далее Бюкнер рассматривает два специальных случая. Предположим, что  $S_u = 0$ , т. е. всюду на боковой поверхности тела  $S$  определены усилия  $p_i$ . В этом случае интеграл (1.81) при помощи теоремы Бетти преобразуется к виду

$$U' - U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^+ e_{ij}^- dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^- e_{ij}^+ dV = -\frac{1}{2} \int_{a_1'+a_2'} p_i u_i^* dS \quad (1.85)$$

Учитывая, что

$$\int_{a_1'+a_2'} p_i^* u_i dS = 0 \quad (1.86)$$

так как величина  $u_i$  одна и та же на поверхностях  $a_i$ , а  $p_i^*$  меняет знак на противоположный, получим

$$\int_{a_1'+a_2'} p_i^* u_i^- dS = \int_{a_1'+a_2'} p_i^* u_i^+ dS \quad (1.87)$$

Сравнивая (1.82), (1.85), (1.87), найдем

$$W_e = 2U^{(-)}, W_i = U - U' = -U^{(-)} W = U^{(-)} \quad (1.88)$$

Таким образом, при действии постоянной нагрузки энергия деформации уменьшается. Однако работа приложенных сил дает удвоенную энергию деформации и их разность идет на расширение трещины.

Пусть далее расширение трещины рассматривается при условии фиксированных границ. В этом случае предполагается, что варьированное состояние имело те же перемещения, что и исходное вдоль  $S_p$  и фиксированные перемещения  $u_{i0}$  вдоль  $S_u$ . В этом случае перемещения разностного состояния  $u_i^-$  равны нулю вдоль  $S$ . Выражение  $W_e$  представляет тогда виртуальную работу только массовых сил. Если массовых сил нет, то

$$W = U^{(-)} = U - U' \quad (1.89)$$

Энергия деформации уменьшается при расширении трещин и это уменьшение идет на расширение трещины.

Бюкнер отмечает, что энергия разностного поля  $U^{(-)}$  для случая фиксированных границ меньше, чем та же энергия для разностного поля при фиксированных нагрузках. Однако для бесконечно малого расширения трещины эта разность стремится к нулю. В качестве иллюстрации рассмотрена одномерная упругая система. Рассуждения вполне аналогичны рассуждениям Ирвина [5], соответствующим соотношениям (1.61) — (1.67).

Бюкнер дал вывод формулы Ирвина (1.46) в случае развития трещины при действии постоянной нагрузки. Аналогичные рассуждения могут быть использованы в случае фиксированных границ. Критерий распространения трещины принимает форму

$$\mathcal{G} \geq \mathcal{G}_c \tag{1.90}$$

В качестве примера Бюкнер рассматривал вращающийся диск с трещиной. В дискуссии по его работе принял участие Ирвин.

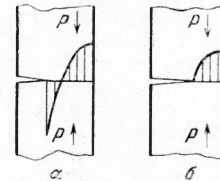
По существу после работ Ирвина, Орована, исследований Бюкнера и др. теория квазихрупкого разрушения в 1957/58 г. получила законченную формулировку для основных случаев деформирования. К этому времени она нашла также обстоятельную экспериментальную проверку.

§ 3. Другие подходы к теории квазихрупкого разрушения. Вне связи с работами Гриффита Вестергард [1] (1933 г.), [2] (1939 г.) предложил силовой подход в теории трещин в хрупких материалах типа бетона.

В первой работе Вестергард [1] рассмотрел железобетонные балки с трещинами в бетоне. Он исходил из условия, что растягивающие напряжения на конце трещины в бетонной балке, сдавливаемой силой  $P$ , невозможны (фиг. 16, а) и в подобных случаях неизбежно удлинение трещины до тех пор, пока эпюра напряжений не примет вид, указанный на фиг. 16, б<sup>1</sup>.

Исследование основано на решении задачи теории упругости при отсутствии концентрации растягивающих напряжений вблизи вершины трещины

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{K \sqrt{r}}{4} (-\sin 2.5\theta - \sin 0.5\theta) \\ \sigma_\theta &= \frac{K \sqrt{r}}{4} (\sin 2.5\theta - 5 \sin 0.5\theta) \\ \tau_{r\theta} &= \frac{K \sqrt{r}}{4} (-\cos 2.5\theta + \cos 0.5\theta) \end{aligned} \tag{1.91}$$



Фиг. 16

где  $K$  — постоянная, зависящая от величины сжимающих усилий, система координат указана на фиг. 1, i;

Решение является приближенным, так как краевые условия точно не удовлетворяются, приближенно учитывается и влияние арматуры. Однако эти условия не сказываются на характере распределения напряжений и перемещений вблизи вершины трещины.

Из решения теории упругости следует соотношение, определяющее ширину трещины в виде

$$v = \frac{8K}{3E} r^{1.5} \left(1 - \frac{2}{5a}\right) \tag{1.92}$$

Из (1.92) следует, что на конце трещины должна иметь плавность смыкания ее берегов

$$\left. \frac{dv}{dr} \right|_{r=0} = 0 \tag{1.93}$$

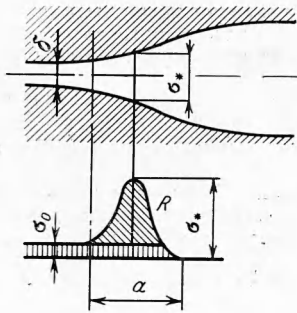
Однако Вестергард [1], учитывая приближенный характер построений, приходит к клиновидному угловому раскрытию трещины

$$\left. \frac{dv}{dr} \right|_{r=0} = \frac{8K \sqrt{a}}{3E} \tag{1.94}$$

В упоминавшейся выше в § 1 работе Вестергард [2] приводит точное решение задачи о расклинивании трещины в плоскости сосредоточенными усилиями при условии конечности растягивающих напряжений на конце трещины.

Представления о плавности смыкания краев трещины развивались Эллиотом [1] (1947 г.). П. А. Ребиндер [1] (1947 г.) отметил клиновидность формы трещины на ее концах. Попытка усовершенствовать теорию Гриффита на случай трещин, плавно смыкающихся на концах, была предпринята Я. И. Френкелем [1] (1952 г.).

<sup>1</sup> В связи с этим отметим неточность следующего утверждения Г. И. Баренблата [2] на стр. 12. «Вестергард не связывал условие конечности напряжений с определением продольного размера трещины, который он считал заданным».



Фиг. 17

Баренблатт и С. А. Христианович [1], Ю. П. Желтов [1,2]).

Работа Г. И. Баренблатта [1] упоминалась в § 1. Связь между длиной трещины и нагрузкой в этой работе определяется исходя из гипотезы о конечности напряжений на концах трещины. На основе решения Снеддона [2] рассмотрены некоторые частные решения о круглой трещине в пространстве, находящейся под действием осесимметричной нагрузки.

Упомянутые решения Вестергарда [1,2], Ю. П. Желтова и С. А. Христиановича [1], Г. И. Баренблатта [1,2] соответствуют с точки зрения Гриффита  $T=0$  и Ирвина — Орована — случаю  $\mathcal{E}_c = 0$ .

А. Р. Ржаницын [1] (1956 г.) аналогично Я. И. Френкелю [1] исходит из представления о заостренной форме концов круглой трещины. Он отметил некоторые неточности анализа Я. И. Френкеля, ввел малую концевую зону  $a$ , на которой действуют силы взаимодействия краев трещин. На фиг. 17, а показан конец трещины, на фиг. 17, б приведена эпюра сил взаимодействия краев трещин,  $\sigma_0$  — напряжение растяжения от внешней нагрузки,  $\sigma_*$  — теоретический предел прочности,  $R$  — площадь эпюры сил взаимодействия или «дополнительных напряжений» по А. Р. Ржаницыну,  $\delta$  — расстояние между берегами слоя, в котором образуется трещина,  $\delta_*$  — расстояние, соответствующее максимуму  $R$  или  $\sigma_*$ . Величина  $R$  не зависит от  $\sigma_0$  и может быть выражена формулой

$$R = \int_0^a \sigma(\delta) dx \quad (1.95)$$

Дан энергетический анализ расширения трещины, дана оценка критических величин трещин. В случае образования трещин при заданной деформации удлинения приведен силовой метод расчета критического радиуса трещин.

В своих последующих работах Г. И. Баренблатт и в [3,4] (1959 г.) аналогично А. Р. Ржаницыну [1] вводит малую зону вблизи края трещины, на которой действуют силы сцепления. В работе [4] рассматривается случай пространства, ослабленного дискообразной трещиной, находящейся под действием осесимметричной нагрузки.

Исходя из условия плавности смыкания и решения Снеддона [2], определяется условие распространения трещины

$$\int_0^a \frac{rp(r) dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = K \sqrt{\frac{a}{g}}, \quad K = \text{const} \quad (1.96)$$

где  $a$  — радиус трещины,  $p(r)$  — нагрузка,  $K$  определяется как модуль сцепления.

В работе [3] рассматривается случай плоской задачи; выражение, аналогичное (1.96), имеет вид

$$\int_0^a \frac{p(x) dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{K}{\sqrt{2a}}, \quad K = \text{const} \quad (1.97)$$

В этой работе формулируется общее правило: «концы трещин определяются из условия, что напряжения вблизи них, вычисленные без учета сил сцепления, обращаются в бесконечность по закону

$$K / \pi \sqrt{s} \quad (1.98)$$

Это правило позволяет вообще исключить из рассмотрения силы сцепления как таковые.

Отметим, что величина  $s$  характеризует расстояние от конца трещины и совпадает с  $r$  из (1.53).

Из приведенной цитаты следует, что построения Г. И. Баренблатта привели к критериям развития трещин теории Гриффита — Ирвина<sup>1</sup>.

В работе [6] им рассматривается связь между силовым и энергетическим подходом в теории квазихрупкого разрушения. Даны выражения для скорости освобожденной упругой энергии для пространств с одной трещиной в случае осесимметричной и плоской задач

$$\frac{\partial W}{\partial a} = \frac{8(1-\nu^2)}{E} \left\{ \int_0^a \frac{r p(r) dr}{\sqrt{a^2-r^2}} \right\}^2, \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{a}} = \frac{8(1-\nu^2)a}{E} \left\{ \int_0^a \frac{p(x) dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \right\} \quad (1.99)$$

где  $W$  — упругая энергия.

Из сравнения (1.99) и соответственно (1.96), (1.97) следует констатация силового и энергетического подходов<sup>2</sup>.

В 1960 г. опубликована работа [7], посвященная условию конечности в механике сплошных сред. Условие конечности было положено Г. И. Баренблаттом в основу своего построения теории трещин. Изложение этих представлений можно найти в его работах [8–11] и др. Обсуждение их содержится в работах Д. Д. Ивлева [1] и Г. П. Черепанова [11].

В работе [9] (1964 г.) вводится универсальная функция коэффициентов сцепления<sup>3</sup>. Рассматриваются вопросы распространения равновесных трещин, построения предельной поверхности параметров нагружения  $\lambda_i$ , моделирования при хрупком разрушении.

В работе Кира (Keer) [1] (1964 г.) используются представления о силах сцепления и плавности смыкания берегов трещины. В рамках классической теории упругости определяются напряжения сцепления и область трещины, где действуют напряжения сцепления. Рассмотрена осесимметричная трещина в случаях однородного растяжения и сдвига, а также аналогичная двумерная задача при однородном растяжении. В книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [1] (1965 г.) дано изложение теории плавно смыкающейся трещины в упругой среде при помощи математического аппарата теории дислокаций. Отмечено, что «в своем буквальном виде изложенная теория... фактически применима к идеально хрупким телам, т. е. сохраняющим линейную упругость вплоть до разрушения (таким как стекло, плавленый кварц)».

Напряженное состояние вблизи конца плавно смыкающейся трещины рассмотрено также Бакером (Baker) [1]. Обсуждение вопросов, связанных с критерием разрушения развития трещин, на концах которой действуют силы сцепления, содержится в работе Виллиса (Willis) [1].

Сделаем несколько замечаний по работам, основанным на гипотезе конечности напряжений. Изменение энергии при образовании трещины может быть представлено согласно (1.26) в виде

$$\delta W = \delta \Pi \quad (1.100)$$

Работа, требуемая на образование новых свободных поверхностей трещины, отлична от нуля, следовательно,  $\delta \Pi \neq 0$ . Поэтому изменение упругой энергии тела при образовании трещины всегда отлично от нуля  $\delta W \neq 0$ . Согласно (1.35), при  $\delta W \neq 0$  величина  $\mathcal{E}$  отлична от нуля, поэтому гипотеза конечности напряжений может быть использована как допущение, основанное на возможности пренебрежения в некоторых случаях величиной  $\delta W$ , когда константа материала  $\mathcal{E}_c$  мала, хотя, строго говоря,  $\mathcal{E}_c \neq 0$ . Авторы теории квазихрупкого разрушения исходили из того, что в концевой зоне трещины материал не подчиняется законам линейной теории упругости и формулировка силового условия возможна на основе связи коэффициентов интенсивности напряжения со скоростью освобождения упругой энергии в теле. Вкладом концевой зоны в общее выражение скорости освобожденной энергии согласно оценкам Ирвина и других при квазихрупком разрушении можно пренебречь.

<sup>1</sup> В этой связи отметим, что некоторые авторы имеют недостаточное представление об истории вопроса. Так в реферате на статью Си [6] (РЖ Мех. № 2, 1966, 2В 363) Р. А. Салганик пишет: «Автор неправ, утверждая, что подход, основанный на понятиях, связанных с коэффициентами интенсивности, принадлежит Ирвину. Теория трещин на основе таких представлений развита Г. И. Баренблаттом (ПМТФ, 1961, № 4)».

<sup>2</sup> Установление эквивалентности силового и энергетического подхода и развитие силового метода явилось одним из основных достижений теории Гриффита — Ирвина и было выполнено в общем случае в цитированных исследованиях Ирвина, Бюкнера и др.

<sup>3</sup> См. также Си, Парис, Эрдоган [1] (1962 г.).

Рассмотренные модели, основанные на представлении о плавности смыкания берегов трещины, существенно опираются на предположение о сохранении законов линейной теории упругости в концевой зоне. Силы сцепления вызывают перемещения на основе законов линейной упругости. Подобные представления неприложимы для описания квазихрупкого разрушения. Напомним, что по определению квазихрупкое разрушение сопровождается возникновением малой пластической зоны вблизи концов трещины.

§ 4. Дальнейшее развитие теории квазихрупкого разрушения. После основополагающих работ Гриффита, Ирвина и других исследователей теория квазихрупкого разрушения получила интенсивное развитие в основном за счет расширения области приложений.

Интегральная трактовка теории Гриффита — Ирвина принадлежит Сандерсу (Sanders) [1] (1960 г.). Рассмотрим пластину с трещиной длиной  $L(\alpha)$ , где  $\alpha$  — параметр, возрастающий с ростом  $L$ . Пусть компоненты напряжения деформации, перемещения  $\sigma_{ij}$ ,  $\epsilon_{ij}$ ,  $u_i$  являются известными функциями координат, времени  $x, y, t$  и параметра  $\alpha$ . Пусть далее  $C$  — замкнутая кривая, окружающая трещину. В соответствии с теорией Гриффита — Ирвина при виртуальном изменении длины трещины должен иметь место энергетический баланс: скорость работы усилий на контуре  $C$  равна скорости увеличения энергии деформации, запасенной в материале внутри контура  $C$ , плюс скорость энергии, расходуемой на изменение длины трещины

$$\oint_C T_i \frac{du_i}{dt} ds = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \oint_C T_i u_i ds + \mathcal{E} \frac{dL}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} \quad (1.101)$$

где  $T_i$  — усилия на контуре,  $\mathcal{E}$  — постоянная.

После преобразований уравнение (1.101) принимает вид

$$I = \frac{1}{2} \oint \left( T_i \frac{\partial u_i}{\partial \alpha} - u_i \frac{\partial T_i}{\partial \alpha} \right) dS = \mathcal{E} \frac{dL}{d\alpha} \quad (1.102)$$

Соотношение (1.102) представляет критерий разрушения Гриффита — Ирвина в интегральной форме. Соотношение (1.102) не должно зависеть от контура  $C$ .

Сандерс [1] отмечает, что результаты сохраняются, если контур  $C$  является незамкнутым и начинается и кончается на свободных поверхностях трещины, окружая ее вершину. Он дает выражение критерия (1.102) в функциях Н. И. Мусхелишвили [1]. В качестве примера рассмотрена прямоугольная пластина с трещиной в двух случаях: при фиксированных границах и постоянной нагрузке. Другой пример связан с решением Вестергарда (1.7).

