

О ПЛОСКИХ КОНФИГУРАЦИЯХ, ОБТЕКАЕМЫХ ПОТОКОМ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА С МАКСИМАЛЬНЫМ КРИТИЧЕСКИМ ЧИСЛОМ МАХА

Л. М. Зигангареева, О. М. Киселев

НИИ математики и механики при Казанском государственном университете, 420008 Казань

Рассматриваются задачи о построении тел, которые, удовлетворяя некоторым геометрическим ограничениям, обтекаются плоским симметричным потоком идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа с максимальным критическим числом Маха M_* . Решения находятся численно-аналитическим методом с использованием переменных годографа скорости. Приводятся полученные на основе аппроксимации расчетных данных зависимости M_* от геометрических характеристик искомых тел.

Критическое число Маха M_* , т. е. минимальное число Маха набегающего потока, при котором в потоке возникает скорость, равная критической, является одной из важных характеристик тела, обтекаемого газом. Практический интерес могут представлять тела, которые удовлетворяют определенным геометрическим ограничениям и при этом реализуют максимально возможное значение M_* . Среди тел заданного класса они не испытывают волнового сопротивления в максимальном диапазоне скоростей набегающего потока. Будем называть такие тела оптимальными или оптимальными по M_* .

Структура плоских симметричных оптимальных тел и оптимальных тел вращения в потоке идеального газа исследована в [1, 2]. Установлено, что для широкого класса геометрических ограничений контуры оптимальных тел состоят из прямолинейных участков и участков, на которых скорость газа равна критической. Форма оптимальных тел зависит от свойств обтекающего их газа. Идеальный совершенный газ с показателем адиабаты $\gamma = 1,4$ будем называть воздухоподобным.

В [3–6] для решения некоторых задач о построении плоских симметричных оптимальных тел в потоке воздухоподобного газа использованы различные численные и численно-аналитические методы, полученные результаты представлены в виде отдельных численных значений и графиков.

В настоящей работе аналогичные задачи исследуются более подробно с помощью численно-аналитического метода [7, 8], примененного авторами ранее к исследованию оптимальных по M_* тел вращения [9, 10]. Приводятся формулы, выражающие зависимость M_* от основных геометрических характеристик оптимальных тел, полученные в результате аппроксимации расчетных данных.

1. Рассмотрим безотрывное обтекание цилиндрических тел, обладающих плоскостью симметрии Ω , безграничным стационарным потенциальным потоком идеального газа. В плоскости $z = x + iy$, перпендикулярной образующим цилиндрической поверхности тела, течение полагаем симметричным относительно оси x , принадлежащей Ω и параллельной вектору скорости набегающего потока.

Пусть L_1 и H_1 — длины проекций тела на оси x и y соответственно; S_1 — площадь сечения тела плоскостью z ; θ_w — угол наклона вектора скорости к оси x на поверхности тела.

Задача А. Среди симметричных тел, удовлетворяющих одному из условий

$$H_1/L_1 \geq k_0, \quad S_1/L_1^2 \geq l_0 \quad (1.1)$$

и условию

$$\max |\theta_w| \leq \theta_0 \leq \pi/2 \quad (1.2)$$

(k_0, l_0, θ_0 — заданные константы; $k_0, l_0 < \operatorname{tg} \theta_0$), требуется найти тело, реализующее максимальное значение M_* .

Задача A_0 получается из предыдущей задачи отбрасыванием условия (1.2). Впервые она рассмотрена в [1]. Согласно [1], в плоскости z контур симметричного тела, удовлетворяющего одному из условий (1.1) и реализующего максимум M_* , состоит из двух равновеликих прямолинейных отрезков, перпендикулярных оси x и соединяющих эти отрезки линий тока, на которых скорость газа равна критической. Иными словами, задача A_0 сводится к задаче о симметричном обтекании газом пластины по схеме Рябушинского [11] при критической скорости на свободной поверхности. Аналогично задача А сводится к задаче о симметричном обтекании газом клина с углом полураствора θ_0 по той же схеме. (Решение задачи А при $\theta_0 = \pi/2$ совпадает с решением задачи A_0 .)

Некоторые результаты по численному решению задачи A_0 и задачи, аналогичной А, содержатся в [3, 4] и [5] соответственно.

Задача В. Пусть сечение тела плоскостью z имеет вид прямоугольной полуполосы шириной H_2 , симметричной относительно оси x . Требуется деформировать головную (прилегающую к торцу) часть тела так, чтобы полученное симметричное тело обтекалось безотрывно с максимально возможным значением M_* при выполнении условия (1.2) и одного из условий

$$L_2/H_2 \leq m_0, \quad S'_2/H_2^2 \leq n_0, \quad (1.3)$$

где L_2 — длина головной (подвергшейся деформации) части тела; S'_2 — площадь сечения, теряемая при деформации; m_0, n_0 — заданные константы ($m_0 > (1/2) \operatorname{ctg} \theta_0$, $n_0 > (1/4) \operatorname{ctg} \theta_0$). Таким образом, $S'_2 = L_2 H_2 - S_2$, где S_2 — площадь сечения головной части тела. Неравенства (1.3) ограничивают потерю «вместимости» существовавшего первоначально тела.

