

УДК 533.72:535.21

В.Г. Черняк, И.В. Чермянинов, Е.А. Вилисова,
Е.А. Субботин

СВЕТОИНДУЦИРОВАННЫЙ ДРЕЙФ ОДНОКОМПОНЕНТНОГО ГАЗА В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Явление объемного светоиндуцированного дрейфа (СИД), предсказанное в [1], состоит в том, что частицы, поглощающие излучение в виде бегущей монохроматической волны и находящиеся в смеси с буферным газом, приобретают направленное движение. В [2] обоснована возможность СИД однокомпонентного газа при условии, что возбужденные и невозбужденные частицы по-разному взаимодействуют с граничной поверхностью — поверхностный СИД. Этот механизм использовался в [3] для оценки гидродинамического режима СИД в каналах.

В [4, 5] рассчитывалось светоиндуцированное скольжение однокомпонентного газа (кнудсеновский слой). Предсказан новый механизм СИД, который можно назвать столкновительным, так как он обязан своим существованием различию сечений столкновения возбужденных и невозбужденных частиц. Столкновительный СИД возможен только в ограниченном газе. В определенном смысле он аналогичен диффузионному скольжению изотопической газовой смеси. Этот механизм использовался в [6] для численного расчета профилей скорости и потока тепла в плоском канале для некоторых значений определяющих параметров.

В данной работе представлены результаты расчета СИД однокомпонентного газа в плоском канале при произвольных числах Кнудсена K_n с учетом как поверхностного, так и столкновительного механизма. Основная трудность такого расчета связана с необходимостью решения кинетического уравнения Больцмана или его моделей при промежуточных значениях K_n , что является фундаментальной задачей кинетической теории газов. Здесь используются три метода решения кинетического уравнения с аппроксимирующим интегралом столкновений: метод дискретных ординат, интегрально-моментный метод и смешанный интегродифференциальный моментный метод. Сравнение полученных результатов позволяет оценить эффективность каждого из этих методов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим установившееся движение однокомпонентного газа между параллельными пластинами, расположенными в $X = \pm d/2$, под действием резонансного оптического излучения, распространяющегося в направлении оси Z вдоль канала. Предполагаем, что расстояние между пластинами много меньше их длины и ширины, т.е. движение газа одномерное.

Ограничимся моделью двухуровневых частиц, причем нижний уровень n соответствует основному состоянию, а верхний уровень m — возбужденному. Пусть частота излучения ω близка к частоте ω_{mn} электронного или колебательно-вращательного перехода $m-n$. Вследствие эффекта Доплера с излучением взаимодействуют частицы лишь со скоростями, близкими к резонансной v_p , которая удовлетворяет условию $kv_p = \Omega = \omega - \omega_{mn}$ (k — волновой вектор). Поглотившие излучение частицы изменяют транспортное

сечение столкновений. Тогда поглощающий газ можно рассматривать как бинарную газовую смесь, в которой частицы имеют одинаковые массы и различные сечения столкновений.

В этом случае функции распределения возбужденных f_m и невозбужденных f_n частиц удовлетворяют системе двух кинетических уравнений [7]:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} v_x \frac{\partial f_m}{\partial X} &= \frac{1}{2} \kappa(v_z) \Gamma_m (f_n - f_m) - \Gamma_m f_m + S_m, \\ v_x \frac{\partial f_n}{\partial X} &= -\frac{1}{2} \kappa(v_z) \Gamma_m (f_n - f_m) + \Gamma_m f_m + S_n. \end{aligned}$$

Здесь

$$(1.2) \quad \kappa(v_z) = \frac{4 |g_{mn}|^2 \Gamma}{\Gamma_m [\Gamma^2 + (\Omega - kv_z)^2]}, \quad g_{mn} = \frac{E_0 d_{mn}}{2\hbar},$$

Γ_m — частота радиационного распада возбужденного состояния; Γ — однородная полуширина линии поглощения; S_m, S_n — больцмановские интегралы столкновений; E_0 — амплитуда электрического поля; d_{mn} — матричный элемент дипольного момента резонансного перехода $n-m$; $\kappa(v_z)$ — параметр насыщения, характеризующий вероятность индуцированных переходов (пропорционален интенсивности излучения I); \hbar — постоянная Планка.

Если вероятность индуцированных переходов мала, что имеет место при малых интенсивностях излучения, то состояния компонентов газовой смеси являются слабонеравновесными и функции распределения записываются в виде малых возмущений максвелловских распределений:

$$(1.3) \quad f_i = f_{i0} [1 + h_i(X, v)] \quad (i = n, m),$$

$$f_{i0} = n_{i0} \left(\frac{m_0}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_0 v^2}{2k_B T} \right)$$

(n_{i0} — равновесная числовая плотность i -го компонента, T — температура газа, k_B — постоянная Больцмана).

Полагаем, что межатомные столкновения упругие. При этом каждая из частот столкновений $\gamma_i = \gamma_{ii} + \gamma_{ij}$ (γ_{ii} и γ_{ij} — эффективные частоты упругих столкновений частиц i -го сорта с частицами i -го и j -го сорта соответственно) много больше частоты радиационного распада Γ_m , т.е. $\Gamma_{mi} = \Gamma_m / \gamma_i \ll 1$.