Отметим обзор Дональдсона (Donaldson) и Андерсона (Anderson) [1], посвященный приложениям теории квазихрупкого разрушения к авиационным конструкциям. В этом обзоре подытожены основные результаты развития теории к 1961 г.

Исследование Вильямса [5]<sup>1</sup> посвящено определению характера сингулярности решения теории упругости вблизи края трещины в изгибаемой пластине.

Позднее в работе Си, Париса и Эрдогана [1] результаты Вильямса были использованы для определения соответствующих коэффициентов интенсивности напряжений при изгибе. В этой же работе Си, Парис и Эрдоган обсуждают вопрос о разрушении части листовой конструкции, ослабленной трещиной, нагруженной так, как показано на фиг. 18. Коэффициенты интенсивности напряжений от действия условий в плоскости пластины имеют вид

$$K_I = \frac{N_y}{h} a^{1/2}, \quad K_{II} = \frac{N_{xy}}{h} a^{1/2} \quad (1.103)$$

где  $h$  — толщина пластины.

Коэффициенты интенсивности при изгибе имеют вид

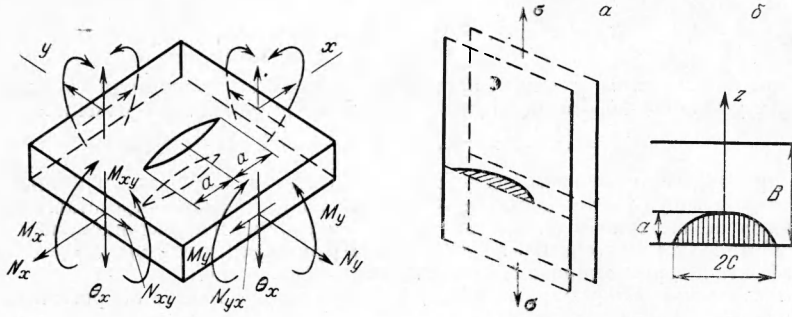
$$k_1 = \frac{6M_y}{h^2} a^{3/2} + \frac{8vQa^{3/2}}{h^2}, \quad k_2 = \frac{6M_{xy}}{h^2} a^{1/2} + \frac{8Qa^{2/2}}{h^2} \quad (1.104)$$

Распространение теории Гриффита — Ирвина на подобные задачи приводит к выводу: неустойчивое развитие трещины возникает при достижении определенной комбинацией коэффициентов интенсивности напряжений некоторого предельного значения

$$f(K_I, K_{II}, k_1, k_2) = 0 \quad (1.105)$$

<sup>1</sup> Обсуждение некоторых предположений Вильямса [5] содержится в заметке Редвуда (Redwood) и Шеферда (Shepherd) [1].

Однако при этом не учитывается взаимное влияние поверхностей трещины. В случае изгиба в одной из сторон листа трещина распространяется быстрее, чем в другой, это также не учитывается соотношением (1.105). Авторы отмечают, что введение зависимости (1.105) представляет шаг к более общему применению концепции Гриффита — Ирвина, однако всякое практическое исследование должно сопровождаться подтверждением принятых допущений. В заключение они подчеркивают, что основной вклад их работы состоит в том, что указан путь к более общему применению теории разрушения Гриффита — Ирвина.



Фиг. 18

Фиг. 19

В статье Ирвина [8] дан приближенный анализ коэффициентов интенсивности для несквозной трещины в пластине (фиг. 19). Для простоты предполагается, что трещина в плане представляет полуэллипс, уравнение границы которого имеет вид

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1, \quad a < c \tag{1.106}$$

Из исследования об плоской эллиптической трещине, выполненного Грином (Green) и Снеддоном [1], известно, что нормальное к трещине растяжение  $\sigma$  придает ей эллипсоидальную форму. Ирвин полагает, что нормальное перемещение поверхности трещины имеет вид

$$\eta = \eta_0 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} \right)^{1/2} \tag{1.107}$$

где  $\eta_0$  — половина максимального расхождения границ трещины.

Используя параметрическое представление границы эллипса  $x_1 = a \sin \varphi$ ,  $z_1 = c \cos \varphi$ , Ирвин приходит к определению величины  $\mathcal{S}$ , которая принимает вид

$$\mathcal{S} = \frac{\pi(1-\nu^2)\sigma^2}{E\Phi} \left( \frac{a}{c} \right) (a^2 \cos^2 \varphi + c^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} \tag{1.108}$$

где  $\Phi$  — эллиптический интеграл

$$\Phi = \int_0^{\pi/2} \left( \sin^2 \varphi + \left( \frac{a}{c} \right)^2 \cos^2 \varphi \right)^{1/2} d\varphi \tag{1.109}$$

Анализ соотношения (1.108) показывает, что  $\mathcal{S}$  принимает наибольшее значение, когда граница трещины пересекает малую ось эллипса. Таким образом, с возрастанием усилий растяжения  $\sigma$  эллиптическая трещина должна иметь тенденцию к образованию трещины круглой формы (разумеется, это не относится к случаю анизотропного материала).

Ирвин обсуждает поправки, которые должны быть учтены при практическом использовании результатов для несквозных трещин. Окончательно выражение для коэффициента интенсивности имеет вид

$$K = \frac{1.2 \sigma^2 a}{\Phi^2 - 0.212 (\sigma/\sigma_{ys})^2} \tag{1.110}$$

где  $\sigma_{ys}$  — предел текучести материала при одноосном растяжении.

В работе обсуждаются также соответствующие экспериментальные данные Сроули (Srowley).

Вопросы определения коэффициентов интенсивности напряжений вблизи эллиптической трещины обсуждались также в исследованиях В. В. Панасюка [4—6, 9, 12], статье Кассира (Kassir) и Си [1].

Ряд постановок задач и соображений о развитии трещин и разрушения принадлежит Г. П. Черепанову. В работе [4] им рассматривается развитие трещин при вдавливании индентора. В [5] дана гидродинамическая постановка некоторых статических задач о трещинах в твердых телах. В [7] рассматривается распространение трещин в сжатых телах.

В работе Си [2] обсуждался вопрос о распространении концепций теории квази-хрупкого разрушения на случай температурных напряжений. Используя формулы Колосова — Мусхелишвили, Си приходит к выражениям для коэффициентов интенсивности напряжений

$$K_I = \frac{2}{\sqrt{a}} \operatorname{Re} [A], \quad K_{II} = -\frac{2}{\sqrt{a}} \operatorname{Im} [A] \quad (1.111)$$

где  $a$  — половина длины трещины, постоянная  $A$  входит в выражения функций напряжения для установившегося двумерного поля температурных напряжений

$$\varphi(z) = A \log z + \varphi_0(z), \quad \psi(z) = \bar{A} \log z - \psi_0(z) \quad (1.112)$$

Из других работ отметим исследование Джасмана (Jhasman) и Фильда (Field) [1], в котором обсуждаются вопросы обобщения энергетических представлений Гриффита на случай наличия в теле остаточных (самоуравновешивающихся) напряжений.

В работе Мак Клинтака и Уэлса (Walsh) [1] рассмотрено приложение теории трещин Гриффита к горным породам, находящимся под давлением.

Обстоятельный обзор Париса и Си [1] подытожил состояние вопроса к 1964/65 г. по материалам зарубежных работ.

В. И. Моссаковский и М. Т. Рыбка [1] (1965 г.) предложили построение теории прочности, исходя из представлений о трещиноватости материала. Предполагается, что трещины расположены перпендикулярно к поверхности пластины, распространяются прямолинейно и величины поверхностного натяжения и длины трещин являются константами материала.

В работе Б. Котерелла (B. Cotterell) [1] (1966 г.) анализируется разложение напряжений в степенной ряд вблизи кончика трещины (1.18) — (1.20) в симметричном случае  $b_i = 0$  (см. Вильямс [3]). Показано, что если первый коэффициент разложения связан с коэффициентом интенсивности напряжений и характеризует начало разрушения, то коэффициент при втором члене разложения определяет устойчивость развития трещины. Коэффициент при третьем члене разложения определяет устойчивость распространения трещины и, наконец, четвертый коэффициент определяет увеличение или уменьшение с расстоянием от вершины трещины максимальных касательных напряжений на линии, продолжающей трещину.

Свидлоу (Swedloy) [1] обсуждает возможности использования идей Гриффита для учета влияния распределения компонент напряжения на разрушение.

Спенсер (Spencer) [1] рассмотрел изменение энергии в теле, вызванное наличием трещины. В отличие от Снеддона [1] усилия и перемещения приложены не на поверхности трещины, а по контуру пластины. Аналогичным вопросам посвящена также работа Си и Либовитца (Liebowitz) [3].

Отметим также общий анализ изменения энергии при распространении трещины, данный Райсом (Rice) [3].

Г. П. Черепанов [8] (1967 г.) с общих энергетических позиций проанализировал условия распространения трещин. Окружая вершину трещины окружностью радиуса  $R$ , он получил, в частности, при изотермическом развитии квазистатических трещин нормального разрыва уравнение энергетического баланса в виде <sup>1</sup>

$$R \int_0^{2\pi} \left[ \rho U \cos \theta - (\sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta) \frac{\partial u}{\partial x} - (\tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \sin \theta) \frac{\partial v}{\partial x} \right] d\theta = 2T \quad (1.113)$$

<sup>1</sup> Соотношение (1.101) может быть преобразовано к виду (1.113). Положим  $\alpha = L$  и направим ось  $x$  вдоль трещины. Воспользуемся тем, что  $\partial(\ ) / \partial L = -\partial(\ ) / \partial x$  (Г. П. Черепанов [8]), тогда соотношение (1.101) примет вид

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_C T_i u_i ds - \int_C T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds = \mathcal{E}_c \quad (1)$$

Из теоремы Клайперона и формулы Гаусса-Остроградского следует

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_C T_i u_i ds = \frac{d}{dx} \int_D W^\circ ds dy = \int_C W^\circ \cos(nx) ds \quad (2)$$

где  $W^\circ$  — удельный упругий потенциал, равный для упругого тела удельной внутренней энергии,  $(nx)$  — угол между нормалью к контуру  $C$  и осью  $x$ .

Подставляя (2) в (1), получим соотношение (1.113).

где  $\rho U$  — внутренняя энергия, приходящаяся на единицу объема,  $T$  — поверхностное натяжение (или плотность поверхностной энергии).

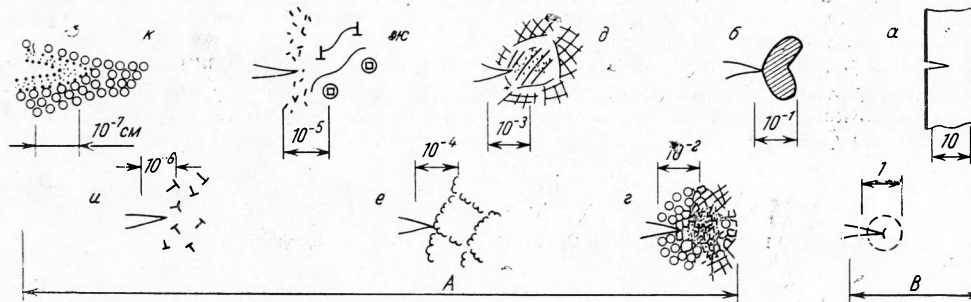
Используя выражение асимптотических разложений (1.53) и равенство внутренней энергии  $\rho U$  для упругого тела удельному упругому потенциалу

$$\rho U = W^0 = \frac{1}{2} (1 - \nu^2) E^{-1} (\sigma_x + \sigma_y)^2 + (1 + \nu) E^{-1} (\tau_{xy} - \sigma_x \sigma_y)$$

он приходит к формуле Ирвина для скорости освобожденной энергии.

В работе Л. В. Ершова и Д. Д. Ивлева [1] (1967 г.) предложена постановка задачи определения направления развития трещины, исходя из энергетических соображений.

Теория квазихрупкого разрушения принадлежит к числу простейших феноменологических теорий разрушения. Теория квазихрупкого разрушения проста и не следует ожидать ее универсальности. Разрушение различных материалов, находящийся в различных условиях, происходит далеко не всегда квазихрупким образом, и теория разрушения нуждается в своем развитии.



Фиг. 20 А — плоское деформированное состояние, В — плоское напряженное состояние, а — образцы, б — упругая особенность, сингулярность, в — упруго-пластическое состояние, г — большие пластические деформации, д — зерна, включения, пустоты, е — мелкозернистые полосы скольжения, ж — мелкозернистая структура, з — дислокации, к — ионный и электронный покров

На фиг. 20, заимствованной из работы Мак Клинтонка и Ирвина [1], схематично показана область основных явлений, с точки зрения которых может быть рассмотрен процесс развития трещины. Отношение толщины образца к ширине равно  $\approx 10^{-2}$ . До тех пор, пока развитие трещины не будет проанализировано исходя из атомных представлений физики твердого тела, будет существовать необходимость использования различных моделей, каждая из которых соответствует своей области описания процессов разрушения. Чем более совершенный механизм разрушения положен в основу модели, тем больше оснований ожидать расширения области описания явлений, связанных с разрушением.

Теория квазихрупкого разрушения представляет в этом смысле простейшую модель, характерный масштаб учитываемых ею явлений принят на фиг. 20 за единицу.

Вместе с тем отметим, что различные концепции разрушения, использующие анализ упругих полей напряжений и гипотезу локальности разрушения вблизи конца трещины для каждого типа трещины в отдельности, неизбежно приведут к формулировке силовых условий теории Гриффита — Ирвина.

Теории разрушения за рубежом уделяется большое внимание. Остановимся на некоторых итоговых моментах ее развития за последние годы.

В 1961 г. вышла в свет монография Снеддона [3] «Проблема трещин в математической теории упругости», изданная по материалам лекций, прочитанных в одном из колледжей США.

В сентябре 1961 г. в Кранфельде, Англия, состоялся международный симпозиум по распространению трещин, издавший свои труды в двух томах в 1962 г. (Proceedings of the Crack Propagation Symposium, The College of Aeronautics, Cranfield, 1962).

В августе 1962 г. в Вашингтоне состоялась международная конференция, посвященная вопросам разрушения. Труды симпозиума под заглавием Fracture of Solids<sup>1</sup> Proceedings of International Conference вышли в свет в 1963 г., второе издание — в 1965 г.

<sup>1</sup> Сборник «Разрушение твердых тел» вышел в переводе на русский язык в 1967 г. в Изд-ве «Металлургия». Раздел по теории макроскопических трещин в сборник не включен. В русское издание не вошел основной доклад Drucker (перевод опубликован в ж-ле «Механика», сб. пер. 1964, № 1), а также семь статей следующих авторов: Griggs, Mc Clintock [3], Goodies and Field [1], две статьи Marsh, Williams [7], Gruntfest.



В 1959 г. в США по требованию Министерства обороны был организован специальный комитет E-24 при ASTM<sup>1</sup> по вопросам прочности конструкций, ослабленных трещинообразными дефектами. Необходимость количественного подхода к задаче о допустимости трещинообразных дефектов в конструкциях возникла, в частности, в США в связи с повторными разрушениями ранних ракет типа «Поларис». В 1964 г. комитет провел в Чикаго конференцию, издавшую свои труды под заглавием «Fracture Toughness Testing and Its Application», Philadelphia, 1965.

Вопросы теории разрушения были предметом обсуждения на различных международных и национальных конгрессах, конференциях и симпозиумах США, Англии, Японии и других стран<sup>2</sup>.

В 1965 г. в Японии состоялась интернациональная конференция по разрушению, издавшая свои труды в трех томах в 1966 г. (Proceedings of the first international conference on fracture, held in Sendai, Japan, 1965, Printed in Japan, 1966). Основная часть исследований посвящена вопросам упруго-пластического, вязко-пластического, усталостного и других видов разрушения.

§ 5. О взаимосвязи теорий квазихрупкого разрушения и концентрации напряжений. Теория квазихрупкого разрушения непосредственным образом связана с теорией концентрации напряжений в упругой среде.

