

5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973.
6. Дудолодов Л. С. О термическом разрушении горных пород. — ФТПРПИ, 1969, № 2.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. М.: Наука, 1969.
8. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964.
9. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.

УДК 539.374

ОДИН КЛАСС ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ СТАТИКИ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ

А. И. Димов, А. Ф. Ревуженко
(Новосибирск)

Сыпучая среда отличается от идеально пластической наличием внутреннего трения. В предельном состоянии наибольшее касательное напряжение τ связано с нормальным напряжением условием Кулона

$$(1) \quad \tau = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \sin \rho + k \cos \rho,$$

где ρ — угол внутреннего трения; k — сцепление; σ_1, σ_2 — главные напряжения. Условие (1) замыкает уравнения равновесия. Это позволяет ставить и решать статически определимые задачи. Идеально пластическая среда получается как частный случай при $\rho \rightarrow 0$. Система уравнений равновесия с (1) принадлежит к гиперболическому типу [1]. Как в любой классической модели, большой интерес представляет поиск точных решений, которые можно представить в замкнутой форме и исследовать до конца. Одним из фундаментальных точных решений является решение типа централизованной волны [1, 2], полученное как предельный случай решений, в которых одно из семейств линий скольжения представляет собой прямые. Посмотрим на это решение с несколько иной точки зрения, а именно: централизованный пучок прямолинейных характеристик будем рассматривать как радиусы полярной системы координат. Тогда решение полностью характеризуется единственным и очень простым условием $\delta \equiv \pi/2 - \rho = \text{const}$, где δ — угол между линией скольжения и полярным радиусом. Такая интерпретация сразу приводит к идее найти новые решения на пути обобщения условия $\delta \equiv \pi/2 - \rho = \text{const}$ [3]. Прежде всего необходимо вывести одно уравнение, в котором фигурировал бы только угол δ . (По крайней мере, известно, что $\delta \equiv \pi/2 - \rho$ будет являться точным решением этого уравнения.)

Первый вопрос, который возникает при этом — какие две переменные необходимо взять в качестве независимых? Так как угол δ связывает положение линии скольжения и полярного радиуса, то за независимые переменные естественно принять полярные радиус r и угол θ . На этом пути получаются известные точные решения [4]. Другой путь состоит в переходе к характеристическим координатам λ_1, λ_2 и выводу уравнения относительно δ в этих координатах. Замкнутая система в переменных λ_1, λ_2 имеет вид

$$(2) \quad \cos \rho \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_1} + 2\sigma \sin \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \cos \rho \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_2} - 2\sigma \sin \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2} = 0,$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \lambda_1} = \text{tg} \left(\varphi - \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} \right) \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial \lambda_2} = \text{tg} \left(\varphi + \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2} \right) \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_2},$$

где φ — угол наклона наибольшего главного напряжения к оси Ox_1 ; $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2)/2 - k \text{ctg} \rho$; x_1, x_2 — декартовы координаты.

Интегрируя первые два уравнения, получим

$$(3) \quad \varphi = \Phi_1(\lambda_1) + \Phi_2(\lambda_2), \ln|\sigma| = 2 \operatorname{tg} \rho [\Phi_2(\lambda_2) - \Phi_1(\lambda_1)],$$

где Φ_1, Φ_2 — произвольные функции.

Из определения угла δ следует

$$(4) \quad \frac{\partial \ln r}{\partial \lambda_1} = -\operatorname{tg}(\delta - \rho) \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_1}, \quad \frac{\partial \ln r}{\partial \lambda_2} = \operatorname{ctg} \delta \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_2}.$$