Кинетические уравнения (1.1), линеаризованные относительно функций возмущения h_i и параметров Γ_{mi} , с использованием аппроксимирующих интегралов столкновений второго порядка в форме Мак-Кормака [8] после обезразмеривания принимают вид

$$(1.4) \quad \begin{aligned} c_x \frac{\partial h_i}{\partial x} &= \delta_i \left\{ \frac{1}{2} \kappa(v_z) \Gamma_{mi} \left(\frac{n_{j0} - n_{i0}}{n_{i0}} \right) + 2c_z [u_i - \varphi_{ij}^{(1)}(u_i - u_j)] + \right. \\ &\left. + 4c_x c_z [(1 - \varphi_{ii}^{(3)} + \varphi_{ii}^{(4)} - \varphi_{ij}^{(3)}) \pi_{ixz} + \varphi_{ij}^{(4)} \pi_{jxz}] - h_i \right\}, \quad (i, j) = n, m, \quad i \neq j, \end{aligned}$$

где

$$(1.5) \quad \begin{aligned} x &= \frac{X}{d}, \quad \delta_i = \gamma_i \frac{d}{v}, \quad \bar{v} = \left(\frac{2k_B T}{m_0} \right)^{1/2}, \quad c = \frac{v}{\bar{v}}, \\ \varphi_{ij}^{(n)} &= \frac{v_{ii}^{(n)}}{\gamma_i}, \quad u_i = \frac{U_i}{\bar{v}} = \int c_z E h_i dc, \\ \pi_{ixz} &= \frac{P_{ixz}}{2p_i} = \int c_x c_z E h_i dc, \quad E = \pi^{-3/2} \exp(-c^2); \end{aligned}$$

U_i, P_{ikz}, p_i — парциальные скорость, тензор напряжений и давление i -го компонента соответственно; выражения для частот $\nu_{ij}^{(n)}$ через Ω -интегралы Чепмена—Каулинга приведены в [8]; δ_i — параметр разреженности, обратно пропорциональный Кп.

Ограничимся рассмотрением упругих столкновений атомов с поверхностью и воспользуемся зеркально-диффузной моделью граничных условий, согласно которой доля ϵ_i частиц i -го сорта рассеивается стенками канала диффузно, а доля $(1 - \epsilon_i)$ — зеркально. Линеаризованные с учетом (1.3) граничные условия для функций возмущения запишутся в виде

$$(1.6) \quad h_i(x = \mp 1/2, c_x \geq 0) = \epsilon_i v_r + (1 - \epsilon_i) h_i(x = \mp 1/2, c_x \leq 0).$$

Здесь $v_{ir} = (n_{ir} - n_{i0})/n_{i0}$ — возмущение числовой плотности n_{ir} частиц i -го сорта, рассеянных диффузно; ϵ_i — доля диффузно рассеянных частиц (в общем случае $\epsilon_m \neq \epsilon_n$).

При одинаковых аккомодационных свойствах поверхностей канала очевидны условия симметрии:

$$(1.7) \quad h_i(x = \mp 1/2, c_x \leq 0) = h_i(x = \pm 1/2, c_x \geq 0).$$

Наибольший интерес представляет расчет усредненного по поперечному сечению канала макроскопического потока газа, который определяется выражением

$$(1.8) \quad J = J_m + J_n = \bar{v} \int_{-1/2}^{+1/2} (n_n u_n + n_m u_m) dx.$$

Важное следствие предположения о малой вероятности индуцированных переходов состоит в том, что концентрация возбужденных частиц много меньше концентрации невозбужденных. Таким образом, в теории появился еще один малый параметр $(n_{m..}/n_n) \ll 1$. Поэтому было бы целесообразно оценить все величины, содержащиеся в кинетических уравнениях (1.4), и сохранить лишь те, которые имеют основной порядок по отношению к малому параметру $n_{m..}/n_n$.

Если бы возбужденные и невозбужденные частицы имели одинаковые сечения столкновений и одинаково взаимодействовали с поверхностью канала, то СИД бы отсутствовал, т.е.

$$n_n U_n + n_m U_m = 0.$$

Кроме того, из закона сохранения импульса следует, что полный тензор касательных напряжений в газе равен нулю (см. соотношения (4.1), (4.2)):

$$n_n \pi_{nxz} + n_m \pi_{mxz} = 0.$$

Таким образом, очевидно, что

$$(u_n, \pi_{nxz}, h_n) \sim \frac{n_m}{n_n} (u_m, \pi_{mxz}, h_m).$$

Для удобства оценки всех членов кинетических уравнений (1.4) и дальнейших расчетов введем функции

$$(1.9) \quad \Phi_i(x, c_x) = \frac{\alpha_i}{\pi \Gamma_{mi} \delta_i \kappa} \int_{-\infty}^{+\infty} h_i(x, c) \exp(-c_y^2 - c_z^2) c_z dc_y dc_z,$$

где

$$(1.10) \quad \alpha_n = 1, \alpha_{m..} = \frac{n_m}{n_n}, \kappa = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} c_z \exp(-c_z^2) \kappa(c_z) dc_z.$$

Введем также новые функции для парциальных макроскопических скоростей и касательных напряжений:

$$(1.11) \quad w_i(x) = \frac{\alpha_i U_i(x)}{\kappa \Gamma_m \delta_i} = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_i(x, c_x) \exp(-c_x^2) dc_x, \quad i = m, n,$$

$$t_i(x) = \frac{\alpha_i \pi_{i,x}(x)}{\kappa \Gamma_m \delta_i} = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_i(x, c_x) \exp(-c_x^2) c_x dc_x.$$