Если  $\sigma_{\max}$  — максимальное напряжение, а  $\rho$  — радиус кривизны в вершине выточки или отверстия и при  $\rho \rightarrow 0$  выточка или отверстие переходит в щель нулевой трещины, то коэффициент интенсивности напряжений для первого типа трещин определяется по формуле

$$K_I = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sigma_{\max} \rho^{1/2} \right) \quad (1.114)$$

Для второго и третьего типов трещин

$$K_{II, III} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left( \sqrt{\pi} \sigma_{\max} \rho^{1/2} \right) \quad (1.115)$$

Решение задач теории концентрации напряжений, полученные в работах Нейбера [1], Г. Н. Савина [1], Петерсона (Peterson) [1], Исида (Isida) [1] и др., могут быть непосредственно использованы для определения коэффициентов интенсивности напряжений в теории трещин.

Следуя Парису и Си [1], приведем формулы, определяющие коэффициенты интенсивности напряжений для случая плоской задачи. Если функция Вестергарда определена вблизи конца трещины в виде  $Z(z)$ , где  $z = re^{i\theta}$ , то

$$K_i = \lim_{|z| \rightarrow 0} (2\pi z)^{1/2} Z_i, \quad i = I, II, III \quad (1.116)$$

Из (1.116) могут быть получены формулы для коэффициентов интенсивности, приведенные в первом разделе настоящего обзора.

Как уже было сказано, формулы Вестергарда являются частным случаем формул Колосова — Мухелишвили. Общее выражение для бигармонической функции  $\Phi$  может быть представлено в виде

$$\Phi = \operatorname{Re} [\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)] \quad (1.117)$$

Сумма нормальных напряжений принимает вид

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\operatorname{Re} [\Phi'(z)] \quad (1.118)$$

здесь штрих наверху означает производную по  $z$ .

Если ввести комплексный коэффициент интенсивности напряжений

$$K = K_I - iK_{II} \quad (1.119)$$

<sup>1</sup> Американское общество по испытаниям и материалам.

<sup>2</sup> В этой связи отметим, что необходимо усилить внимание к переводам работ по теории разрушения, в частности, квазихрупкого разрушения. На русском языке отсутствуют переводы основных работ по теории квазихрупкого разрушения. Журнал Сб. пер. «Механика» за последние 10 лет не опубликовал ни одной статьи по теории квазихрупкого разрушения. Переводы ряда статей по теории разрушения можно найти в журнале «Прикладная механика» (J. Appl. Mech.), который выходит в русском переводе с 1961 г., а также в других журналах той же серии.

то можно получить для трещины с вершиной в точке  $z_1$  следующее общее выражение:

$$K = K_I - iK_{II} = 2 \sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1)^{1/2} \Phi'(z) \quad (1.120)$$

Если воспользоваться функцией конформного отображения  $z = \omega(\eta)$ , то (1.120) запишется в виде

$$K = 2 \sqrt{2\pi} \lim_{\eta \rightarrow \eta_1} (\omega(\eta) - \omega(\eta_1))^{1/2} \frac{\Phi'(\eta)}{\omega'(\eta)} \quad (1.121)$$

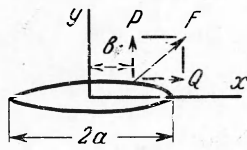
Отображение трещины длиной  $2a$  на круг единичного радиуса определяется выражением

$$z = \omega(\eta) = \frac{1}{2} a (\eta + \eta^{-1}) \quad (1.122)$$

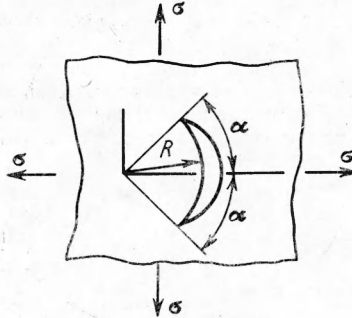
В этом случае уравнение (1.121) упрощается и принимает форму

$$K = 2 (\pi/a)^{1/2} \Phi'(1) \quad (1.123)$$

В качестве примера использования результатов Н. И. Muskhelishvili [1] рассмотрим две решенные им задачи.



Фиг. 21



Фиг. 22

Пусть к боковой поверхности трещины под произвольным углом приложена сила  $F(P, Q)$ , как указано на фиг. 21. Функция имеет вид

$$\Phi(\eta) = \frac{Fa}{4\pi(a^2 - b^2)^{1/2}} \left\{ -\frac{1}{\eta} + \left( \frac{\eta_0}{\eta - \eta_0} \right) \left[ \left( \eta + \frac{1}{\eta} \right) - \left( \eta_0 + \frac{1}{\eta_0} \right) \right] + \left( \eta_0 - \frac{1}{\eta_0} \right) \left[ \frac{\kappa}{1 + \kappa} \log \eta - \log(\eta_0 - \eta) \right] \right\} \quad (1.124)$$

где  $\eta_0$  соответствует  $z = b$ ,  $F = P - iQ$  для случая плоской деформации  $\kappa = 3 - 4\nu$ , для плоского напряженного состояния  $\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$ .

Из (1.123) и (1.124) следует:

$$\begin{aligned} K_I &= \frac{P}{2(\pi a)^{1/2}} \left( \frac{a+b}{a-b} \right)^{1/2} + \frac{Q}{2(\pi a)^{1/2}} \left( \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \right) \\ K_{II} &= -\frac{P}{2(\pi a)^{1/2}} \left( \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \right) + \frac{Q}{2(\pi a)^{1/2}} \left( \frac{a+b}{a-b} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.125)$$

Из (1.125) можно получить, что в случае одной прямолинейной трещины в бесконечной плоскости при известных напряжениях  $\sigma_y(x, 0)$ ,  $\tau_{xy}(x, 0)$  на боковой поверхности трещины

$$K_I = \frac{1}{(\pi a)^{1/2}} \int_{-a}^a \sigma_y(x, 0) \left( \frac{a+x}{a-x} \right)^{1/2} dx \quad K_{II} = \frac{1}{(\pi a)^{1/2}} \int_{-a}^a \tau_{xy}(x, 0) \left( \frac{a+x}{a-x} \right)^{1/2} dx \quad (1.126)$$

Рассмотрим задачу о трещине в форме дуги окружности радиуса  $R$  с углом раствора  $2\alpha$ , расположенной симметрично по отношению к оси  $x$  в бесконечной плоскости, равномерно растягиваемой на бесконечности напряжениями  $\sigma$  (фиг. 22).

В этом случае

$$\Phi'(z) = \frac{\sigma \sqrt{R}}{\sqrt{2(1 + \sin^2 0,5 \alpha)}} \left\{ \frac{z/R - \cos \alpha}{(1 - 2zR^{-1} \cos \alpha + z^2/R^2)^{1/2}} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right\} \quad (1.127)$$

Смещение вершины трещины в начало координат осуществляется подстановкой

$$z/R = ie^{i\alpha} (z/R - i - \sin \alpha \cos \alpha) \quad (1.128)$$

после чего из (1.120), (1.127), (1.128) можно получить

$$\begin{aligned} K_I &= \frac{\sigma \sqrt{\pi R}}{(1 + \sin^2 0,5 \alpha)} \left( \frac{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)}{2} \right)^{1/2} \\ K_{II} &= \frac{\sigma \sqrt{\pi R}}{(1 + \sin^2 0,5 \alpha)} \left( \frac{\sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{2} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.129)$$

Число подобных примеров можно увеличить.

## II. ДРУГИЕ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИН<sup>1</sup>

Параллельно с развитием теории квазихрупкого разрушения различные исследователи изучали другие аспекты развития макроскопических трещин и разрушения.

Вопросы распространения трещин с учетом перераспределения напряжений, вызванных пластическими деформациями, были предметом изучения в работах Мак Клинта [1, 2] (1956, 1958 гг.), Хальта (Hult) [1-3] (1957, 1958 гг.), Хальта и Мак Клинта [1] (1958 г.).

Следуя Хальту [3] (1958 г.), рассмотрим основные результаты этих работ, связанные с разрушением при усталости. Анализ проводится для случая идеально упруго-пластического материала в случае продольного сдвига. В полярных координатах  $R$ ,  $\alpha$ , как указано на фиг. 23, при  $\gamma_\infty < \gamma_s$ , где  $\gamma_\infty$  — сдвиг на бесконечности,  $\gamma_s$  — предел

текучести при сдвиге, упруго-пластическая граница  $R = f(\alpha)$  определяется следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} R &= R_0 \cos \frac{\pi \alpha}{\pi - \omega}, \quad R_0 = c g(\omega) \left( \frac{\gamma_\infty}{\gamma_s} \right)^{\frac{2\pi - \omega}{\pi - \omega}} \\ g(\omega) &= \frac{2 \sqrt{\pi}}{\pi - \omega} \frac{\Gamma(3/2 - \omega/2\pi)}{\Gamma(2 - \omega/2\pi)} \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $c$  — длина трещины (фиг. 21, б). Функция  $g(\omega)$  определена на графике фиг. 23, в.

Деформация сдвига равна  $\gamma = (R/r)\gamma_s$ . В цикле нагружения, определяемом соотношением  $\gamma_\infty = \gamma_{\text{ср}} \pm \gamma_s \alpha$ , амплитуда деформации в направлении трещины ( $\alpha = 0$ ) будет иметь вид

$$\gamma_\alpha = \gamma_s \frac{c}{r} g(\omega) \left( \frac{\gamma_\infty}{\gamma_s} \right)^{\frac{2\pi - \omega}{\pi - \omega}} \quad (2.2)$$

т. е. амплитуда деформаций не зависит от средней нагрузки.

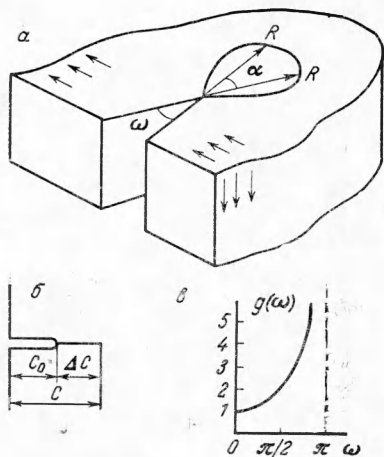
Критерий распространения усталостной трещины был принят в следующей форме: трещина продвигается на расстояние  $\rho$ , когда накопленная пластическая деформация сдвига на расстоянии  $\rho$  впереди трещины достигнет предельной величины  $\gamma_f$ .

Число циклов, необходимых для начала распространения трещины, и начальная скорость распространения трещины определяются из соотношений

$$n_0 = \frac{1}{4} \frac{\rho}{c_0} \frac{\gamma_s \gamma_f}{\gamma_{\text{ср}}^2}, \quad \left( \frac{\Delta c}{\Delta n} \right)_0 = 8c \frac{\gamma_{\text{ср}}}{\gamma_s \gamma_f} \quad (2.3)$$

Результаты обобщались на случай больших деформаций. Было отмечено, что для распространения трещины закручивание должно все время увеличиваться. Если бы разрушение описывалось моделью Гриффита — Ирвина, то начавшая развиваться трещина при данных граничных условиях была бы неустойчивой. Рассмотрение пластической зоны впереди трещины (упруго-пластический анализ) приводит к выводу об устойчивом процессе распространения трещины.

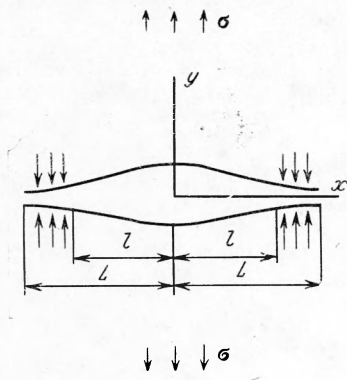
<sup>1</sup> Содержание настоящего раздела не претендует на полноту. Здесь отмечены лишь некоторые работы. Содержание многочисленных работ, посвященных различным моделям теории разрушения, заслуживает специального обзора.



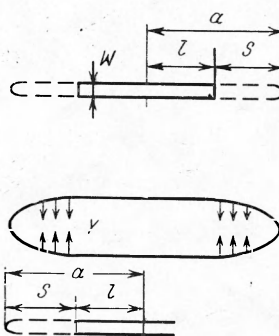
Фиг. 23

Аналогичные выводы были сделаны Мак Клинтоком [2] в случае, когда нагрузки являются нециклическими. Предполагая, что образец уже нагружен, Мак Клинтон изучал перераспределение напряжений, вызываемое прорезаемой выточкой. Мак Клинтон отметил, что зарождающаяся трещина устойчива, т. е. после первого приращения длины трещины требуется увеличить напряжение, чтобы произвести дальнейшее ее распространение. При дальнейшем развитии трещина может стать неустойчивой. Позднее в обстоятельной работе Мак Клинтон [3] подытожил основные сведения по распространению трещин при усталости. Рост усталостных трещин определяется двумя явлениями: циклическими деформациями, а также нециклической прогрессирующей деформацией в вершине трещины. Работа содержит обзор предыдущих исследований, формулировку критериев разрушения, анализ экспериментальных данных.

М. Я. Леонов и В. В. Панасюк [1] (1959 г.) предложили новую модель развития трещины в хрупких телах. Позднее эти вопросы развивались в работах В. В. Панасюка [1], М. Я. Леонова [1] и др.



Фиг. 24



Фиг. 25

Основные представления, развитые в этих работах, сводятся к следующим.

Простейшая модель хрупкого тела определяется как среда, обладающая следующими свойствами: а) максимальные растягивающие напряжения не превосходят сопротивление отрыву  $\sigma_0$ ; б) зависимость между деформациями и напряжениями описывается законом Гука, если растягивающие напряжения не достигают величины  $\sigma_0$ ; в) в модели образуются щели, когда максимальное напряжение, определенное методами линейной теории упругости, превосходит  $\sigma_0$ ; г) поверхности щели могут или притягиваться с напряжением  $\sigma_0$ , если интервал между ними не превосходит некоторой величины  $\delta$ , или не взаимодействовать в противном случае.

Величины  $\delta$ ,  $\sigma_0$  и  $\mathcal{E}$  связываются соотношением

$$\delta \sigma_0 = \mathcal{E} \tag{2.4}$$

где  $\mathcal{E}$  — энергия разрушения, или работа, затраченная на увеличение трещины на единицу площади.

Область, где интервал между поверхностями щели превосходит  $\delta$ , называется областью нарушенных связей или трещиной. Остальные участки щелей называются областями ослабленных связей. Разрушение (локальное) определяется как явление перехода точек области ослабленных связей в область нарушенных связей.

На фиг. 24 показана прямолинейная щель в плоскости, растягиваемой напряжениями  $\sigma$ . Вся щель имеет длину  $2L$ , трещина  $2l$ . Зона ослабленных связей имеет длину у каждого края трещины  $d = L - l$ .

В рамках модели Леонова — Панасюка можно ставить задачи о возникновении трещин и их распространении.

Рассмотрим плоскую задачу для прямолинейной щели в плоскости, растягиваемой напряжением  $\sigma$  (фиг. 24).

Граничные условия имеют вид

$$\sigma_y(x, \pm 0) = \begin{cases} 0, & |x| \leq l \\ \sigma_0, & l \leq |x| \leq L \end{cases} \tag{2.5}$$

Предельное значение растягивающего напряжения, при котором начинается развитие трещины, определяется формулой

$$\sigma = \frac{2}{\pi} \sigma_0 \arccos \exp(-c/l), \quad c = \frac{\pi E \delta}{8(1-\nu^2)\sigma_0} \tag{2.6}$$

Перед разрушением длина зоны ослабленных связей будет

$$d = L - l = l (\exp(c/l) - 1) \quad (2.7)$$

Формула Гриффита (1.31) имеет место из (2.6) при  $l \rightarrow \infty$ .

Модель Леонова — Панасюка является оригинальной и не сводится к модели Гриффита — Ирвина. Условие разрушения связывается с длиной  $d = L - l$ , которая в общем случае не является малой. По существу те представления, которые на Западе относятся к излагаемой ниже «гипотезе Дагдейла», были ранее развиты М. Я. Леоновым и В. В. Панасюком.

Дагдейл (Dugdale) [1] (1960 г.) на основе экспериментов с растягиваемыми пластинами, ослабленными внутренними и внешними надрезами (фиг. 25), высказал гипотезу о том, что пластическая зона концентрируется в узкой полосе на продолжении надреза. Он установил зависимость

$$\frac{s}{a} = 2 \sin^2 \left( \frac{\pi T}{4Y} \right), \quad a = l + s \quad (2.8)$$

где  $s$  — длина зоны текучести,  $l$  — полудлина внутренней щели, или длина внешнего надреза,  $T$  — растягивающее напряжение,  $Y$  — предел текучести при растяжении.

В работах Фильда (Field) [1] (1963 г.) гипотеза Дагдейла используется для определения протяженности пластической зоны в плите с поперечной трещиной при продольном сдвиге.