Если задать произвольную функцию $\delta(\lambda_1, \lambda_2)$ или $\delta(r, \theta)$, то уравнения (4) дадут некоторую сетку линий λ_1, λ_2 с постоянным углом пересечения, равным $\pi/2 - \rho$. Вычислим в каждой точке угол наклона биссектрисы между линиями λ_1, λ_2 к оси Ox_1 . Для того чтобы эта сетка соответствовала некоторому распределению напряжений, необходимо и достаточно, чтобы угол наклона биссектрисы как функция координат λ_1, λ_2 имел вид суммы некоторых функций $\Phi_1(\lambda_1) + \Phi_2(\lambda_2)$. Последним условием легко воспользоваться благодаря простой связи углов:

$$(5) \quad \theta = \varphi - \delta + \pi/4 + \rho/2.$$

Тогда, подставляя выражение (5) для угла θ в уравнения (4), исключая r и пользуясь представлением (3), окончательно получим

$$(6) \quad -\frac{\partial^2}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \ln \left| \frac{\cos(\rho - \delta)}{\sin \delta} \right| - \Phi_2' \frac{\partial \operatorname{ctg} \delta}{\partial \lambda_1} + \Phi_1' \frac{\partial \operatorname{tg}(\rho - \delta)}{\partial \lambda_2} = 0.$$

Это нелинейное уравнение второго порядка эквивалентно исходной системе. Таким образом, задача сводится к поиску точных решений уравнения (6). Его структура такова, что допускает решение, обращающее старший член в тождественный нуль:

$$\cos(\rho - \delta) / \sin \delta = -\xi_1(\lambda_1) / \xi_2(\lambda_2),$$

где ξ_1, ξ_2 — произвольные функции.

Отсюда сразу находим угол δ как функцию λ_1, λ_2 :

$$\delta = -\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\cos \rho} \frac{\xi_2}{\xi_1} + \operatorname{tg} \rho \right) + \rho,$$

а из уравнения (6)

$$\Phi_1 = c_1 \xi_1^2 + c_2, \quad \Phi_2 = -c_1 \xi_2^2 + c_3.$$

Теперь из уравнений (3) — (5) можно получить решение всей системы в параметрическом виде относительно характеристических переменных:

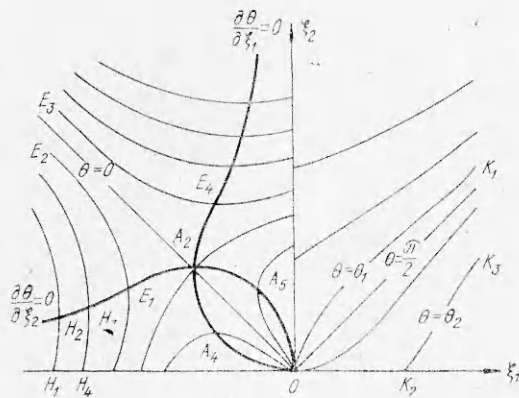
$$(7) \quad \varphi = c_1 (\xi_1^2 - \xi_2^2) + c_2 + c_3, \quad \sigma = -c_4 \exp \left[-2c_1 \operatorname{tg} \rho (\xi_1^2 + \xi_2^2) \right],$$

$$\theta = c_1 (\xi_1^2 - \xi_2^2) + \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\cos \rho} \frac{\xi_2}{\xi_1} + \operatorname{tg} \rho \right) - \frac{\rho}{2} + \frac{\pi}{4} + c_2 + c_3,$$

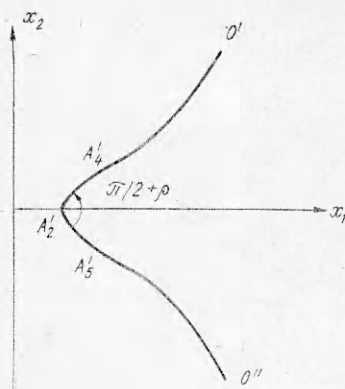
$$r = \frac{1}{\sigma^{1/2}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\cos \rho} \frac{\xi_2}{\xi_1} + \operatorname{tg} \rho \right)^2} \exp \left[\frac{c_1}{\cos \rho} (2\xi_1 \xi_2 + \sin \rho (\xi_1^2 + \xi_2^2)) + c_5 \right],$$

где $c_1 - c_5$ — постоянные интегрирования.