Если пренебречь членами порядка n_m/n_n , то кинетические уравнения (1.4) для возбужденного и невозбужденного состояний с учетом выражений (1.9)—(1.11) преобразуются:

$$(1.12) \quad c_x \frac{\partial \Phi_m}{\partial x} = \frac{1}{2} + \delta_m (1 - \varphi_{mn}^{(1)}) w_m + 2\delta_m c_x (1 - \varphi_{mn}^{(3)}) t_m - \delta_m \Phi_m;$$

$$(1.13) \quad c_x \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} = -\frac{1}{2} + \delta_n w_n + \delta_m \varphi_{mn}^{(1)} w_m + 2\delta_n c_x (1 - \varphi_{nn}^{(3)} + \varphi_{nn}^{(4)}) t_n + 2\delta_m c_x \varphi_{mn}^{(2)} t_m - \delta_n \Phi_n.$$

В уравнениях (1.12), (1.13) учтено, что интенсивность излучения однородна по поперечному сечению канала и, следовательно, величина κ не зависит от координаты x .

Граничные условия и условия симметрии для функций Φ_i с учетом выражений (1.6), (1.7) и (1.9) имеют вид

$$(1.14) \quad \Phi_i(x = +1/2, c_x \geq 0) = (1 - \varepsilon_i) \Phi_i(x = \mp 1/2, c_x \leq 0);$$

$$(1.15) \quad \Phi_i(x = \mp 1/2, c_x \geq 0) = \Phi_i(x = \pm 1/2, c_x \leq 0).$$

В (1.14) учтено, что первое слагаемое в правой части выражения (1.6) не дает вклада в макроскопический поток газа и поэтому может быть опущено.

Введем безразмерную величину G , связанную с макроскопическим потоком газа (1.8) выражением

$$(1.16) \quad G = \frac{2\pi^{1/2} J}{n \kappa \Gamma_m d} = G_m + G_n,$$

$$G_i = 2 \int_{-1/2}^{+1/2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-c_x^2) \Phi_i(x, c_x), \quad i = m, n$$

($n = n_n + n_m$ — полное число молекул в единице объема).

Известно, что при движении газов в капиллярах коэффициенты аккомодации близки к единице [9], а относительное различие эффективных диаметров возбужденных σ_m и невозбужденных σ_n частиц мало [10], т.е.

$$(1.17) \quad (1 - \varepsilon_i) \ll 1, \quad \Delta\sigma/\sigma_n \ll 1, \quad \Delta\sigma = \sigma_m - \sigma_n.$$

Дополнительное введение в теорию малых параметров (1.17) после соответствующей линеаризации задачи позволяет разделить поверхностный и столкновительный механизмы СИД. Функции, характеризующие профиль скорости и усредненный по поперечному сечению канала расход газа, преобразуются к виду

$$(1.18) \quad w(x) = w_1(x) \Delta\varepsilon + w_2(x) \frac{\Delta\sigma}{\sigma_n}, \quad \Delta\varepsilon = \varepsilon_n - \varepsilon_m,$$

$$G = G_1 \Delta\varepsilon + G_2 \frac{\Delta\sigma}{\sigma_n}.$$

Кинетические коэффициенты G_1 и G_2 , характеризующие вклад в величину СИД поверхностного и столкновительного механизмов соответственно, зависят только от параметра разреженности $\delta_n \equiv \delta$. Таким образом, учет соотношений (1.17) привел к существенному сокращению числа задаваемых расчетных параметров и тем самым к уменьшению объема вычислений.

Вследствие неравенств (1.17) и $n_m \ll n_n$ имеем

$$(1.19) \quad \theta = \frac{\delta_m}{\delta_n} = \frac{\gamma_{mn}}{\gamma_{nn}} = \frac{\sigma_{mn}^2}{\sigma_n^2} \approx 1 + \frac{\Delta\sigma}{\sigma_n}, \quad \sigma_{mn} = \frac{1}{2}(\sigma_m + \sigma_n), \quad \delta_n \equiv \delta.$$

Если эффективную частоту столкновений типа $n-n$ выбрать по аналогии с моделью БГК в виде $\gamma_{nn} = p/\eta$, а коэффициент вязкости положить равным $\eta = \rho\bar{v}l\pi^{-1/2}$ (l — средняя длина свободного пробега молекул в газе), тогда параметр разреженности δ связан с числом Кнудсена $Kn = l/d$ соотношением $\delta = \pi^{1/2}/(2Kn)$.

Величина κ (1.10) при любых значениях параметров $\Gamma/(k_B\bar{v})$ и $\Omega/(k_B\bar{v})$ выражается через плазменную функцию [11], а в случаях неоднородного ($\Gamma \ll k_B\bar{v}$) и однородного ($\Gamma \gg k_B\bar{v}$) уширений имеет вид

$$(1.20) \quad \kappa = \begin{cases} \frac{4\pi^{1/2}\Omega}{\Gamma_m} \left(\frac{|g_{mn}|}{k\bar{v}} \right)^2, & (|\Omega|, \Gamma) \ll k_B\bar{v}, \\ \frac{4k\bar{v}\Omega\Gamma}{\Gamma_m} \left(\frac{|g_{mn}|}{\Omega^2 + \Gamma^2} \right)^2, & (|\Omega|, \Gamma) \gg k_B\bar{v}. \end{cases}$$

Таким образом, решение кинетических уравнений (1.12), (1.13) с учетом граничных условий (1.14) и условий симметрии (1.15) дает возможность определить величины поверхностной (w_1, G_1) и столкновительной (w_2, G_2) составляющих СИД в зависимости от параметра разреженности δ .