Гудьер (Goodier) и Фильд [1] (1963 г.) на основе гипотезы Дагдейла рассмотрели диссипацию работы при пластическом деформировании, сопровождающем развитие трещины. Предполагается, что плоскость, растягиваемая усилиями  $\sigma_y$ , ослаблена трещиной длиной  $2l$ . Пластическая зона вблизи каждого края трещины имеет длину  $s = a - l$  (фиг. 25, а). Обозначая через  $W_p$  — работу пластической деформации, авторы получают

$$\frac{1}{4} \frac{dW_p}{dl} = \frac{1}{\pi} (\kappa + 1) (1 + \nu) E \left( \frac{\sigma_y}{F} \right)^2 l f(t) \quad (2.9)$$

$$f(t) = \frac{\pi t}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi t}{2} - \log \sec \frac{\pi t}{2}, \quad t = \sigma_y / \sigma_s$$

где  $\kappa$  — постоянная в формулах Мусхелишвили [1],  $\sigma_s$  — предел текучести при растяжении.

Далее в работе определяются деформации на конце трещины, обсуждаются вопросы динамического распространения трещины, произведено сравнение с экспериментальными данными.

Отметим также работу Л. Г. Лукашева [1] (1963 г.), в которой развивались представления, близкие к представлениям Леонова — Панасюка и Дагдейла.

Кир и Мюр (Mura) [1] на основе гипотезы Дагдейла, рассмотрели плоскость с трещиной при сдвиге и круглую трещину в пространстве, когда равномерное давление приложено к боковым поверхностям трещины. Использовалось условие пластичности Треска.

Вопросам определения пластической зоны при распространении трещин на основе представлений, близких к представлениям Дагдейла, посвящено исследование Розенфельда (Rosenfield), Дэи (Dai) и Хана (Hahn) [1]. Подобные вопросы обсуждаются также Райсом [2].

Недавно Б. В. Костров и М. В. Никитин [1] (1967 г.) получили решение для трещины продольного сдвига на основе гипотезы Дагдейла, на границе пластической зоны требуется выполнение условия пластичности Мизеса.

Двумерное упруго-пластическое распределение напряжений вблизи конца плоской трещины обсуждается в работе Свидлоу, Вильямса и Янга (Yang) [1].

В работе Вильямса [7] (1962 г.) содержится обзор теоретических и экспериментальных исследований по разрушению вязко-упругих сред. Отмечается, что одной из первых работ по разрушению вязко-упругих материалов была исследование Ривлина (Rivlin) и Томаса (Thomas) (J. Polymer. Sci. vol. 10, 1952), в которой представления Гриффита были использованы для изучения процесса разрыва резиновых листов. Авторы пришли к критерию разрушения, аналогичному критерию Гриффита. Позднее Гринсмит (Greensmith) и Томас (J. Polymer. Sci. vol. 18, 1955) установили, что критическое значение скорости освобожденной упругой энергии, при котором начинается разрушение, зависит от скорости разрыва и температуры.

Аналогично результатам своей предыдущей работы [6], Вильямс рассматривает в качестве исходной модель вязко-упругого тела Фойгта. Задача вязко-упругого анализа разрушения ставится как задача определения времени, после которого начинается распространение трещины.

Л. М. Качанов [1,2] (1961, 1963 гг.) рассмотрел распространение трещин в вязко-упругих средах максвелловского типа, наследственных средах и т. п. Он полагал коэффициент интенсивности напряжений постоянным.

Берг (Berg) [1] (1962 г.) рассмотрел развитие плоских эллиптических трещин в вязкой среде. Используя аппарат, развитый Н. И. Мухелишвили, Берг рассмотрел случаи развития трещин при различных граничных условиях, им произведено сравнение с экспериментальными данными.

Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов и Р. Л. Салганик [1,2] (1966 г.) полагали среду упругой, а коэффициент интенсивности напряжений зависящим от скорости продвижения трещины.

Исследование Мак Клинтонка и Ирвина [1] (1965 г.) посвящено обсуждению эффектов, оказываемых пластичностью на разрушение. Обсуждаются возможные уточнения теории квазихрупкого разрушения в связи с учетом пластических свойств материала. Изложение ведется в основном на примере чистого сдвига. Показано, что при пластическом деформировании энергия рассеивается со скоростью, в два раза превышающей величину  $\mathcal{S}$ , полученную из линейно-упругого анализа. В случае пластичности ни один из критериев типа  $\mathcal{S} = \text{const}$  не может охарактеризовать разрушение. В данном случае в качестве критерия разрушения могут быть использованы величины локальных напряжений и деформаций в некоторой области перед трещиной. Использование в качестве критерия разрушения перемещений при раскрытии трещины вблизи ее вершины в общем не согласуется с критерием разрушения, основанным на локальных характеристиках напряжений и деформаций перед трещиной. Подробно обсуждается вопрос об устойчивом росте трещины. Большое внимание уделено анализу экспериментальных данных.

Необходимо отметить цикл оригинальных исследований М. Я. Леонова с сотрудниками, начиная с 1961 г., в которых рассматривается деформирование упругого материала, ослабленного дислокациями и полосами пластического скольжения.

Из последних работ отметим исследование Эрдогана [5] (1966 г.), посвященное определению пластической зоны в полубесконечной среде, состоящей из двух разнородных частей, ослабленных трещиной при продольном сдвиге, а также исследования Якобори (Jakobori) и Исигава (Ichicawa) [1] (1965 г.), Якобори и Тнака (Tnaka) [1] (1966 г.). Г. П. Черепанов [8] (1967 г.) с общих энергетических позиций обсудил вопросы распространения трещин в различных средах и рассмотрел критерии развития трещин в пластических и вязко-упругих телах.

### III. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТРЕЩИН

Настоящий раздел содержит краткий обзор решений задач математической теории трещин, основанных на модели линейного упругого тела<sup>1</sup>.

Отечественной науке принадлежат выдающиеся результаты в области теории упругости. Здесь нет необходимости подробно останавливаться на характеристике работ по различным методам решения краевых задач, теории концентрации напряжений, явившихся основой многих работ по теории квазихрупкого разрушения. Отметим только, что труды Г. В. Колосова и Н. И. Мухелишвили, а также ряда других исследователей обеспечили решение основных задач математической теории трещин.

Н. И. Мухелишвили, помимо общих методов, сыгравших выдающуюся роль в развитии плоской задачи теории упругости, принадлежат решения ряда задач об упругих телах с трещинами.

Известные исследования Л. А. Галина, С. Г. Лехницкого, А. И. Лурье, Г. Н. Савина, Я. С. Уфлянда, Д. И. Шермана, И. Я. Штаермана и др. имеют непосредственное отношение к математической теории квазихрупкого разрушения. Результаты И. И. Воронича и его учеников по контактной задаче в телах с конечными размерами нашли приложение к теории трещин.

Отметим, что результаты, полученные в смежных областях механики М. В. Келдышем, Н. Е. Кочиным, М. А. Лаврентьевым, Л. И. Седовым и др., использовались и могут быть использованы для решения задач теории квазихрупкого разрушения.

§ 1. Изотропное упругое тело. Плоская задача. Выше упоминались работы Г. В. Колосова, Инглиса, Н. И. Мухелишвили, Вольфа, Нейбера [1], Вестергарда [1,2], Снеддона [1-3], Ирвина [3-5, 7,9] и др. В этих работах был рассмотрен широкий круг задач, относящихся к случаю бесконечной области, ослабленной одной или несколькими трещинами.

В работе Уилмора (Willmore) [1] рассмотрена плоскость, ослабленная прямолинейной трещиной, по берегам которой приложены произвольные нагрузки. Рассмотрен также случай двух коллинеарных трещин одинаковой длины в бесконечной плоскости,

<sup>1</sup> Дополнительные сведения о цитируемых работах читатель может найти в реферативном журнале «Механика». См. также Дональдсон и Андерсон [1], Парис и Си [1], Г. И. Баренблатт [9,11], недавний обзор Нейбера и Хана [1] по теории концентрации напряжений.

растягиваемой однородным напряжением. Этот случай был позднее рассмотрен Винном и Вундтом [1].

Бови (Bowie) [1] принадлежит исследование напряженного состояния плоскости, ослабленной круговым отверстием, от границы которого исходят радиальные трещины. Бови рассмотрел два вида нагрузок: всестороннее и одноосное растяжение. Бови оценил влияние отверстия на напряженное состояние вблизи трещины.

Садовский (Sadowsky) [1] вновь обсуждает аналогию задач о штампах и трещинах и приводит решение задач о двух коллинеарных трещинах в плоскости, всесторонне растягиваемой на бесконечности.

Смешанная задача о плоскости со щелью рассматривалась В. И. Моссаковским и П. А. Загубиженко [1,2]. Расклинивание плоскости рассматривалось в работах Г. И. Баренблатта [5], Г. И. Баренблатта и Г. П. Черепанова [2], М. А. Маркузона [1], Г. П. Черепанова [3].

Койтер (Koiter) [1] рассмотрел задачу о плоскости, ослабленной рядом коллинеарных трещин, работающей на сдвиг (эта задача не может быть рассмотрена методом Вестергарда, так как  $\tau_{xy} \neq 0$  при  $y = 0$ ). Им же [2] было дано приближенное решение задачи о плоскости, ослабленной бесконечным рядом параллельных равноотстоящих трещин равной длины. Предполагается, что на бесконечности имеют место сдвиговые усилия. Плоскость, ослабленная бесконечным числом трещин, рассматривалась также Ловенгрубом (Lowengrub) [1].

Бюкнер [2] решил ряд задач о трещинах. В частности, он рассмотрел задачу об одной трещине, выходящей на границу кругового отверстия. К боковой поверхности трещины приложены нормальные усилия, меняющиеся по произвольному закону.

Большой цикл исследований по плоской задаче со щелями был выполнен украинскими учеными В. В. Панасюком, И. Ю. Бабичевым, Л. Т. Бережницким, Е. В. Буйна, А. О. Каминским, С. Е. Ковчиком, Л. Л. Лобацким, Б. Л. Лозовым и др. Были рассмотрены решения разнообразных задач для плоскости, ослабленной различными трещинами, отверстиями со щелями, задачи изгиба полосы с трещинами и т. д.

Отметим также работы Г. И. Баренблатта и Г. П. Черепанова [1], А. Д. Сорокина [1], М. Д. Устинова [1] и др.

Случай одной и двух коллинеарных трещин в плоскости при различных комбинациях граничных условий рассмотрен Эрдоганом [1]. Отметим также исследование Си, Париса и Эрдогана [1].

В работе Ловенгруба [2] исследовано напряженное состояние плоскости с двумя внешними щелями при различных комбинациях краевых условий.

Одиночные трещины, выходящие на свободную границу полубесконечного тела, рассматривались Уиглсуэртом (Wiglsuworth) [3] и Ирвиным [6], на границу круговой полости — Уиглсуэртом [4]. Бюкнер [2] рассмотрел задачу об изгибе упругой полосы с трещиной, выходящей на границу полосы (отметим связь работы Бюкнера с исследованием Винна и Вундта [1]).

В книге Снеддона [3] обсуждаются два решения Тайта (Teit) для полос конечной ширины, ослабленных внутренними и внешними симметричными трещинами. Симметричные усилия приложены на боковой поверхности трещин.

Вопросы определения напряженного состояния в полосах конечной ширины рассматривались В. М. Александровым [1], В. М. Александровым и Б. И. Сметаниным [1].

Важные в практическом отношении решения для растягиваемых полос конечной ширины с центральными трещинами получены Исида (Isida) [1]. Исида занимался определением концентрации напряжений в вершинах трещин с округлыми концами. Результаты для трещин получаются предельным переходом (1.114). Напомним, что приближенное решение было дано Ирвиным [3] (1.74). Решение Исида используется при обработке экспериментальных данных по определению констант  $\mathcal{S}_c$ .

Исида [3] рассмотрел также задачу для конечной полосы с эксцентрично расположенной щелью.

Бови [2,3] исследовал задачу о растяжении полосы с двумя симметричными внешними щелями. Он подсчитал для некоторых случаев коэффициент интенсивности напряжений и произвел сравнение с результатами Ирвина [3] и Бюкнера [2].

Отметим, что в своих работах Бови существенно использует результаты М. Н. Карцивалде [1].

Бови и Нил (Neal) [1] рассмотрели задачу о растяжении прямоугольной пластины с одной внешней трещиной.

Блум (Blum) [1] использовал методы, развитые Бови для решения задачи об изгибе прямоугольной полосы, ослабленной одной трещиной. Кнаусс (Knauss) [1] рассмотрел задачу об определении напряженного состояния полосы, содержащей полубесконечную трещину, расположенную по средней линии полосы. Предполагалось, что боковые кромки полосы получают жесткое смещение, нормальное к трещине.

Ловенгруб [3] рассмотрел задачу о полосе конечной ширины, ослабленной трещиной, расположенной посередине полосы, параллельно ее сторонам. Были рассмотрены различные краевые условия для напряжений и перемещений.

Практический интерес представляют решения задач для конструкций с трещинами, усиленных подкрепляющими ребрами. Одной из первых в этом направлении была выполнена работа Ромуальди (Romualdi) и Сандерса (Sanders) [1]. Исидра [2], обобщая результаты предыдущего исследования, рассмотрел задачи для полос, имеющих центральные трещины с подкрепленными краями, а также для бесконечных листов с периодическим рядом трещин, вдоль линии которой расположены подкрепляющие элементы жесткости.

Грейф (Greif) и Сандерс [1] рассмотрели задачу о плоскости, ослабленной несимметричной трещиной и подкрепленной бесконечным стрингером. В работе Блума и Сандерса [1] аналогичная задача рассматривается для стрингера, подкрепленного к бесконечному листу с помощью жестких равноотстоящих заклепок одного диаметра.

За рубежом выполнен также ряд работ в этом направлении<sup>1</sup>.

§ 2. Осесимметричные и пространственные задачи. Выше уже упоминались известные решения Нейбера [1]. Используя эти результаты, Зак (Sack) [1] вычислил критическое напряжение по Гриффиту для пространства, ослабленного монетообразной трещиной при равномерных растягивающих усилиях на бесконечности.

Снеддон [1,2] дал общее решение осесимметричной задачи для круглой трещины, когда нормальные усилия приложены к ее боковым поверхностям. Отметим также работы Пейна (Payne) [1], Грина и Церна (Zerna) [1], в которых рассматривались осесимметричные задачи для пространства с круглой трещиной.

Осесимметричные задачи для пространства, ослабленного круговыми щелями, рассматриваются в работах Я. С. Уфлянда [1,2], Н. Н. Лебедева и Я. С. Уфлянда [1].

Осесимметричная задача для полупространства с круговой щелью рассмотрена в работе Ю. Н. Кузьмина и Я. С. Уфлянда [1].

Круглая трещина в неограниченной среде, находящейся под действием однородного поля сдвига, рассмотрена в работе Уэстмена (Westmann) [1].

Вопросам определения напряженного состояния в длинном круговом цилиндре, содержащем симметрично расположенную круглую трещину перпендикулярно оси цилиндра, посвящены исследования Коллинза (Collins) [1], Снеддона и Тейта [1], Снеддона и Уэлса [1]. Задача рассмотрена при различных комбинациях граничных условий.

Эрдоган [4] рассмотрел случай пространства, ослабленного круглыми кольцеобразными трещинами. Эрдоган получил свои результаты для двух связанных между собой упругих полупространств из материалов с изотропными, но разнородными свойствами. На боковых поверхностях трещин действуют заданные усилия. Рассмотрены случаи внешней и внутренней осесимметричных щелей.

Ловенгруб и Снеддон [1] рассмотрели случай внешней осесимметричной щели при различных осесимметричных и неосесимметричных краевых условиях.

Пространственная задача о концентрации напряжений в бесконечном теле, ослабленном полостью в виде трехосного эллипсоида, рассматривалась Садовским и Штернбергом (Sternberg) [1], Грином и Снеддоном [1]. В этих работах рассмотрены нагрузки, приложенные симметрично относительно главных плоскостей эллипсоидальной полости, или плоскости двумерной трещины.

Пространственная задача при произвольном нагружении круглой щели изучалась В. И. Моссаковским [1]. Ряд пространственных задач решен В. В. Панасюком [4-6, 9, 12]. Им рассмотрен случай пространства с эллиптической трещиной, трещиной близкой к круговой, находящейся под действием нагрузки, нормальной к берегам трещины.