Таким образом, получен класс точных решений исходной системы в элементарных функциях. Видно, что характеристические переменные входят сюда только через ξ_1, ξ_2 , поэтому огромный, казалось бы, произвол в две функции в представлении (7) есть всего лишь произвол параметризации характеристик. Следовательно, в качестве параметров можно взять переменные ξ_1, ξ_2 . Не ограничивая общности, можно положить $c_2 + c_3 = 0$, эти постоянные выражают произвол выбора начала отсчета углов, $c_5 = 0$ и $|c_1| = 1$, так как изменение этих констант соответствует преобразованию растяжения пространственных переменных и параметров ξ_1, ξ_2 . В итоге имеем два класса решений, отвечающих значению $c_1 = +1$ или



Ф и г. 1



Ф и г. 2

$c_1 = -1$. Далее будем рассматривать только последний случай, так как решение при $c_1 = +1$ аналогично.

Чтобы отображение $(\xi_1, \xi_2) \rightarrow (x_1, x_2)$ было взаимно-однозначным, необходимо $\Delta = \partial(r, \theta)/\partial(\xi_1, \xi_2) \neq 0$ всюду в отображаемой области переменных (ξ_1, ξ_2) . В силу уравнений (2) условие $\Delta = 0$ эквивалентно $(\partial\theta/\partial\xi_1)(\partial\theta/\partial\xi_2) = 0$.

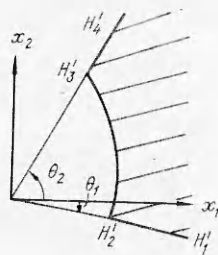
$$\text{Линия } \frac{\partial\theta}{\partial\xi_1} = 0 \text{ суть } \zeta^2 = -\frac{\cos\rho}{2} \frac{\operatorname{tg} v}{1 + \sin\rho \sin 2v},$$

$$\text{линия } \frac{\partial\theta}{\partial\xi_2} = 0 \text{ — } \zeta^2 = -\frac{\cos\rho}{2} \frac{\operatorname{ctg} v}{1 + \sin\rho \sin 2v}.$$

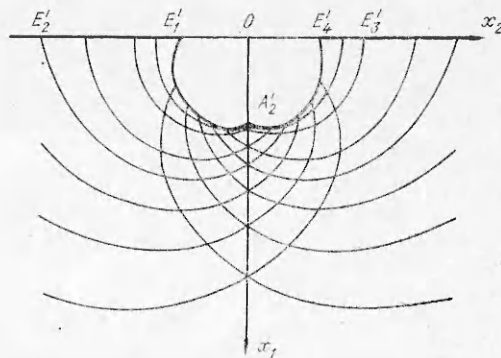
Линии симметричны относительно биссектрисы второго квадранта. Здесь (ζ, v) — полярные координаты в плоскости параметров (ξ_1, ξ_2) (фиг. 1). Кроме того, для взаимной однозначности необходимо, чтобы приращение угла θ в области было меньше 2π . На фиг. 1 изображены линии уровня $\theta = \text{const}$ в плоскости (ξ_1, ξ_2) . Отметим, что решения, симметричные на плоскости параметров относительно линии $v = \pi/4$, будут симметричны относительно оси Ox_2 физической плоскости. Аналогично решения, симметричные относительно прямой $v = 3\pi/4$, на физической плоскости будут симметричны относительно оси абсцисс Ox_1 .

Кроме того, можно показать, что линия $\partial\theta/\partial\xi_i = 0$ ($i = 1, 2$) на плоскости (x_1, x_2) будет множеством точек возврата i -го семейства линий скольжения и огибающей другого семейства. Поэтому, если граница отображаемой области есть линия $\Delta = 0$, на ней выполнено условие предельного равновесия $\tau_\alpha = -\sigma_\alpha \operatorname{tg} \rho + k$, где σ_α , τ_α — нормальное и касательное напряжения на границе.