2. Метод дискретных ординат (МДО). Этот метод основан на том, что пространство скоростей молекул считается дискретным, т.е. предполагается, что молекулы газа могут двигаться только с некоторыми фиксированными скоростями. Набор дискретных значений скоростей молекул образует узлы расчетной сетки.

Каждое из уравнений (1.12), (1.13) аппроксимируется системой кинетических уравнений, соответствующих узлам c_{xq} расчетной сетки в пространстве скоростей. Для решения этих уравнений, в свою очередь, применяется метод конечных разностей, в котором частные производные по координате x заменяются конечными разностями. В результате имеем расчетные сетки с узлами c_{xq} ($q = 1, 2, \dots, N^x$) в пространстве скоростей и x_k ($k = 0, 1, 2, \dots, N^x$) в конфигурационном пространстве. Затем уравнения решаются путем последовательных приближений (итераций). Порядок приближения обозначается индексом p .

Для молекулярной модели твердых сфер получим разностные схемы, аппроксимирующие уравнения (1.12), (1.13) в виде

$$(2.1) \quad c_{x\bar{l}} \frac{\Phi_{nk}^{(p)} - \Phi_{n,k-1}^{(p)}}{\Delta x} + \delta \Phi_{nk}^{(p)} = -\frac{1}{2} + \delta \left[w_{nk}^{(p-1)} + \frac{5}{6} \theta w_{mk}^{(p-1)} + \frac{2}{3} c_{xq} f_{mk}^{(p-1)} \theta \right],$$

$$c_{xq} \frac{\Phi_{mk}^{(p)} - \Phi_{m,k-1}^{(p)}}{\Delta x} + \delta \Phi_{mk}^{(p)} \theta = \frac{1}{2} + \delta \left[\frac{1}{6} \theta w_{mk}^{(p-1)} - \frac{2}{3} c_{xq} f_{mk}^{(p-1)} \theta \right],$$

где

$$(2.2) \quad w_{ik}^{(p)} = \pi^{-1/2} \sum_q^{N^c} \Phi_{ik}^{(p)}(x_k, c_{xq}) \exp(-c_{xq}^2) \Delta c_x, \quad i = n, m,$$

$$f_{mk}^{(p)} = \pi^{-1/2} \sum_q^{N^c} \Phi_{mk}^{(p)}(x_k, c_{xq}) \exp(-c_{xq}^2) c_{xq} \Delta c_x;$$

$\Phi_{ikq}^{(p)} = \Phi_i(x_k, c_{xq})$ в p -м приближении ($i = n, m$); $\Delta x, \Delta c_x$ — длины отрезков разбиения соответствующей расчетной сетки.

Граничные условия (1.14) преобразуются следующим образом:

$$(2.3) \quad \Phi_i^{(p)}(x = +1/2, c_{xq} \geq 0) = (1 - \varepsilon_i) \Phi_i^{(p-1)}(x = +1/2, c_{xq} \leq 0), \\ i = n, m.$$

Из (2.1) видно, что возмущения распределений m - и n -частиц в точке (c_{xq}, x_k) являются функциями

$$\Phi_{mk}^{(p)} = F_m(\Phi_{m,k-1}^{(p)}, w_{mk}^{(p-1)}, f_{mk}^{(p-1)}), \\ \Phi_{nk}^{(p)} = F_n(\Phi_{n,k-1}^{(p)}, w_{nk}^{(p-1)}, f_{nk}^{(p-1)}).$$

Тогда, принимая в нулевом приближении ($p = 0$) некоторые (вообще говоря, произвольные) профили макроскопической скорости и тензора напряжений и задавая граничные условия (2.3) на поверхности, можем получить значения возмущений Φ_n и Φ_m в любом p -м приближении во всех узлах x_k :

$$(2.4) \quad \Phi_{mk}^{(p)} = \frac{\Phi_{m,k-1}^{(p)} c_{xq} + \frac{\Delta x}{2} + \delta \Delta x \left(\frac{1}{6} w_{mk}^{(p-1)} \theta - \frac{2}{3} \theta c_{xq} f_{mk}^{(p-1)} \right)}{c_{xq} + \Delta x \delta \theta}, \\ \Phi_{nk}^{(p)} = \frac{\Phi_{n,k-1}^{(p)} c_{xq} - \frac{\Delta x}{2} + \delta \Delta x \left(w_{nk}^{(p-1)} + \frac{5}{6} \theta w_{mk}^{(p-1)} + \frac{2}{3} \theta c_{xq} f_{mk}^{(p-1)} \right)}{c_{xq} + \Delta x \delta}.$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока разница в значениях возмущений в $(p-1)$ -м и p -м приближениях не станет меньше некоторой наперед заданной величины. В данной работе точность по итерациям задавалась равной 10^{-6} .