Работа Ирвина [9] уже упоминалась. Кассир (Kassir) и Си [1] рассмотрели решение для неограниченного пространства с плоской эллиптической трещиной, находящейся под действием сдвиговых нагрузок. Путем суперпозиции с решением для случая растяжения, перпендикулярного к плоскости трещины, можно получить решение задачи для неограниченного упругого тела с плоской эллиптической трещиной для нагрузки общего вида.

§ 3. Кручение, продольный сдвиг, изгиб. Одно из первых решений задач о кручении стержня с предельными щелями принадлежит Файлону (Filon) [1] (1900 г.).

Задачи кручения тел с трещинами были предметом изучения в работах А. Н. Динника [1], который еще в 1913 г. дал решение для круглого стержня с радиальной трещиной, Н. Х. Арутюняна и Б. Л. Абрамяна [1], Х. А. Балобяна [1], Е. А. Ширяева [1,2]. Отметим также работы Уиглсуэрта [1,2].

Результаты Ирвина [6,7] для случая продольного сдвига уже упоминались.

Случай продольного сдвига рассматривался в работах Г. И. Баренблатта и Г. П. Черепанова [3], Р. Л. Салганика [1].

Си [4] рассмотрел вопросы определения коэффициентов интенсивности напряжений при изгибе и кручении балок с трещинами. Этим же вопросам посвящены его работы [6,7] для случая продольного сдвига.

<sup>1</sup> С работами Sanders (Report NACA (1959), Romualdi, Fraser, Irwin (Report-NACA, 1957), Leybold (Technical Note NACA, 1963) и др. автору ознакомиться не удалось.



**Анизотропные материалы.** Трещина в ортотропном материале рассматривалась в упомянутой работе Уилмора [1]. Чапкис (Chapkis) и Вильямс [1] рассмотрели особенность поведения решения вблизи конца трещины в ортотропной пластине. Стро (Stroh) [1] рассмотрел прямолинейную трещину в анизотропной плоскости. Он привел основное решение, когда усилия распределения вдоль боковых сторон трещины, исследовал особенность решения в вершине трещины, вычислил изменение упругой энергии при изменении длины трещины. Анизотропные материалы с трещинами рассматривались Г. И. Баренблаттом и Г. П. Черепановым [4]. Отметим также работу Энга (Ang) и Вильямса [1]. Обсуждение вопросов определения коэффициентов интенсивности напряжений в случае анизотропной среды содержится в обзоре Париса и Си [1]. Более подробно эти вопросы обсуждаются в работе Си, Париса и Ирвина [1].

**Неоднородные материалы.** Исследовалась задача о двух полуплоскостях или полупространствах из различного материала, на поверхности соединения которых есть трещины. Неоднородные материалы с трещинами были предметом изучения в работах Г. П. Черепанова [1], В. И. Моссаковского и М. Т. Рыбка [1], Р. Л. Салганика [2], Р. В. Гольдштейна и Р. Л. Салганика [1]. Отметим, что наиболее общие результаты принадлежат Г. П. Черепанову [1,3]. Исследование особенности решения в вершине трещины в этом случае проведено Вильямсом [4].

Ряд краевых задач в плоском случае был исследован Эрдоганом [2,3]. Исследования Вильямса и Эрдогана показали, что особенность решения вблизи вершины трещины имеет характер

$$\sigma_{ij} = \frac{\kappa}{(2\pi r)^{1/2}} f_{ij}(\lambda_i, \theta, \log r) \quad (3.1)$$

где  $\lambda_i$  — функция свойств материала.

Работа Эрдогана [4] для осесимметричного случая уже упоминалась.

В работе Зака (Sack) и Вильямса [1] рассмотрены особенности решения вблизи трещины, направленной перпендикулярно к границе двух сред. В этом случае вблизи трещины  $\sigma_{ij} \sim r^{-n}$ , где показатель сингулярности  $n > 1/2$ , если трещина возникла в материале, имеющем более низкий модуль упругости, и наоборот. Это указывает на то обстоятельство, что при прочих равных условиях трещины в более твердых материалах имеют большую тенденцию к распространению в мягкое, чем наоборот.

Инглэнд (England) [1] рассмотрел после перемещений в задаче об одной прямолинейной трещине, расположенной на линии контакта двух полуплоскостей из различных материалов. Нормальные усилия приложены по боковым поверхностям трещины. Он показал, что нижний и верхний края трещины вблизи ее вершины изгибаются и перекрываются, что физически нереально.

Ряд решений для плоской задачи о трещинах, расположенных на границе двух разнородных сред, даны Райсом и Си [1]. Отметим также работы Инглэнда [3] и Си [9].

**Изгиб пластин и оболочек.** Исследование особенностей решения вблизи вершины трещины в пластине при изгибе выполнено Вильямсом [5]. Теория Рейснера (Reisner) была использована в работе Кноулза (Knowles) и Ванга (Wang) [1] для определения напряженного состояния в толстой изгибаемой пластине, ослабленной трещиной. Особенность напряжений вблизи конца трещины имеет тот же порядок, что и в классической теории пластин.

В упомянутой работе Си, Париса и Эрдогана [1] был рассмотрен вопрос об определении коэффициентов интенсивности напряжения при изгибе и рассмотрен ряд примеров. Изгибные напряжения в пластине, имеющей трещину и покоящейся на упругом основании, были рассмотрены Энгом, Фолиасом (Folias) и Вильямсом [1]. Здесь же отмечена аналогия между рассмотренной задачей о деформировании сферической оболочки с малой начальной кривизной.

Си и Райс [1] рассмотрели задачу об изгибе пластины, состоящей из двух разнородных частей, соединенных вдоль прямой линии, вдоль которой расположены трещины.

Работа Редвуда и Шеферда [1] упоминалась выше (стр. 124).

Отметим, что обзор Париса и Си [1] содержит дополнительно ряд ссылок на малоизвестные исследования зарубежных авторов.

**Температурные напряжения.** Работа Си [2] упоминалась выше. Температурную задачу для пространства с круглой щелью рассматривал Снеддон [4]. Флоренс (Florence) и Гудбер (Goodier) [1] получили решение для плоскости, находящейся в постоянном температурном поле, ослабленной овальным отверстием. Другие примеры можно найти у Париса и Си [1]. Температурными задачами занимались Н. М. Бородачев [1], Г. С. Кит и Я. С. Подстригач [1] и др.

**Моментные напряжения.** Парис и Си [1] указывают докторскую диссертацию Сетцера (Setzer, 1963), посвященную исследованию задач о трещинах по моментной теории упругости.

## БИБЛИОГРАФИЯ

## а) Русский алфавит

- Александров В. М. 1. К теории равновесных трещин в упругом слое. Сб. «Концентрация напряжений». Киев, «Наук. думка», 1965, вып. 1.
- Александров В. М., Борович И. И. 1. О действии штампа на упругий слой конечной толщины. ПММ, 1960, т. 24, вып. 2.
- Александров В. М., Сметанин Б. И. 1. Равновесная трещина в слое малой толщины. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.
- Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. 1. Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.
- Бабич И. Ю., Каминский А. А. 1. О критических нагрузках, вызывающих развитие трещины возле эллиптического отверстия. Прикладная механика, 1965, т. 1, № 9.
- Балобян А. А. Кручение призматических стержней коробчатого поперечного сечения с трещиной. Изв. АН Арм. ССР, сер. Физ.—матем. наук, 1958, т. 11, № 2.
- Баренблатт Г. И. 1. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
2. Об образовании горизонтальных трещин при гидравлическом разрыве нефтеносного пласта. Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 9.
3. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Докл. АН СССР, 1959, т. 127, № 1.
4. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Общие представления и гипотезы. Осесимметричные трещины. ПММ, 1959, т. 23, вып. 3.
5. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Прямолинейные трещины в плоских пластинах. ПММ, 1959, т. 23, вып. 4.
6. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. Устойчивость изолированных трещин. Связь с энергетическими теориями. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
7. Об условиях конечности в механике сплошных сред. Статические задачи теории упругости. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4.
8. Об основных представлениях теории равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. «Проблемы механики сплошных сред» к 70-летию Н. И. Мусхелишвили. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1961.
9. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4.
10. О некоторых общих представлениях математической теории хрупкого разрушения. ПММ, 1964, вып. 4.
11. Теория трещин, разд. VI гл. 8. В кн. Н. И. Мусхелишвили «Некоторые основные задачи математической теории упругости». Изд. 5, М., Изд-во «Наука», 1966.
- Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Салганик Р. Л. 1. О кинетике распространения трещин. Общие представления трещины близкие к равновесным. Инж. ж-л МТТ, 1966, № 5.
2. О кинетике распространения трещин. Условие разрушения и длительная прочность. Инж. ж-л МТТ, 1966, № 6.
- Баренблатт Г. И., Христианович С. А. 1. Об обрушении кровли при горных выработках. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 11.
- Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. 1. О влиянии границ тела на развитие трещин хрупкого разрушения. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 3. Замечание к этой работе. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 1.
2. О расклинивании хрупких тел. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4.
3. О хрупких трещинах продольного сдвига. ПММ, 1961, т. 25, вып. 6.
4. О равновесии и распространении трещин в анизотропной среде. ПММ, 1961, т. 25, вып. 1.
5. О конечности напряжения на краю произвольной трещины. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
- Белоносов С. М. 1. Основные плоские статические задачи теории упругости для односвязных и двусвязных областей. Изд-во СО АН СССР, 1962.
- Бержницкий Л. Т. 1. Предельные усилия для пластины с двумя равными дугообразными трещинами. Физ.-хим. механика материалов, 1965, т. 1, № 1.
2. О предельном равновесии пластины, ослабленной системой трещин, расположенных вдоль прямой под углом в направлении растяжения. Сб. «Концентрация напряжений», Киев, «Наук. думка», 1965, вып. 1.
3. О распространении трещин, выходящих на контур криволинейного отверстия в пластине. Физ.-хим., механика материалов, 1966, т. 2, № 1.
- Боркович П. Е. 1. Щель в неоднородном поле сжимающих напряжений. Прикладная механика, 1966, т. 2, № 5.
- Бородачев Н. М. 1. Термоупругая задача для бесконечного тела с осесимметричной трещиной. Прикладная механика, 1966, т. 2, № 2.
- Буйна Е. В. 1. Определение величины критических сил для хрупкой пластины с двумя трещинами одинаковой длины. Сб. «Вопросы механ. реалы. твердого тела», Киев, «Наук. думка», 1964, вып. 2.
2. О предельном равновесии пластины с остроконечным отверстием. Физ.-хим. механика материалов, 1966, т. 2, № 3.
- Витвицкий П. М., Леонов М. Я. 1. О разрушении пластинок с щелью. Прикладная механика, 1961, т. 7, № 5.
2. Полосы скольжения при неоднородной деформации пластинки.— В сб.: Вопр. механ. реалы. твердого тела, вып. 1. Киев, Изд. АН УССР, 1962.
- Борович И. И., Устинов Ю. А. 1. О давлении штампа на слой конечной толщины. ПММ, 1959, т. 23, вып. 3.
- Вронский Г. В., Карпенко Л. Н. 1. К изучению гидравлического разрыва нефтеносного пласта. Крестообразная трещина. ПМТФ, 1961, № 1.
- Галин Л. А. 1. Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
- Гахов Ф. Д. 1. Краевые задачи. М., 1963.
- Гольдштейн Р. В., Салганик Р. Л. 1. О трещинах, распространяющихся между плоскими пластинами по прямолинейной границе склейки. ПМТФ, 1963, № 5.
- Грилицкий Д. В. 1. Об упругом равновесии неоднородной пластинки с разрезом. 1966, т. 2, № 5.
- Дегтярев В. П. 1. К вопросу образования и распространения хрупких трещин. Изв. вузов «Черная металлургия»: 1963, № 12.
- Динник А. Н. 1. Кручение. Теория и приложения. М.—Л., Гостехиздат, 1938.
- Дроздовский Б. А., Фридман Я. Б. 1. Влияние трещин на механические свойства конструкционных сталей. М., Металлургиздат, 1960.
- Ершов Л. В., Ивлев Д. Д. 1. Об условиях квазихрупкого разрушения. ПММ, 1967, т. 31, 3.
- Желтов Ю. П. Об одном приближенном методе расчетов размера трещин, образующихся при гидравлическом разрыве пласта. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 3.

2. Об образовании вертикальных трещин в пласте при помощи фильтрующей жидкости. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 8.
- Желтов Ю. П., Христианович С. А. О механизме гидравлического разрыва нефтяного пласта. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 5.
- Загубиженко П. А. О напряжениях анизотропной плоскости, ослабленной прямолинейными щелями. Докл. АН УССР, 1954, № 6.
- Ивлев Д. Д. 1. Об одном построении теории трещин. Инж. ж. МТТ, 1967, № 6.
- Каминский А. О. 1. Эллиптическое отверстие с трещиной. Докл. АН УССР, 1964, № 10.
2. Хрупкое разрушение пластины, ослабленной криволинейным отверстием с трещинами. Прикладная механика, 1964, т. 10, № 4.
3. О критических нагрузках для областей, ослабленных отверстиями с трещинами. Сб. «Концентр. напряжений», Киев, «Наук. думка», 1965, вып. 1.
4. Определение критической нагрузки, обуславливающей развитие трещин возле криволинейного отверстия. Физ.-хим. механика материалов, 1966, т. 2, № 1.
5. О критических нагрузках, вызывающих начало развития трещин возле отверстия. Инж. ж-л МТТ, 1966, № 4.
- Карцивадзе М. Н. 1. Основные задачи теории упругости для упругого круга. Тр. Тбилис. матем. ин-та, 1943, т. 12.
- Качанов Л. М. 1. К кинетике роста трещин. ПММ, 1961, т. 25, вып. 3.
2. К вопросу о кинетике роста трещин. Сб. «Иссл. по упругости и пластичности», Ленингр. ун-т, 1963, № 2.
- Кит Г. С., Подстригач Я. С. 1. Определение стационарного температурного поля напряжений в окрестности щели, обладающей термосопротивлением. Физ.-хим. механика материалов, 1966, т. 2, № 3.
- Колосов Г. В. 1. Об одном приложении теории функции комплексного переменного и плоской задаче математической теории упругости. Юрьев, 1909.
2. Применение комплексного переменного к теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1935.
- Косевич А. М. 1. Динамическая теория дислокаций. Усп. физ. наук, 1964, т. 84, вып. 4.
- Косевич А. М., Пастур Л. А. 1. Равновесие двойника у плоской поверхности изотропной среды. ПМТФ, 1963, № 5.
- Костров Б. В., Никитин Л. В. 1. Трещина продольного сдвига с бесконечно узкой пластической зоной. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
- Кузнецов В. М. 1. Об одном случае равновесия системы трещин в упруго-хрупком материале. ПМТФ, 1966, № 5.
- Кузьмин Ю. Н. 1. Упругое равновесие пространства, содержащего периодически расположенные круглые трещины. Инж. ж-л МТТ, 1966, № 2.
- Кузьмин Ю. Н., Уфлянд Я. С. 1. Осесимметричная задача теории упругости для полупространства, ослабленного плоской круглой щелью. ПММ, 1965, т. 29, вып. 6.
- Купрадзе В. Д. 1. Методы потенциала в теории упругости. М., Физматгиз, 1963.
- Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. 1. Методы теории функций комплексного переменного. Изд. 3-е, М., «Наука», 1965.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. Н. 1. Теория упругости. М., 1965.
- Лебедев Н. Н., Уфлянд Я. С. 1. Пространственная задача теории упругости для неограниченного тела, ослабленного двумя плоскими круглыми щелями. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1960, № 210.
- Леонов М. Я. 1. Элементы теории хрупкого разрушения. ПМТФ, 1961, № 3.
2. Идеально хрупкое тело. Изв. АН Кирг. ССР, сер. естеств.-техн. н., 1963, т. 5, № 6.
- Леонов М. Я., Витвицкий П. М., Ярема С. Я. 1. Полосы пластичности при растяжении пластин с трещиновидным концентратором. Докл. АН СССР, 1963, т. 148, № 3.
- Леонов М. Я., Гавриленков С. В. Особенности деформации полухрупких тел. Изв. Кирг. АН ССР, 1966, № 1.
- Леонов М. Я., Либацкий Л. Л. 1. Напряженное состояние около точечной особенности в пластине с трещиной. Научн. зап. Ин-та машиновед. и автоматики, АН УССР, сер. Машиновед., 1961, вып. 8.
- Леонов М. Я., Онышко Л. В. 1. О распространении мельчайших трещин. Научн. зап. Ин-та машиновед. и автоматики АН УССР. Сер. машиновед., 1961, вып. 8.
2. О хрупком разрушении пластины с двумя близко расположенными щелями. Сб. «Теория пластин и оболочек», Киев, АН УССР, 1962.
- Леонов М. Я., Панасюк В. В. 1. Развитие мельчайших трещин в твердом теле. Прикладная механика, 1959, № 4.
2. Развитие трещины, имеющей в плане форму круга. Докл. АН УССР, 1961, № 2.
3. Напряженное состояние в теле, содержащем круглую в плане трещину и точечный дефект (вакансию). Научн. зап. Ин-та машиновед. и автомат. АН УССР, Сер. машиноведения, 1961, т. 8.
- Леонов М. Я., Русинко К. М. 1. К макроскопической теории хрупкого разрушения. Докл. АН УССР, 1961, № 12.
2. Макронапряжения упругого тела. ПМТФ, 1963, № 1.
3. Разрыв тела с линейной дислокацией. ПМТФ, 1964, № 5.
4. Основы трещинообразования. Сб. «Вопросы прочности и пластичности». Фрунзе, АН Кирг. ССР, 1964.
5. Дислокационная теорема. Докл. АН СССР, т. 157, 1966, № 6.
- Леонов М. Я., Швайко Н. Ю. О разрывных деформациях твердого тела. ПМТФ, 1961, № 2.
- Лехницкий С. Г. 1. Анизотропные пластинки. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
2. Теория упругости анизотропного тела. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
- Либацкий Л. Л. 1. О локальном разрушении бесконечной пластины с прямолинейной трещиной. Физ.-хим. механика материалов, 1965, т. 1, вып. 1.
2. Применение сингулярных интегральных уравнений для определения критических усилий в пластинах с трещинами. Физ.-хим. механика материалов, 1965, т. 1, вып. 4.
- Лозовой Б. Л. Критические напряжения для пластины с тремя трещинами. Сб. «Вопр. механ. реальн. тверд. тела», Киев, «Наук. думка», 1964, вып. 2.
- Лозовой Б. Л., Панасюк В. В. 1. Некоторые задачи изгиба полосы с прямолинейной трещиной. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 1.
2. Определение предельной нагрузки при изгибе полосы с нецентрально расположенной трещиной. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 2.
- Лукашев Л. Г. 1. Исследование возможности существования равновесной трещины при упруго-пластическом разрушении пластин. Тр. Куйбышевск. авиацион. ин-та, 1963, ч. 2, вып. 15.
- Лурье А. И. 1. Пространственные задачи теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1956.
- Малышев Б. М., Салганик Р. Л. 1. Изучение методами теории трещин разрушения хрупких клеек. ПМТФ, 1965, № 5.
- Маркузон И. А. 1. О расклинивании хрупкого тела клином конечной длины. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.
2. Обратная задача теории равновесных трещин. ПМТФ, 1961, № 6.