Рассмотрим образ области $OA_4A_2A_5O$ (см. фиг. 1) на физической плоскости (фиг. 2). Здесь всюду приращение θ меньше 2π . Образ $O'A'_4A'_2A'_5O''$



Ф и г. 3



Ф и г. 4

имеет вид клина с углом раствора $\pi/2 + \rho$. Участок границы $A_2'A_4'$ обращен выпуклостью вверх, $A_4'O'$ — вниз, решение симметрично относительно оси Ox_1 . На границе выполнено условие предельного равновесия, на бесконечности $\varphi \rightarrow 0$, $\sigma \rightarrow -c_4$,

$$\sigma_{11} \rightarrow -c_4(1 - \sin \rho) + k \operatorname{ctg} \rho, \quad \sigma_{12} \rightarrow 0, \quad \sigma_{22} \rightarrow -c_4(1 + \sin \rho) + k \operatorname{ctg} \rho.$$

Область $H_1H_2H_3H_4$ (см. фиг. 1), где H_1H_2 — линия $\theta = \theta_1 = \operatorname{const}$, H_3H_4 — линия $\theta = \theta_2 = \operatorname{const}$, отображается на клин с углом раствора $\theta_2 - \theta_1$ и вырезанной вершиной (фиг. 3).

На участке границы $H_2'H_3'$ выполняется условие предельного равновесия. Этот участок при достаточно больших по модулю абсциссах точек H_1 , H_4 близок к дуге логарифмической спирали, которая при $\rho \rightarrow 0$ стремится к дуге окружности.

Теперь рассмотрим область $A_2E_1E_2E_3E_4A_2$ (см. фиг. 1). Здесь E_1E_2 — линия $\theta = -\pi/2$, E_3E_4 — линия $\theta = \pi/2$. Решение представляет собой полуплоскость с вырезом (фиг. 4), участок границы $E_1'A_2'E_4'$ является огибающей линий скольжения. К его сторонам $E_1'A_2'$ и $A_2'E_4'$ примыкают области в виде рожков, ограниченные с внешней стороны огибающей, с внутренней — линией скольжения. Похожие решения (по Гартману) для случая идеальной пластичности ($\rho = 0$) описаны в [5].

В точке A_2' граница области имеет излом величиной $\pi/2 + \rho$. На участке $E_1'A_2'E_4'$ достигается максимальное касательное напряжение. На бесконечности $\delta \rightarrow \rho/2 + \pi/4$, $\varphi \rightarrow \theta$, $\sigma \rightarrow -\infty$.

Наконец, рассмотрим отображение областей в первом квадранте, где всюду $\Delta \neq 0$. Остается только одно условие: приращение θ в области должно быть меньше 2π . Возьмем в качестве отображаемой область $OK_1K_3K_2O$ (см. фиг. 1), границами которой являются линии $\theta = \operatorname{const}$. Она, очевидно, отображается на клин. На бесконечности $\sigma \rightarrow -c_4$, $\varphi \rightarrow \theta - \pi/2$.

Поступила 18 V 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. М.: Физматгиз, 1960.
2. Прандтль Л. О твердости пластических материалов и сопротивлении резанию. — В кн.: Теория пластичности/Под ред. Ю. Н. Работнова. М.: ИЛ, 1948.
3. Ревуженко А. Ф. Один класс точных решений уравнений идеальной пластичности. — ПМТФ, 1975, № 2.
4. Nadai A. Über die Gleit und Verzweigungsflächen einiger Gleichgewichtszustände Bildsamer Massen und die Nachspannungen Bleibend verzerrter Körper. — Z. für Phys., 1924, N 30.
5. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М.: Мир, 1969.