В качестве нулевого приближения выбрано равновесное состояние газа, когда

$$w_{ik}^{(0)} = 0, f_{mk}^{(0)} = 0, i = m, n, k = 0, \dots, N^x.$$

Рассматривался интервал безразмерных скоростей молекул c_x [-5; 5]. Слагаемые с $|c_x| > 5$ не вносят существенного вклада в величины (2.2). Использовались равномерная и неравномерная сетки в пространстве скоростей. Выбор количества узлов сеток таков, что их увеличение приводит к изменению результата расчета не более чем на 0,1 %. Равномерная сетка в пространстве скоростей применялась для расчетов при $\delta \leq 0,1$ и содержала $N^x = 1000$ узлов. Для расчетов при $\delta > 0,1$ удобна неравномерная сетка, состоящая из 11 узлов Гаусса. Отрезок $[-1/2; 0]$ по оси x разбивался на $N^x = 200$ частей для $\delta < 0,1$ и на $N^x = 300$ частей для $\delta \geq 0,1$.

Вначале вычислялись значения функций возмущения в узлах x_k конфигурационного пространства. Затем по формулам (2.2) находились профили макроскопических величин, а также усредненное по сечению значение скорости.

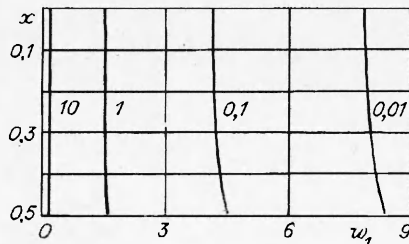


Рис. 1

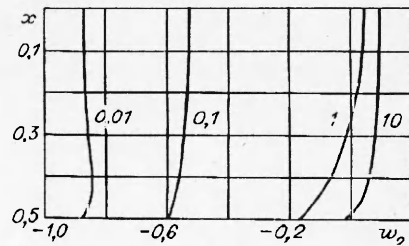


Рис. 2

δ	МДО		ИММ		ИДММ	
	G_1	$G_2 \cdot 10^{-1}$	G_1	$G_2 \cdot 10^{-1}$	G_1	$G_2 \cdot 10^{-1}$
0,01	8,006	-8, 623	8,016	-8,687	8,016	-8,686
0,04	5,633	-7,091	5,634	-7,091	5,634	-7,091
0,1	4,248	-5,438	4,227	-5,441	4,227	-5,441
0,4	2,475	-2,187	2,410	-2,222	2,410	-2,222
1	1,536	-0,115	1,441	-0,220	1,441	-0,220
2	0,962	0,886	0,868	0,711	0,868	0,713
3	0,694	1,127	0,614	0,931	0,613	0,935
4	0,539	1,111	0,472	0,956	0,470	0,963
5	0,438	1,105	0,382	0,918	0,380	0,928
6	0,368	1,037	0,321	0,860	0,318	0,874
10	0,223	0,775	0,196	0,642	0,191	0,666
15	0,150	0,576	0,133	0,468	0,126	0,498
20	0,114	0,450	0,101	0,365	0,094	0,397

Профили скорости СИД при различных значениях параметра разреженности δ_n показаны на рис. 1, 2. Результаты расчета величин G_1 и G_2 , входящих в выражение (1.18), приведены в таблице.

3. Интегрально-моментный метод (ИММ). Суть его состоит в преобразовании аппроксимирующих кинетических уравнений в замкнутую систему интегральных уравнений для моментов функции распределения.

Уравнения (1.12), (1.13) с учетом граничных условий (1.14) и условий симметрии (1.15) записываются в интегральной форме, затем с использованием выражений (1.11) преобразуются в замкнутую систему четырех интегральных уравнений для парциальных скоростей w_i и напряжений t_i [12]:

$$(3.1) \quad w_i(x) = \int_{-1/2}^{+1/2} [A_i(s)K_{1i}(x, s) + B_i(s)K_{2i}(x, s)] ds;$$

$$(3.2) \quad t_i(x) = \int_{-1/2}^{+1/2} [A_i(s)K_{2i}(x, s) + B_i(s)K_{3i}(x, s)] ds, \quad i = m, n.$$

Здесь

$$A_m(s) = \frac{1}{2\pi} + \delta_m \pi^{-1/2} (1 - \varphi_{mn}^{(1)}) w_m(s),$$

$$B_m(s) = 2\delta_m \pi^{-1/2} (1 - \varphi_{mn}^{(3)}) t_m(s),$$

$$A_n(s) = \pi^{-1/2} \left[-\frac{1}{2\pi^{1/2}} + \delta_n w_n(s) + \delta_m \varphi_{mn}^{(1)} w_m(s) \right],$$

$$B_n(s) = 2\pi^{-1/2} [\delta_n (1 - \varphi_{nn}^{(3)} + \varphi_{nn}^{(4)}) t_n(s) + \delta_m \varphi_{mn}^{(4)} t_m(s)];$$

при $(1 - \varepsilon_i) \ll 1$ имеем

$$K_{1i}(x, s) = I_{-1}(z_i) + (1 - \varepsilon_i) [I_{-1}(z_{1i}) + I_{-1}(z_{2i})],$$

$$K_{2i}(x, s) = I_0(z_i) \text{sign}(x - s) + (1 - \varepsilon_i) [I_0(z_{1i}) + I_0(z_{2i})],$$

$$K_{3i}(x, s) = I_1(z_i) + (1 - \varepsilon_i) [I_1(z_{1i}) + I_1(z_{2i})],$$

$$z_i = \delta_i |x - s|, \quad z_{1i} = \delta_i (x - s + 1), \quad z_{2i} = \delta_i (s - x + 1),$$

$$I_n(x) = \int_0^\infty c^n \exp\left(-c^2 - \frac{x}{c}\right) dc.$$

Интегральные уравнения (3.1), (3.2) фредгольмовского типа 2-го рода могут быть решены методом Бубнова — Галеркина [13]. В отличие от МДО он не позволяет вычислять профили скорости и напряжений, но при удачном выборе пробных функций для макропараметров обеспечивает быструю схо-

димность и удовлетворительную точность для усредненного по сечению канала расхода газа при любых значениях K_p .