3. Равновесие трещин в полосе конечной ширины. ПМТФ, 1963, № 5.
4. Влияние начальных напряжений на характер развития хрупкой трещины. ПМТФ, 1965, 4.
- Мартынюк П. А. Взаимодействие системы трещин Гриффита в упруго-хрупком материале. ПМТФ, 1966, № 6.
- Михлин С. Г. Плоская задача теории упругости. Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР, 1935, № 65.
- Морозова Е. А., Партон В. З. 1. О влиянии подкрепляющих ребер на распространение трещины. ПМТФ, 1961, № 5.
- Морозов Е. М., Фридман Я. Б. 1. 1. Траектория трещины хрупкого разрушения как геодезические линии на поверхности тела. Докл. АН СССР, 1961, т. 139, № 1.
2. Анализ трещин как метод оценки характеристик разрушения. Завод. лабор., 1966, т. 32, 8.
- Морозов Е. М., Полак Л. С., Фридман Я. Б. О вариационных принципах развития трещин в твердых телах. Докл. АН СССР, 1964, вып. 156, № 3.
- Моссаковский В. И., Загубиженко П. А. 1. Об одной смешанной задаче теории упругости для плоскости, ослабленной прямолинейной щелью. Докл. АН УССР, 1954, № 3.
2. О сжатии упругой изотропной плоскости, ослабленной прямолинейной щелью. Докл. АН УССР, 1954, № 5.
- Моссаковский В. И., Загубиженко П. А., Беркович П. Е. 1. Напряженное состояние плоскости, ослабленной ломаной трещиной. Сб. «Концентр. напряжений», Киев, думка», 1965, вып. 1.
2. Об одной задаче для плоскости, содержащей трещину. ПММ, 1965, т. 1, № 8.
- Моссаковский В. И., Рыбка М. Т. 1. Обобщение критерия Гриффита — Снеддона на случай неоднородного тела. ПММ, 1964, т. 28, вып. 6.
2. Попытки построения теории прочности для хрупких материалов, основанной на энергетических соображениях Гриффита. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
3. Неоднородные задачи теории упругости для неоднородной плоскости, ослабленной прямолинейной трещиной. «Гидроаэромеханика», Респ. межвед. научно-техн. сб., 1965, вып. 1.
- Мусхелишвили Н. И. 1. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 1, 1933; изд. 2, 1935; изд. 3, Изд-во АН СССР, 1949; изд. 4, Изд-во АН СССР, 1954; изд. 5, Изд-во «Наука», 1966.
2. Сингулярные интегральные уравнения, граничные задачи теории функций и их приложение к математической физике. Изд. 1, 1946; изд. 2, Физматгиз, 1962.
- Обреимов И. (O b r e i m o v I.) The splitting strength of mica. Proc. Roy. Soc., 1930, A 127, p. 290—297.
- Онищенко В. И. Смешанная задача теории потенциала для пространства с плоской круглой щелью. Докл. АН УССР, 1958, № 1.
- Онышко Л. В. О влиянии закона распределения сил взаимодействия между поверхностями микротрещин на условиях разрушения хрупкого тела. Сб. «Вопросы механ. реал. тела», Киев, «Наук. думка», 1964, вып. 2.
- Панасюк В. В. 1. Определение напряжений и деформаций вблизи мельчайшей трещины. Научн. зн. Ин-та машиновед. и автоматики АН УССР, 1960, вып. 7.
2. К теории распространения трещины при деформации хрупкого тела. Докл. АН УССР, 1960, 9.
3. Устройство для определения энергии разрушения хрупких материалов. Машины и приборы для испытаний металлов. Киев, АН УССР, 1961.
4. Об одной пространственной задаче теории упругости для изотропного тела с эллиптической трещиной. Прикл. механ., 1962, т. 8, № 3.
5. Некоторые пространственные задачи теории равновесных трещин в деформируемом твердом хрупком теле. ПМТФ, 1962, № 6.
6. О распространении трещины, имеющей в плане форму, близкую к круговой. Докл. АН УССР, 1962, № 7.
7. Определение разрушающей нагрузки для тела, ослабленного внешней круговой трещиной. Сб. «Вопр. механ. реал. тверд. тела», Киев, АН УССР, 1962, вып. 1.
8. Определение критической нагрузки для пластины с трещиной. Сб. «Вопросы механ. реал. тверд. тела», Киев, АН УССР, 1962, вып. 1.
9. Некоторые пространственные задачи теории равновесия хрупких тел, имеющих трещины. Сб. «Вопросы мех. реал. тверд. тела», Киев, «Наук. думка», 1964, вып. 2.
10. О разрушении хрупких тел при плоском напряженном состоянии. Прикл. механ., 1965, т. 1, № 9.
11. О разрушающих нагрузках для пластины, ослабленной круговым отверстием с реальными трещинами. Докл. АН УССР, 1965, № 7.
12. О распределении трещины, имеющих в плане форму, близкую к круговой. Сб. «Концентр. напряжен.», Киев, «Наук. думка», 1965, вып. 1.
13. Определение предельного усилия при двустороннем растяжении пластины с произвольно ориентированной трещиной. Докл. АН УССР, 1965, № 1.
- Панасюк В. В., Бережницкий Л. Т. 1. Определение предельных усилий при растяжении пластины с дугообразной трещиной. Сб. «Вопросы механ. реал. тверд. тела», Киев, «Наук. думка», 1964, вып. 3.
2. Определение предельных усилий при двустороннем растяжении пластины с произвольно ориентированной трещиной. Докл. АН УССР, 1965, № 1.
3. К вопросу о предельном равновесии пластин с острыми концентраторами напряжений. Физ.-хим. механ. материалов, 1965, т. 1, вып. 4.
4. О предельном равновесии пластины с трещинами вдоль дуг окружности. Прикладная механика, 1965, т. 1, № 10.
5. К вопросу о распространении дугообразных трещин при растяжении пластин. Докл. АН УССР, 1966, № 6.
- Панасюк В. В., Бережницкий Л. Т., Ковчик С. Е. 1. О распространении произвольно ориентированной прямолинейной трещины при растяжении пластины. Прикладная механика, 1965, т. 1, № 2.
- Панасюк В. В., Буйна Е. В. 1. Предельное равновесие пластины, ослабленной п-угольным отверстием. Физ.-хим. механика материалов, 1966, т. 2, № 1.
2. Определение величин предельных усилий для пластин с острым концентратором напряжений. Физ.-хим. механика материалов, 1966, т. 2, № 4.
- Панасюк В. В., Ковчик С. Е. 1. Определение интенсивности энергии разрушения в твердых телах. Прикладная механика, 1963, т. 9, № 2.
- Панасюк В. В., Лозовой Б. Л. 1. Изгиб полосы с прямолинейной щелью. Прикладная механика, 1961, т. 7, № 6.
2. Определение величины разрушающих напряжений для пластины с двумя трещинами равной длины. Докл. АН УССР, 1961, № 7.
3. Решение задачи об определении критических усилий полосы с нецентральной трещиной. Докл. АН УССР, 1962, № 8.
4. О распространении двух трещин неравной длины. Докл. АН УССР, 1962, № 11.
5. Определение предельных напряжений при растяжении упругой плоскости с двумя нерав.

- ными трещинами. Сб. «Вопр. механ. реалн. тверд. тела», Киев, АН УССР, 1962, вып. 1.
6. Определение предельной нагрузки при изгибе полосы с двумя неравными трещинами. Сб. «Вопр. механ. реалн. тверд. тела», Киев, «Наук. думка», 1964, вып. 2.
- Партон В. З. 1. Об одной оценке взаимного упрочнения трещин при их шахматном расположении. ПМТФ, 1965, № 5.
- Ребиндер П. А. 1. Физико-химические исследования процессов деформации твердых тел. Сб. работ, посвященный 30-летию Великой Октябрьской социалистической революции. М., Изд-во АН СССР, 1947.
- Ржаницын А. Р. 1. К вопросу о процессе разрушения материала при растяжении. Сб. «Исслед. по вопр. строит. мех. и теор. пластичн.», М., Стройиздат, 1956.
- Савин Г. Н. 1. Концентрация напряжений около отверстий. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
- Салганик Р. Л. 1. Об осесимметричных трещинах продольного сдвига. ПМТФ, 1962, № 3.
2. О хрупком разрушении склеенных тел. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
- Сорокин А. Д. 1. Исследование напряжений вокруг трещины в плоских пластинах. Инж. ж-л МТТ, 1966, № 2.
- Устинов Ю. А. 1. О влиянии свободной границы полупространства на распространение трещины. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 4.
- Уфлянд Я. С. 1. Пространственная задача теории упругости для неограниченного тела с плоскими разрезами. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1958, № 192.
2. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1963.
- Френкель Я. И. 1. Теория обратимых и необратимых трещин в твердых телах. Ж. техн. физ., 1952, т. 22, стр. 1857—1866.
2. Введение в теорию металлов. Изд. 3, М., Физматгиз, 1958.
- Фридман Я. Б., Морозов Е. М. О вариационных принципах для механического разрушения. Изв. вузов, Машиностроение, 1962, № 4.
- Черепанов Г. П. 1. О напряженном состоянии в неоднородной пластине с разрезами. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 1.
2. Об одном классе задач плоской теории упругости. Изв. АН СССР, ОТН, там же № 4.
3. Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
4. Одна задача о вдавливании индентора с образованием трещин. ПММ, 1963, т. 27, вып. 1.
5. Некоторые задачи теории трещин в гидродинамической постановке. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
6. О природе «Пинч-эффекта» и некоторых других вопросах теории разрушения. ПМТФ, 1965, 1.
7. О развитии трещин в сжатых телах. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
8. О распространении трещин в сплошной среде. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
9. Некоторые вопросы разрушения хрупких пород при сжатии. Сб. «Проблемы механики горных пород», Алма-Ата, 1966.
10. О прочности композитов. ПМТФ, 1967, № 3.
11. К математической теории равновесных трещин. Инж. ж. МТТ, 1967, № 6.
- Шерман Д. И. 1. Об одном методе решения статической плоской задачи теории упругости для многосвязных областей. Тр. Сейсм. ин-та АН СССР, 1935, № 54.
2. Упругая область с прямолинейными разрезами. Докл. АН СССР, 1940, т. 24, № 7.
3. Смешанная задача теории потенциала и теории упругости для плоскости с конечным числом прямолинейных разрезов. Докл. АН СССР, 1940, т. 27, № 4.
- Ширяев Е. А. 1. О кручении круглого бруса с трещиной по дуге окружности или по радиусу. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
2. Кручение круглого бруса с двумя вырезами. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.
- Штаерман И. Я. 1. Контактные задачи теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
- Ярма С. Я., Крестин Г. С. 1. Определение модуля сцепления хрупких материалов путем испытания дисков с трещиной на сжатие. Физ.-хим. механика материалов, 1966, т. 2, № 1.

б) Латинский алфавит

- Anderson W. E., Paris P. C. 1. Evaluation of aircraft material by fracture. Metals Eng. Quart., 1961, vol. 1, No. 2.
- Ang D. D., Follas E. S., Williams M. L. 1. The bending stress in a cracked plate on an elastic foundation. J. Appl. Mech., 1963, vol. 30, No. 2.
- Ang D. D., Williams M. L. 1. Combined stresses in an orthotropic plate having a finite crack. J. Appl. Mech., 1961, vol. 28, No. 3.
- Atkinson C. 1. The interaction between a dislocation and a crack. Inter. J. Frac. Mech., 1966, vol. 2, No. 4.
- Averbach B. L. 1. Micro and macro crack formation. Inter. J. Frac. Mech., 1965, vol. 1, No. 4.
- Baker B. R. 1. Ductile yielding and brittle fracture at the ends of parallel cracks in a stretched orthotropic sheet. Inter. J. Frac. Mech., 1966, vol. 2, No. 4.
- Berg C. A. 1. The motion of cracks in plane viscous deformation. Proc. 4th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Calif., 1962, vol. 2.
2. Deformation of fine cracks under high pressure and shear. J. Geophys. Res., 1965, vol. 70, No. 14.
- Berry J. P. 1. General theory of brittle fracture. Fracture Processes in Polymeric Solids. Phenomena and Theory. Interscience publ, N. Y., 1964, p. 157—193.
- Bloom J. M. 1. Single-edge crack in rectangular sheet subjected to end rotations. J. Appl. Mech., 1966, vol. 33, No. 3, p. 689—691.
2. The short single edge crack specimen with lineary varying end displacement. Inter. J. Frac. Mech., 1966, vol. 2, No. 4.
- Bloom J. M., Sanders J. L. 1. The effect at a riveted stringer on the stress in a cracked sheet. J. Appl. Mech., 1966, vol. 33, No. 3, p. 561—570.
- Bowie O. L. 1. Analysis of an infinite plate containing radial cracks originating of the boundary of an internal circular hole. J. Math. and Phys., 1956, vol. 35, No. 1, p. 60—61.
2. Rectangular tensile sheet with symmetric edge cracks. J. Appl. Mech., 1964, vol. 31, No. 2, p. 208—212; J. Appl. Mech., 1965, vol. 32, No. 1, p. 237. Discuss.
3. Symmetric edge cracks in tensile sheet with constrained ends. J. Appl. Mech., 1964, vol. 31, No. 4, p. 726—728.
- Bowie O. L., Neal D. M. 1. Single edge cracks in rectangular tensile sheet. J. Appl. Mech., 1965, vol. 32, No. 3, p. 708—709.
- Boyle R. W., Sullivan A. M., Krafft J. M. 1. Determination of plane strain fracture toughness with sharply notched sheets. Welding, J. 1962, vol. 41, No. 9, p. 428-s — 432-s.
- Bueckner H. F. 1. The propagation of cracks and the energy of elastic deformation. Trans. ASME, 1958, vol. 80, No. 6, p. 1225—1230.
2. Some stress singularities and their computation by means of integral equations. Boundary Problems in differential Equations, Univ. Wisconsin, Press, 1966, p. 215—230.
- Bullough R. 1. The cracked dislocation under tension. Philos. Mag., 1964, vol. 9, No. 102, p. 917—925.