Свободные члены уравнений (3.1), (3.2) включают свободномолекулярные значения ($K_p \gg 1$) скорости и напряжений. Поэтому выберем пробные функции, исходя из вида макропараметров в гидродинамическом режиме ($K_p \ll 1$):

$$(3.3) \quad \tilde{w}_i(x) = a_{1i} + a_{2i}x^2, \quad \tilde{v}_i(x) = a_{3i}x, \quad i = m, n$$

(a_{ki} — неизвестные постоянные).

Подставляя соотношения (3.3) в уравнения (3.1), (3.2) и требуя ортогональность полученных выражений к каждой из базовых функций ($1, x^2$ для (3.1) и x для (3.2)), получим систему алгебраических уравнений для определения постоянных a_{1i}, a_{2i}, a_{3i} . При этом условие ортогональности двух произвольных функций f и g имеет вид

$$(f, g) = \int_{-1/2}^{+1/2} f(x)g(x)dx = 0.$$

Если постоянные a_{ki} будут известны, то с учетом соотношений (1.11), (1.16) и (3.3) безразмерный расход газа определится выражением

$$(3.4) \quad G = G_m + G_n, \quad G_i = 2\pi^{1/2} \left(a_{1i} + \frac{a_{2i}}{12} \right), \quad i = m, n.$$

Производя линеаризацию полученной системы алгебраических уравнений по малым параметрам (1.17), находим выражения для кинетических коэффициентов G_1 и G_2 (1.18).

Аналитические выражения для G_1 и G_2 удастся получить лишь при больших и малых значениях K_p .

1. Почти свободномолекулярный режим ($K_p \gg 1$):

$$(3.5) \quad G_1 = -2\ln\delta, \quad G_2 = -1.$$

Тот факт, что столкновительный СИД при $\delta \rightarrow 0$ оказывается отличным от нуля, является следствием вырожденной геометрии задачи (бесконечно широкий канал). Действительно, в случае полной аккомодации при $\delta \rightarrow 0$ парциальные потоки невозбужденных и возбужденных частиц возрастают по логарифмическому закону, не достигая свободномолекулярных значений:

$$J_n \sim \ln\delta_n, \quad J_m \sim -\ln\delta_m = -\ln\delta_n - \ln\theta \approx -\ln\delta_n - \Delta\sigma/\sigma_n.$$

При суммировании парциальных потоков основные члены порядка $\ln\delta_n$ сокращаются, и столкновительный СИД оказывается отличным от нуля. Очевидно, что в случае реальной геометрии канала, например для цилиндрического капилляра [14], столкновительный СИД в свободномолекулярном режиме отсутствует.

2. Гидродинамический режим со скольжением ($K_p \ll 1$) для модели твердых сферических молекул:

$$(3.6) \quad G_1 = \frac{6\pi^{1/2}}{5\delta}, \quad G_2 = \frac{9\pi^{1/2}}{20\delta}.$$

Численные значения кинетических коэффициентов G_1 и G_2 в промежуточном режиме для молекулярной модели твердых сфер представлены в таблице.

4. Интегродифференциальный моментный метод (ИДММ). Основное отличие от ИММ состоит в том, что профили парциальных скоростей потоков возбужденных и невозбужденных частиц описываются интегральными уравнениями (3.1), а для напряжений должны быть получены дифференциальные уравнения переноса z -компоненты импульса.

Умножая уравнения (1.12), (1.13) на $\exp(-c_x^2)/\pi^{1/2}$ и интегрируя полученные выражения по молекулярным скоростям dc_x , с учетом соотношений (1.11) имеем

$$(4.1) \quad \frac{\partial t_m}{\partial x} = \frac{1}{2} - \delta_m \varphi_{mn}^{(1)} w_m;$$

$$(4.2) \quad \frac{\partial t_n}{\partial x} = -\frac{1}{2} + \delta_m \varphi_{mn}^{(1)} w_m.$$

Отметим, что из (4.1), (4.2) следует закон сохранения импульса $t_m + t_n = 0$, т.е. полный тензор касательных напряжений равен нулю.

Таким образом, интегральные уравнения (3.1) и дифференциальные (4.1), (4.2) образуют замкнутую систему уравнений, определяющих парциальные скорости $w_i(x)$ и напряжений $t_i(x)$.