- Chapkins P. L., Williams M. L. 1. Stress singularities for a sharp-notched polarly orthotropic plate. Proc. 3-d U. S. Nat. Congr. Appl. Mech. 1958, No. 4, Amer. Soc. mech. engr. 1958.
- Chen W. T. 1. On a cracked dislocation in an anisotropic elastic medium. Philos. Mag., 1965, vol. 11, No. 114, p. 1207—1215.
- Chen W. T., Soni R. P. 1. On a circular crack in a transversely isotropic elastic material under prescribed shear stress. IBM J. Res. and Developm., 1965, vol. 9, No. 3, p. 192—195.
- Clark A. B. J., Irwin G. R. 1. Crack-propagation behaviors. Exptl. Mech., 1966, vol. 6, No. 6, p. 321—330.
- Collins W. D. Some axially symmetric stress distributions in elastic Solids Sontaining penny-shaped cracks:  
 1. I. Crack in an infinite solid and a thick plate. Proc. Roy. Soc., 1962, A-266, No.1326, p. 359—386.  
 2. II. Cracks in solids under torsion. Mathematika, 1962, vol. 9, No 1 (17), p. 25—37.  
 3. III. A crack in a circular beam. Proc. Edinburgh, Math. Soc., 1962, vol. 13, No. 1, p. 69—78.
- Cottrell A. H. 1. Dislocations and plastic flow in crystals. Oxford, 1956. (Рус. пер.: Коттрелл А. Х. Дислокации и пластическое течение в кристаллах. М., Металлургияздат, 1958).
- Cottrell B. 1. On brittle fracture plaths. Inter. J. Frac. Mech., 1965, vol. 1, No. 2, p. 96—103.  
 2. Notes on the plaths and stability of cracks. Inter. J. Frac. Mech., 1966, vol. 2, No. 3, p.526—533.
- Cribb J. L., Tomkins B. 1. On the nature of the stress at the tip of a perfectly brittle crack. J. Mech. and Phys. Solids, 1967, vol. 15, N. 2, p. 135—140.
- Deutch E. 1. Axially symmetric crack problem for an infinite elastic medium with transverse isotropy (displacement prescribed). Arch. mech. Stosowanj, 1964, vol. 16, No. 1, p. 65—80.  
 2. The distribution of axisymmetric thermal stress in an infinite elastic medium containing a penny — shaped crack. Inter. J. Engng. Sci., 1965, vol. 3, No. 5, p. 485—490.
- Dixon J. R. 1. Stress and strain distributions around cracks in sheet materials having various work-hardening characteristics. Inter. J. Frac. Mech., 1965, vol. 1, No. 3, p. 224—243.
- Donaldson D. K., Anderson W. E. 1. Crack propagation behaviour of some airframe materials. Proc. Crack propagation Symp., Cranfield, 1961, Craufield college Aeronau., 1962, vol. 2, p. 375—441.
- Dugdale D. S. 1. Yielding of steel sheets containing slits. J. Mech. Phys. Solids, 1960, vol. 8, No. 2, p. 100—104.
- Elliott H. A. 1. An analysis of the conditions for rupture due to Griffith cracks. Proc. Phys. Soc., ser. A, 1947, vol. 59, No. 232, pt. 2, p. 208—223.
- England A. H. 1. A note on cracks under longitudinal shear. Mathematika, 1963, vol. 10, No. 20, p. 107—113.  
 2. A crack between dissimilar media. J. Appl. Mech., 1965, vol. 32, No. 2, p. 400—402.  
 3. An arc crack around a circular elastic inclusion. J. Appl. Mech., 1966, vol. 33, No. 3, p. 637—640.
- Erdogan F. 1. On the stress distribution in plates with collinear cuts under arbitrary loads. Proc. 4th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech. Calif., 1962, vol. 1, N. Y., Amer., Soc. mechan. engr. 1962, p. 547—553.  
 2. Stress distribution in a nonhomogeneous elastic plane with cracks. J. Appl. Mech., 1963, vol. 30, No. 2, p. 232—236.  
 3. Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks, J. Appl. Mech., 1965, vol. 32, No. 2, p. 403—410.  
 4. Stress distribution in bonded dissimilar materials containing circular or ring-shaped cavities. J. Appl. Mech., 1965, vol. 32, No. 4, p. 829—836.  
 5. Elastic-plastic anti-plane problems for bonded dissimilar media containing cracks and cavities. Inter. J. Solids Structures, 1966, vol. 2, No. 3, p. 447—465.
- Erdogan F., Tuncel O., Paris P. 1. An experimental investigation of the crack tip stress intensity factors in plates under cylindrical bending. Trans. ASME, Ser. D, J. Basic Eng., 1962, vol. 84, No. 4, p. 542—553.
- Erdogan F., Sih G. C. 1. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. Trans ASME, Ser. D, J. Basic Eng., 1963, vol. 85, No. 4, p. 519—527.
- Felbeck D. K., Orowan E. O. 1. Experimentally on brittle fracture of steel plates. Welding J. Suppl., 1955, vol. 34, No. 11, p. 570—575.
- Field F. A. 1. Yielding in a cracked plate under longitudinal shear. J. Appl. Mech., 1963, vol. 30, 4.
- Filon L. N. G. 1. On the resistance to torsion of certain forms of shafting with special reference to the effect of keyways. Philos. Trans. Roy. Soc. A, 1900, vol. 193, p. 309—352.
- Florence A. L., Goodier J. N. 1. Thermal stresses due to disturbance of uniform heat flow by an insulated ovaloid hole. Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 1960, vol. 27, No. 4, p. 635—639.  
 2. The einear thermoelastic problem of uniform heat flow disturbed by a penny-shaped insulated crack. Inter. J. Engng. Sci., 1963, vol. 1, No. 4, p. 533—540.
- Folias E. S. 1. The stresses in a cracked spherical shell. J. Math. and Phys., 1965, vol. 44, No. 2, p. 164—176.  
 2. A finite line crack in a pressurized spherical shell. Inter. J. Frac. Mech., 1965, vol. 1, No. 1, p. 20—46.
- Folias E. S., Williams H. L. 1. The bending stress in a cracked plate on an elastic foundation. Trans. ASME, ser. E, J. Appl. Mech., 1963, vol. 30, No. 2, p. 245—251.
- Forman R. G. 1. Effect of plastic deformation on the strain energy release rate in centrally notched plate subjected to uniaxial tension. Paper. Amer. Soc. Mech. Engrs. 1965, No. WA/Met. 9, 5 pp.
- Fracture of Solids. Proc. Inter. Conf. Washington, 1962, N. Y., L. Wiley, 1964 (Рус. пер.: Разрушение твердых тел. М., Металлургия, 1967).
- Fracture Toughness Testing and Its Application. Sympos. Chi. 1964, Philad., 1965 (Amer. Soc. Test. Materials).
- Goodier J. N., Field F. A. 1. Plastic energy dissipation in crack propagation. Fracture of Solids. N. Y., L., Interscience, 1963, p. 103—118.
- Green A. E., Zerna W. 1. Theoretical elasticity. Oxford, Clarendon Press, 1954.
- Green A. E., Sneddon I. N. 1. The distribution of stress in the neighbourhood of a flat elliptical crack in an elastic solid. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1950, vol. 46, p. 159—164.
- Greiff R., Sanders J. L. 1. The effect of a stringer on the stresses in a cracked sheet Trans.. ASME, ser. E, J. Appl. Mech. vol. 32, 1965, No. 1, p. 59—66.
- Griffith A. A. 1. The phenomenon of rupture and flow in solids. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A. 1920, vol. 221, p. 163—198.  
 2. The theory of rupture. Proc. First Inter., Congress Appl. Mech. Delft., 1924, p. 55—63.
- Houghton D. S., Rothwell A. 1. The influence of curvature on the state of stress shead of cracks in cylindrical shells. Bul Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. techn., 1964, vol. 12, No. 11a, p. 52.
- Hult J. A. H. 1. Elastic-plastic torsion of sharply notched bars. J. Mech. Phys. Solids, 1957, vol. 6, No. 1, p. 79—82.  
 2. Fatigue crack propagation in torsion. J. Mech. Phys. Solids., 1957, vol. 6, No. 1, p. 47—52

3. Experimental studies on fatigue crack propagation in torsion. Kungl Tekniska Högskolans Handlingar. Trans. Roy. Inst. Technology. Stockholm, 1958, No. 119 (Рус. пер.: Механика, сб. пер. II.—II., 1959, № 6).
- Hult J. A. H., McClintock F. A. 1. Elastic-plastic stress and strain distribution around sharp notches under repeated shear. Proc. 9-th Inter. Congr. for Appl. Mech. 1957, vol. 8, p. 51—58.
- Hunt R. T. 1. Crack propagation and residual static strength of stiffened and unstiffened sheet. Current Aeronautical Fatigue Problems. Oxford Pergamon Press, 1965, p. 287—324. Discuss. 324.
- Inglis G. E. 1. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners., Proc. Inst. Naval Architects, 1913, vol. 60, p. 219—230.
- Irwin G. R. 1. Fracture dynamics. Fracturing of metals. ASM. Cleveland, 1948, p. 147—166.
2. Onset of fast crack propagation in high strength steel and aluminum alloys. Proc. Sagamore Conference, vol. 2, Syracuse Univ. March. 1956, p. 289—305.
3. Analysis of stresses and strain near the end of a crack traversing a plate. J. Appl. Mech., 1957, vol. 24, No. 3, p. 361—364. Discussion. J. Appl. Mech., 1958, vol. 25, No. 2, p. 299—303.
4. Relation of stresses near a crack to the crack extension force. Proc. 9-th Inter. Congr. Appl. Mech. Brussels, 1957, vol. 8, p. 245—251.
5. Fracture. Handbuch der Physik. Bd. 6, Springer. Berlin, 1958, p. 551—590.
6. The crack extension force for a crack at a free surface boundary. NRL Report, No. 5120, 1958.
7. Fracture mechanics. Structural mechanics, Proc. 1-th Symposium on Naval structural mech., 1960, p. 557—591.
8. Plastic zone near a crack and fracture toughness. 7-th Sagamore advanced materials research conference, August, 1960.
9. Crack-extension force for a part through crack in a plate. J. Appl. Mech., 1962, vol. 29, No. 4, p. 651—654.
10. Relation of crack toughness measurements to practical applications. Welding J. Res. Suppl., Nov. 1962.
11. Crack toughness testing of strain rate sensitive materials. J. Basis Engineering, 1964.
12. Structural aspects of brittle fracture. Appl. Mater., Res., 1964, vol. 3, No. 2.
- Irwin G. R., Kies J. A. 1. Fracturing and fracture dynamics. Welding J., 1952, vol. 31, p. 95s—100s.
2. Critical energy rate analysis of fracture strength. Welding J. vol. 33, Suppl., 1954, vol. 33, No. 4, p. 193s—198s.
- Irwin G. R., Kies J. A., Smith H. L. 1. Fracture strength relative to onset and arrest of crack propagation. Proc. Amer. Soc. Test. Mater., 1958/1959, vol. 58, p. 640—657.
- Isida M. 1. Stress concentration due to a central transverse crack in a strip reinforced on either side. J. Japan Soc. Aero-Space Sciences, 1962, vol. 10.
2. Stress intensity factors for the tension of an eccentrically cracked strip., J. Appl. Mech., 1966, vol. 33, No. 3, p. 674—675.
- Isida M., Itagaki I. 1. Stress concentration at the tip of a central transverse crack in stiffened plate, subjected to tension. Proc. 4-th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., N. Y. Perg. Press, 1962, vol. 2, p. 955—969.
- Jahsman W. E., Field F. A. 1. The effect of residual stresses on the critical crack length predicted by the Griffith theory. J. Appl. Mech., 1963, vol. 30, No. 4, p. 613—616.
- Kassier M. K., Sih G. C. 1. Three-dimensional stress distribution around an elliptical crack under arbitrary loadings. J. Appl. Mech., 1966, vol. 33, No. 3, p. 601—611.
- Keer L. M. 1. Stress distribution at the edge of an equilibrium crack. J. Mech. Phys. Solids, 1964, vol. 12, No. 3, p. 149—163.
2. A note on shear and combined loading for a penny-shaped crack. J. Mech. and Phys. Solids, 1966, vol. 14, No. 1, p. 1—6.
- Keer L. M., Murata T. 1. Stationary crack and continuous distributions of dislocations. Proc. 4-th Inter. Conference on Fracture Sendai, Japan, 1965. Japan, 1966. vol. 1.
- Kies J. A., Sullivan A. M., Irwin G. R. 1. Interpretation of fracture markings, J. Appl. Phys., 1950, vol. 21, p. 716—720.
- Knauss W. G. 1. Stresses in an infinite strip containing a semi-infinite crack. J. Appl. Mech., 1966, vol. 33, No. 2.
- Knowles I. K., Wang N. M. 1. On the bending of an elastic plate containing a crack. J. Math. and Phys., 1960, vol. 39, No. 4, p. 223—236.
- Kobayashi A. S., Cherepy R. D., Kinsell W. C. 1. A numerical procedure for estimating the stress intensity factor of a crack in a finite plate. Trans. ASME, Ser. D. Basic Engng., 1964, vol. 86, No. 4, p. 681—684.
- Koiter W. T. 1. An infinite row of collinear cracks in an infinite elastic sheet. Ing.—Arch., 1959, Bd. 28, p. 168—172.
2. An infinite row of parallel cracks in an infinite elastic sheet. Problems Continuum Mechanics. Contrib. in honour of the 70-th birthday of acad. N. T. Muskhelishvili, Philadelphia, 1961, p. 246—259. (Рус. пер.: Проблемы механики сплошной среды к 70-летию акад. Мусхелишвили, Изд-во «Наука», 1961, стр. 202—214).
- Krafft J. M., Irwin G. R. 1. Crack-velocity considerations. Fract. Toughness Test. and Applic. Philadelphia, Proc. Amer. Soc. Test Mater., 1965, p. 114—123. Discuss., p. 128—129.
- Kröner E. 1. Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Arch. Rational Mech. Anal. 1960, vol. 4, No. 4, p. 18—334. (Рус. пер.: Крөнер Э. Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. Изд-во «Наука», 1965).
- Kürpers H. 1. Die numerische Berechnung der Spannungsverteilung in der Umgebung einer Kerbspitze. Glastechn. Ber., 1964, vol. 37, No. 4, p. 185—189.
- Lui H. W. 1. Shear cracks and double ended dislocation arrays. J. Appl. Phys., 1965, vol. 36, No. 4.
2. Fracture criteria of cracked metallizing plate. Inter. J. Frac. Mech., 1966, vol. 2, No. 2.
- Lowengrub M. 1. Stress in the vicinity of a crack in a thick elastic plate. Quart. Appl. Math., 1961, vol. 19, No. 3, p. 119—126.
2. Some dual trigonometric equations with an application to elasticity. Inter. J. Engng. Sci., 1966, vol. 4, No. 1, p. 69—79.
3. A two-dimensional crack problem. Inter. J. Engng. Sci., 1966, vol. 4, No. 3, p. 289—299.
- Lowengrub M., Sneddon I. N. 1. The distribution of stress in the vicinity of an extremal crack in an infinite elastic solid. Inter. J. Engng. Sci., 1965, vol. 3, No. 4, p. 451—460.
- Masubuchi K. 1. Dislocation and strain energy release during crack propagation in residual stress field. Proc. 8-th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1958—1959, p. 147—150.
- McClintock F. A. 1. The growth of fatigue cracks under plastic torsion. Int. Conf. on Fatigue of Metals, Institution Mechanical Engineering, London, 1956, p. 538—542.
2. Ductile fracture instability in shear. J. Appl. Mech., 1958, vol. 25, No. 4, p. 582—587.
3. On the plasticity of the growth of fatigue cracks. Fracture of solids, Proc. Int. Congr. Metallurg., 1965.
4. Effect of room radius, stress, crack growth and rate on fracture instability. Proc. Roy. Soc. 1965, vol. 285, No. 1400, p. 58—72.

- Mc Clintock F. A., Irwin G. R. 1. Plasticity aspects of fracture mechanics. Fracture Toughness Testing and Its Application, Philadelphia, Pa, 1965, p. 85—113.
- Mc Clintock F. A., Walsh I. B. 1. Friction on Griffith cracks in rocks under pressure. Proc. 4-th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech. 1962, p. 1015—1021.
- Mott N. F. 1. Fracture of metals. theoretical considerations. Engineering, 1948, vol. 165.  
2. Fracture in metals. J. Iron. and Steel Inst., 1956, vol. 183, No. 3, p. 233—243.
- Murrell S. A. F. 1. The theory of the propagation of elliptical Griffith cracks under various conditions of plane strain or plane stress. Parts I, II, III. Brit. J. Appl. Phys., 1964, vol. 15, No. 10, p. 1195—1210, 1211—1223.
- Neuber H. 1. Kerbspannungslhere, Springer, Berlin, 1937.  
(рус. пер.: Концентрация напряжений, Гостехиздат, 1947).
- Neuber H., Hahn H. G. 1. Stress concentration in scientific research and engineering. Appl. Mech. Rev. 1966, vol. 19, No. 3, p. 187—199 (рус. пер.: Механика, сб. перев., И.—ЖЛ., 1967, № 3).
- Olesiak Z., Sneddon I. N. 1. The distribution of thermal stress in an infinite elastic solid containing a penny-shaped crack. Arch. Rat. Mech. Anal., 1960, vol. 4, No. 3, p. 238—254.
- Olesiak Z., Wnuk M. 1. Length of plastic zones for penny-shaped cracks. Bull. Acad. polon. Sci., ser. sci. techn., 1965, vol. 13, No. 8, p. 715—720.  
2. Deformacja plasticzna wokot osiowo-symetrycznej szezelyty przedstawionej modelen Dugdale'a. Rozpr. inz., 1966, vol. 14, No. 1, S. 125—142.
- Orlowski E. 1. Arbitrary inclined crack intersecting the edge of an elastic semi-plane. Bull. Acad. polon. Sci., ser. sci. techn., 1962, vol. 10, No. 9, p. 371—376.
- Orowan E. O. 1. Fundamentals of brittle behavior of metals. Symp. Fatigue and Fracture of Metals, 1950, N. Y., Wiley, 1952, p. 139—167.  
2. Energy criteria of fracture, Welding J., Res. Suppl. March., 1955, p. 158—160s.  
3. Conditions of high velocity ductile fracture. J. Appl. Phys., 1955, vol. 26, No. 7, p. 900—902.
- Paris P., Sih G. 1. Stress analysis of cracks. Fract. Toughness Test and Appl., Proc. Amer. Soc. Test. Mater., 1965, p. 30—81, Discuss., p. 82—83.
- Payne L. E. 1. On axially symmetric punch, crack and torsion problems. J. Soc. Industr. Appl. Math., 1953, vol. 1, p. 53—71.
- Perkins T. K., Kern L. R. 1. Widths of hydraulic fractures. J. Petrol. Tech., 1961, vol. 13, No. 9, p. 937—949.
- Peterson R. E. 1. Stress concentration design factor. N. Y., Wiley Sons In., 1953.
- Proceedings of the crack propagation Symposium, Craufield, September, 1967, Craufield, Collge Aeronaut., 1962, vol. 1, p. 270; vol. 2, p. 295
- Rao B. S., Ramachandra. 1. Infinite elastic plane with a parabolic arc cut. Appl. Scient. Res. 1963, A-12, No. 1, p. 86—90.
- Redwood R. G., Shepherd W. M. 1. Conditions at the root of a crack in a bent plate. J. Appl. Mech., 1966, vol. 33, No. 3.
- Rice J. R. 1. Contained plastic deformation near cracks and notches under longitudinal shear. Intern. J. Fracture Mech., 1966, vol. 2, No. 2.  
2. Plastic yielding at a crack tip. Proc. 1-th Inter. Conference on Fracture Sendai, Japan, 1965 Japan, 1966, vol. 1.  
3. An examination of the fracture mechanics energy balance from the point of view of continuum mechanics. Proc. 1-th Inter. Conference on Fracture Sendai, Japan 1965. Japan, 1966, vol. 1.
- Romualdi I. P. 1. Fracture arrest design consideration. Proc. Crack Propagation Symp., Cranfield, 1962, vol. 2.
- Romualdi I. P., Sanders P. H. 1. Fracture arrest by riveted stiffeners. Proc. 4th Midwest. Confer. Solid. Mech., Univ. Texas Press, 1959—1960, p. 74—90.
- Rosenfield A. R., Dai P. K., Hahn G. T. 1. Crack extension and propagation under plane stress. Proc. 1-th Inter. Conference on Fracture Sendai, Japan, 1965. Japan, 1966, vol. 1.
- Sack R. A. 1. Extension of Griffith theory of rupture to three dimensions. Proc. Phys. Soc., 1946, vol. 58, p. 729—736.
- Sadowsky M. A. 1. Stress concentration caused by multiple punches and cracks. J. Appl. Mech. 1956, vol. 23, No. 1, p. 80—84.
- Sadowsky M. A. 1. Sternberg E. Stress concentration around an ellipsoidal cavity in an infinite body under arbitrary plane stress perpendicular to the axis of revolution of cavity. J. Appl. Mech. 1947, vol. 14, No. 3, p. A-191 — A-201.
- Sanders I. L. 1. On the Griffith-Irwin fracture theory. J. Appl. Mech. 1960, vol. 27, No. 2, p. 352—353.
- Sih G. C. 1. On the crack-tip stress-intensity factors for cylindrical bars under torsion. J. Aerospace Sciences, 1962, vol. 29, No. 10.  
2. On the singular character of thermal-stresses near a crack tip. J. Appl. Mech., 1962, vol. 29, No. 3, p. 587—589.  
3. Flexural stress distribution near a sharp crack. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 2, p. 492—493.  
4. Strength of stress singularities at crack tips for flexural and torsional problems. J. Appl. Mech., 1963, vol. 30, No. 3, p. 419—425.  
5. Boundary problems for longitudinal shear cracks. Proc. Second Southeastern Confer. on Theoretical and Appl. Mech. vol. 2, Pergamon Press, N. Y., 1965, p. 117—130.  
6. Stress distribution near internal crack tips for longitudinal shear problems. J. Appl. Mech., 1965, vol. 32, No. 1.  
7. External cracks under longitudinal shear. J. Franklin Inst., 1965, vol. 280, No. 2, p. 139—149.  
8. On the Westergaard method of crack analysis. Intern. J. Fracture Mech., 1966, vol. 2, No. 4.  
9. Flexural problems of cracks in mixed media. Proc. 1-th Inter. Conference on Fracture Sendai, Japan 1965. Japan, 1966. Vol. I.
- Sih G. C., Liebowitz H. 1. On the Griffith energy criterion for brittle fracture. Inter. J. Solids Structures, 1967, Vol. 3, No. 1.
- Sih G. C., Paris P. C., Erdogan F. 1. Crack-tip, stress intensity factors for plane extension and plate bending problems. J. Appl. Mech., 1962, vol. 29, No. 2.
- Sih G. C., Paris P. C., Irwin G. R. 1. On cracks in rectilinearly anisotropic bodies. Internat. J. Fracture Mech., 1965, vol. 1, No. 3.
- Sih G. C., Rice J. R. 1. The bending of plates of dissimilar materials with cracks. J. Appl. Mech., 1964, vol. 31, No. 3, Discuss.  
2. Plane problems of cracks in dissimilar media. J. Appl. Mech. 1965, vol. 32, No. 2, p. 477—482.
- Smekal A. 1. Technische Festigkeit und molekulare Festigkeit, Naturwiss. 1922, vol. 10, s. 799—804.
- Smith E. 1. The stability of a wedge crack under a uniform applied stress. Internat. J. Fracture Mech., 1965, vol. 1, No. 3.  
2. Low stress fracture initiation at a stress concentration: application of dislocation typ models. Internat. J. Fracture Mech. 1966, vol. 2, No. 3.  
3. The effect of anexternal dislocation of the condition for complete fracture from a wedge shaped crack. Internat. J. Fracture Mech., 1966, vol. 2, No. 4.



4. The opening of parallel crack by an applied tensile stress. *Internat. J. Engng. Sci.*, 1966, vol. 4, No. 1, p. 41—52.
  5. The formation of a cleavage crack in a crystalline solid. *Acta metallurg.*, 1966, vol. 14, No. 8, p. 985—989.
- S mith H. L., Kies I. A., Irwin G. R.** 1. Instability criteria for the fracture of solids. *Abstracts Phys. Review*, 1959, vol. 86, p. 623.
- S neddon I. N.** 1. The distribution of stress in the neighborhood of a crack in an elastic solid. *Proc. Roy. Soc.*, 1946, ser. A, vol. 187, p. 229—260.
2. Fourier transforms N. Y. Mc Grow Hill, 1951 (рус. пер. Преобразование Фурье, И.—Л., М., 1955).
  3. Crack problem in the mathematical theory of elasticity. North Carolina State College. Report No. ERD — 126/1, 1961.
  4. Boundary value problem in thermoelasticity. «Boundary Problems in differential Equation», Wisconsin Press, 1960, p. 231—241.
- S neddon I. N., Elliott H. A.** 1. The opening of a Griffith crack under internal pressure. *Quart. Appl. Math.*, 1946, vol. 4, No. 3, p. 262—267.
- S neddon I. N., Tait R. J.** 1. The effect of a penny-shaped crack on the distribution of stress in a long circular cylinder. *Internat. J. Engng. Sci.*, 1963, vol. 1, p. 391—409.
- S neddon I. N., Welch J. T.** 1. A note on the distribution of stress in a cylinder containing a penny-shaped crack. *Internat. J. Engng. Sci.*, 1963, vol. 1, p. 411—419.
- S pencer A. J. M.** 1. On the energy of the Griffith crack. *Internat. J. Engng. Sci.*, 1965, vol. 3, No. 4, p. 441—449.
- S troh A. N.** 1. A theory of the fracture of metals. *Advances in physics*, 1957, vol. 6, p. 418—465.
2. Dislocations and cracks in anisotropic elasticity. *Phil. Mag.* 1958, 8 ser., vol. 3, p. 625—646.
- S wedlow J. L.** 1. On Griffith's theory of fracture. *Internat. J. Fracture Mech.* 1965, vol. 1, No. 3.
- S wedlow J. L., Williams M. L., Yang W. H.** 1. Elasto-plastic stresses and strains in cracked plates. *Proc. I-th Inter. Conference on Fracture Sendai, Japan 1965*, Japan, 1966, Vol. 1.
- S z e l a g o w s k i F.** 1. Circular disc with edge slit subject to tension. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. techn.* 1964, vol. 12, No. 8, p. 585—590.
- T a m a t e O s u m u.** 1. Bending stresses in a non-homogeneous elastic plate with cracks. *Technol. Repts. Tohoku univ.*, 1965, vol. 30, No. 2, p. 165—181.
- T i f f a n y C. F., Masters I. N.** 1. Applied fracture mechanics. *Fract. Toughness Test and Applic.* Philadelphia. Proc. Amer. Soc. Test. Mat. 1965, p. 249—277. Discuss 278.
- T r a n t e r C. I.** 1. The opening of a pair of coplanar Griffith cracks under internal pressure. *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 1961, vol. 14, No. 3, p. 283—292.
- W e e r t m a n J.** 1. Rate of growth of fatigue cracks calculated from the theory of infinitesimal dislocations distributed on a plane. *Internat. J. Frac. Mech.*, 1966, vol. 2, No. 2, p. 460—467.
- W e i s s V., Yukawa S.** 1. Critical appraisal at fracture mechanics. *Fract. Toughness Test and Applic.* Philadelphia. Proc. Amer. Soc. Test. Mat. 1965, p. 1—22, Discussion, p. 23—29.
- W e l l s A. A.** 1. The brittle fracture strength of welded steel plates. *Trans. Justn. Nav. Arch.*, 1956, vol. 98, No. 3, p. 296—311.
2. Application of fracture mechanics at and beyond general yielding. *Brit. Weld. J.* 1963, vol. 10, No. 11, p. 563—570.
  3. The application of fracture mechanics to yielding materials. *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, 1965, vol. 285, No. 1400, p. 34—45. Discuss., p. 141—174.
- W e s t e r g a a r d H. M.** 1. Stresses at a crack, size of the crack and the bending of reinforced concrete. *J. Amer. Concr. Just.* 1933, vol. 5, No. 2, p. 93—103.
2. Bearing pressures and cracks. *J. Appl. Mech.*, 1939, vol. 6, No. 2, p. A49 — A53.
- W e s t m a n R. A.** 1. Pressurized star crack. *J. Math. and Phys.*, 1964, vol. 43, No. 3, p. 191—198.
2. Asymmetric mixed boundary-value problems of the elastic half-space. *J. Appl. Mech.*, 1965, vol. 32, No. 2, p. 411—417.
  3. Note on estimating critical stress for irregularly — shaped — planar cracks. *Internat. J. Frac. Mech.*, 1966, vol. 2, No. 3, p. 561—563.
- W i g g l e s w o r t h L. A.** 1. The flexure and torsion of an internally cracked shaft. *Proc. Roy. Soc.*, ser. A, vol. 170, 1930, p. 365—390.
2. Flexure and torsion of a circular shaft with two cracks. *Proc. London Math. Soc.*, 1940, vol. 47, ser. 2, p. 20—37.
  3. Stress distribution in a notched plate. *Mathematika*, 1957, vol. 4, No. 7, p. 76—96.
  4. Stress relief in a cracked plate. *Mathematika*, 1958, vol. 5, No. 1, p. 67—81.
- W i l l i a m s M. L.** 1. Surface stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates under bending. *Proc. First U. S. Nat. Congr. Appl. Mech.* 1952, p. 325—329.
2. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *J. Appl. Mech.*, 1952, vol. 19, No. 4, p. 526, см. дискуссию там же, 1953, т. 20, № 4.
  3. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *J. Appl. Mech.*, 1957, vol. 24, p. 109—114.
  4. The stresses around a fault or crack in dissimilar media. *Bull. Seismol. Soc. of America*, 1959, April, vol. 49, p. 119—204.
  5. The bending stress distribution at the base of a stationary crack. *J. Appl. Mech.*, 1961, vol. 28, No. 1, p. 78—82.
  6. Some observations regarding the stress field near the point of a crack. *Proc. Crack Propagation Symp. Cranfield*, 1962, No. 1.
  7. The fracture of viscoelastic material. *Fracture of Metals. Proc. Internat. Congr. Metallurg.*, 1963.
- W i l l i a m s M. L., Owens R. H.** 1. Stress singularities in angular corners of plates having linear flexural rigidities for various boundary conditions. *Proc. Second U. S. Nat. Congr. Appl. Mech.* June 1954, p. 407—411.
- W i l l i a m s J. G., Turner C. E.** 1. The plastic instability viewpoint of crack propagation. *Appl. Mater. Res.*, 1964, vol. 3, No. 3, p. 144—147.
- W i l l i s J. R.** 1. A comparison of the fracture criteria of Griffith and Barenblatt. *J. Mech. Phys. Solids*, 1967, vol. 15, No. 3.
- W i l l m o r e T. I.** 1. The distribution of stress in the neighbourhood of a crack. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 1949, vol. 2, No. 1, p. 53—64.
- W i n n e D. H., W u n d t B. M.** 1. Application of the Griffith — Irwin theory of crack propagation to the bursting behavior of disks, including analytical and experimental studies. *Trans ASME*, 1958, vol. 80, No. 8, p. 1643—1658.
- W o l f K.** 1. Zur Bruchtheorie von A Griffith. *ZAMM*, 1923, Bd. 3, No. 2, s. 107—112.
- Y o k o b o r i T., Ichikawa M.** 1. Fracture of crystalline solids with a infinite row at collinear cracks as a result of plastic flow. *Internat. J. Fracture Mech.*, 1965, vol. 1, No. 3, p. 207—223.
- Y o k o b o r i T., T n a k a M.** 1. A note of the plastic zone size ahead of the propagating fatigue crack. *Internat. J. Fracture Mech.*, 1966, vol. 2, No. 3, p. 564—566.
- Z a k A. R., Williams M. L.** 1. Crack point stress singularities at a bi-material interface. *J. Appl. Mech.*, vol. 30, 1963, No. 1, p. 142.