При таком подходе, используя метод Бубнова — Галеркина, достаточно аппроксимировать лишь скорости $w_i(x)$, а напряжения определяются из (4.1), (4.2). Если в качестве пробных функций для $w_i(x)$ принять выражения (3.3), то, интегрируя (4.1) и (4.2) с учетом того, что на оси канала напряжения отсутствуют ($t_i(x=0) = 0$), получаем

$$(4.3) \quad \bar{t}_m = -\bar{t}_n = \left(\frac{1}{2} - \delta_m \varphi_{mn}^{(1)} a_{1m} \right) x + \frac{1}{3} a_{2m} x^3.$$

Подстановка аппроксимаций (3.3) для $w_i(x)$ и (4.3) для $t_i(x)$ в интегральные уравнения (3.1) и требование ортогональности полученных выражений к каждой базовой функции $(1, x^2)$ приводят к системе алгебраических уравнений для четырех неизвестных постоянных a_{1i} , a_{2i} (вместо шести в ИММ).

Величина G , характеризующая расход газа, определяется выражениями (3.4).

Результаты численного расчета кинетических коэффициентов G_1 и G_2 при различных значениях параметра разреженности δ для молекулярной модели твердых сфер приведены в таблице.

Аналитические выражения для G_1 и G_2 в свободномолекулярном режиме совпадают с (3.5), а в гидродинамическом режиме со скольжением для модели твердых сферических молекул имеют вид

$$(4.4) \quad G_1 = \left(\frac{39\pi^{1/2}}{35} - \frac{12}{35\pi^{1/2}} \right) \frac{1}{\delta}, \quad G_2 = \left(\frac{3}{5\pi^{1/2}} + \frac{51\pi^{1/2}}{140} \right) \frac{1}{\delta}.$$

Сравнение (4.4) с (3.6) дает расхождение для G_1 , равное 18 %, а для G_2 — 21 %.

5. Обсуждение результатов. В таблице приведены результаты численного расчета кинетических коэффициентов G_1 и G_2 при промежуточных значениях параметра разреженности δ , полученные тремя методами: МДО, ИММ, ИДММ. Ошибка вычислений по МДО составляла менее 1 %, что позволяет использовать эти результаты для оценки точности вычислений по ИММ и ИДММ. Основное достоинство двух последних методов состоит в том, что они не требуют вычислений локальных значений макропараметров. Поэтому ИММ и ИДММ являются более экономичными, требуют существенно меньших затрат машинного времени, чем МДО. Вместе с тем точность этих методов зависит от выбора аппроксимирующих выражений для макропараметров (для парциальных скоростей и касательных напряжений (3.3)).

Из таблицы следует, что полученные различными методами результаты удовлетворительно согласуются между собой при $\delta \leq 1$. Однако при промежуточных значениях параметра разреженности δ максимальная погрешность результатов ИММ и ИДММ составляет около 20 %. Уменьшение этой погрешности связано с необходимостью использования более высокого приближения метода Бубнова — Галеркина для решения системы интегрально-моментных уравнений (3.1), (3.2). В частности, аппроксимирующие выра-

жения (3.3) для парциальных скоростей w_i следует дополнить членами $a_x x^4$.

Направление поверхностной составляющей СИД определяется знаками разности коэффициентов аккомодации невозбужденных и возбужденных частиц $\Delta\epsilon = \epsilon_n - \epsilon_m$ и отстройки частоты излучения от центра линии поглощения $\Omega = \omega - \omega_{mn}$. Если $\Delta\epsilon > 0$, то направление поверхностной составляющей СИД при $\Omega > 0$ совпадает с направлением излучения, а при $\Omega < 0$ противоположно ему.

Из таблицы видно, что при переходе от свободномолекулярного к гидродинамическому режиму значение G_1 монотонно убывает. Такая зависимость объясняется тем, что с ростом параметра разреженности δ уменьшается относительное количество частиц, испытывающих столкновения со стенками канала. Это ослабляет роль стенок как буфера, и G_1 уменьшается.

Зависимость кинетического коэффициента G_2 , характеризующего столкновительный СИД, от δ является немонотонной. При $\delta \approx 4$ данная зависимость имеет максимум, а при $\delta \approx 2$ величина G_2 изменяет свой знак. Это означает, что направление столкновительной составляющей СИД определяется не только знаками Ω и $\Delta\sigma/\sigma$, но и давлением газа в канале.

Возможная причина такой зависимости функции $G_2 = G_{2m} + G_{2n}$ от Кп состоит в следующем. Составляющие G_{2m} и G_{2n} для возбужденных и невозбужденных частиц являются знакопостоянными функциями числа Кнудсена, причем $G_{2m} < 0$ и $G_{2n} > 0$. В гидродинамическом режиме G_{2m} и G_{2n} определяются кинетическими процессами в пристеночном кнудсеновском слое. Эффективная толщина кнудсеновского слоя для частиц с меньшим сечением столкновений, например, находящихся в основном n -состоянии, больше. Поэтому поток J_n испытывает меньшее сопротивление канала и $|G_{2n}| > |G_{2m}|$. При уменьшении давления растет толщина слоя Кнудсена и возрастают величины $|G_{2n}|$ и $|G_{2m}|$, достигая максимальных значений в промежуточном режиме. Дальнейшее уменьшение давления приводит к ослаблению самого столкновительного механизма СИД, т.е. к уменьшению $|G_{2n}|$ и $|G_{2m}|$. Причем $|G_{2n}|$ уменьшается быстрее. В результате при некотором значении δ макроскопические противонаправленные потоки возбужденных и невозбужденных частиц оказываются равными по величине. При этом и происходит смена знака G_2 . Далее при возрастании числа Кнудсена $|G_{2n}| < |G_{2m}|$, т.е. $G_2 < 0$.

На рис. 1, 2 представлены профили безразмерных макроскопических скоростей w_1, w_2 . Видно (рис. 1), что поверхностная составляющая СИД w_1 при $\delta \geq 1$ практически не зависит от поперечной координаты. Это дает основание полагать, что вязкость газа не оказывает существенного влияния на величину поверхностной составляющей СИД. Отметим также, что при $\delta \leq 0,1$ скорость газа w_1 вблизи стенок канала больше, чем на его оси.

Интересна эволюция профиля скорости столкновительной составляющей СИД w_2 с ростом параметра разреженности δ (рис. 2). Пока параметр разреженности мал, w_2 слабо зависит от x . С ростом δ структура потока СИД усложняется. Вблизи оси канала выделяется "ядро" потока, направленное в одну сторону, а часть газа, находящаяся в пристеночном слое, движется в противоположном направлении. Наличие противотока вызвано тем, что при промежуточных значениях δ поток возбужденных частиц в пристеночной области больше, чем невозбужденных, а около оси наоборот. В почти свободномолекулярном режиме при $\delta \leq 0,1$ скорость газа w_2 направлена в сторону, противоположную направлению волнового вектора k . В гидродинамическом режиме при $\delta > 10$ направление скорости w_2 совпадает с направлением k и при удалении от стенки она возрастает. Таким образом, при $\delta > 10$ на столкновительную составляющую скорости СИД w_2 в пристеночном слое оказывает влияние вязкость газа.

Авторы признательны Международному научному фонду за финансовую поддержку данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельмуханов Ф.Х., Шалагин А.М. Светоиндуцированная диффузия газов // Письма в ЖЭТФ. — 1979. — Т. 29, № 12.
2. Chiner A.V., Stockman M.I., Vaksman M.A. Surface light-induced drift of rarefied gas // Phys. Lett. — 1983. — V. 96A, N 2.
3. Ваксман М.А., Гайнер А.В. Теория дрейфа плотного взаимодействующего со стенками газа при избирательном по скоростям возбуждении // ЖЭТФ. — 1985. — Т. 89, вып. 1(7).
4. Чермянинов И.В., Черняк В.Г. Скольжение газа в поле оптического излучения // Инж.-физ. журн. — 1988. — Т. 55, № 6.
5. Ролдугин В.И. О фотоскольжении газа под действием резонансного излучения // Коллоид. журн. — 1988. — Т. 50, № 3.
6. Базелян Ф.Э., Коган М.Н. Светоиндуцированный дрейф однокомпонентного газа в канале // Докл. АН СССР. — 1989. — Т. 308, № 1.
7. Раутиан С.Г., Смирнов Г.И., Шалагин А.М. Нелинейные резонансы в спектрах атомов и молекул. — Новосибирск: Наука, 1979.
8. Mc Cormack F.J. Construction of linearized kinetic models for gaseous mixtures and molecular gases // Phys. Fluids. — 1979. — V. 16, N 12.
9. Чермянинов И.В., Черняк В.Г., Фомягин Г.А. Аккомодационная зависимость процессов тепло- и массопереноса многоатомного газа в капилляре при произвольных числах Кнудсена // ТВТ. — 1985. — Т. 23, № 6.
10. Van der Meer G.J., Hoogeveen R.W.M., Hermans L.J.F., Chapovsky P.L. Light-induced drift of CH_3F in noble gases // Phys. Rev. A. — 1989. — V. 39, N 10.
11. Fried B.D., Conte S.D. The plasma dispersion function. — N.Y.: Academic Press, 1961.
12. Чермянинов И.В., Черняк В.Г. Дрейф разреженного газа в плоском канале под действием монохроматического излучения // Инж.-физ. журн. — 1991. — Т. 60, № 6.
13. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970.
14. Черняк В.Г., Винтовкина Е.А., Чермянинов И.В. Светоиндуцированный дрейф однокомпонентного газа в капиллярах // ЖЭТФ. — 1993. — Т. 103, вып. 5.

г. Екатеринбург

Поступила 10/XI 1993 г.

УДК 533.9.082.5

С.Б. Леонов, Г.А. Лукьянов

О СТРУКТУРЕ СТРУЙ ПЛАЗМЫ ИМПУЛЬСНОГО ЭРОЗИОННОГО ЭЛЕКТРОРАЗРЯДНОГО ИСТОЧНИКА

Газодинамическая структура струй плазмы импульсных электроразрядных источников существенным образом зависит от геометрических и электрических параметров источника, условий истечения плазмы из сопла и параметров окружающей среды. Различное сочетание этих параметров и условий определяет достаточно большое разнообразие структур течения таких струй. На начальном участке струи сильное влияние на характер течения оказывают такие специфические особенности электроразрядного источника, как вынос электрического тока за срез сопла и большая неравномерность параметров на срезе сопла источника, связанная с поступлением плазмообразующего вещества со стенок сопла и другими обстоятельствами. Сложность картины истечения требует большой осторожности в перенесении на такие струи выводов, полученных для струй иного типа (например, импульсных газовых струй или стационарных струй электроразрядных источников с газообразными рабочими телами) [1]. В целом эксперименталь-