Заметим, что головную часть тела можно с равным успехом рассматривать в качестве кормовой.

С помощью теоремы сравнения [1, 2] нетрудно показать, что построение оптимального тела, отвечающего условиям задачи В, сводится к решению задачи о симметричном обтекании газом клина с углом полураствора θ_0 по схеме Жуковского — Рошко [11] при критической скорости на свободной поверхности.

Некоторые результаты решения задачи о профилировании оптимальной по M_* головной или кормовой части плоского симметричного полубесконечного тела при заданных значениях L_2, H_2, θ_0 содержатся в [6].

2. В плоскости $z = x + iy$ рассмотрим стационарное симметричное относительно оси x обтекание клина с углом полураствора $\theta_0 \leq \pi/2$ дозвуковым безвихревым потоком идеального газа по схемам Рябушинского и Жуковского — Рошко. На рис. 1 слева показаны отвечающие названным схемам области течения, расположенные над осью x , где bc и gh — стенки обтекаемого и фиктивного клиньев; cdg и ce — свободные поверхности; ea — полупрямая, параллельная оси x ; a — бесконечно удаленная точка; точка d лежит на оси y , являющейся дополнительной осью симметрии для течения по схеме Рябушинского. Согласно обозначениям п. 1, расстояние между точками b и h равно L_1 ; ордината точки d равна $H_1/2$; $S_1/2$ — площадь, ограниченная контуром $bcdgh$ и осью x ; $S_2/2$ — площадь,

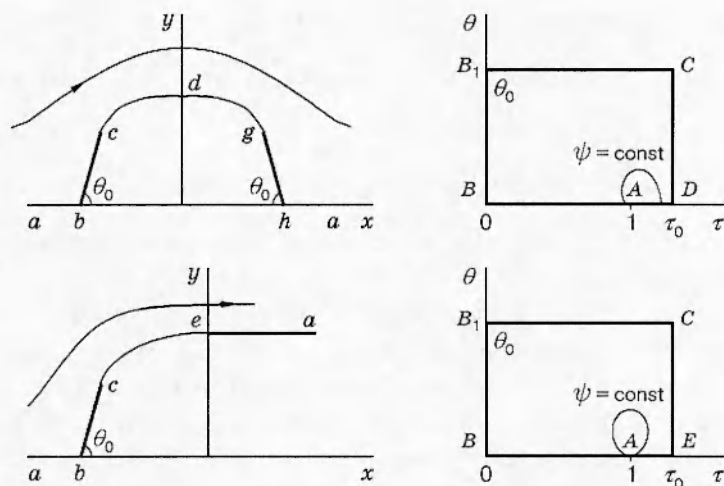


Рис. 1

ограниченная контуром bce , осью x и осью y , проходящей через точку e ; L_2 и $H_2/2$ — длины проекций контура bce на оси x и y соответственно.

Пусть λ — приведенная скорость; M — число Маха; θ — угол наклона скорости к оси x ; λ_a и λ_c — значения λ в бесконечно удаленной точке и на свободной поверхности соответственно ($\lambda_a \leq \lambda_c \leq 1$); M_a и M_c — значения M при $\lambda = \lambda_a$ и $\lambda = \lambda_c$; $\tau = \lambda/\lambda_a$, $\tau_0 = \lambda_c/\lambda_a$. На рис. 1 справа показаны области $\Sigma = \{(\tau, \theta) | 0 < \tau < \tau_0, 0 < \theta < \theta_0\}$ в плоскости (τ, θ) , соответствующие левой верхней четверти области течения по схеме Рябушинского и верхней половине области течения по схеме Жуковского — Рашко. Отрезок BB_1 отвечает точке разветвления потока b , точки A, C, D, E — точкам a, c, d, e .

Введем функцию тока ψ с помощью соотношений $\tau\nu \cos \theta = \psi_y$, $\tau\nu \sin \theta = -\psi_x$. Здесь $\nu = \rho/\rho_0$; ρ — плотность газа; ρ_0 — значение ρ в заторможенном потоке; нижними индексами отмечаются частные производные. При сделанных предположениях функция тока ψ в области Σ удовлетворяет уравнению Чаплыгина

$$L\psi = (1 - M^2)\psi_{\theta\theta} + \tau^2\psi_{\tau\tau} + \tau(1 + M^2)\psi_\tau = 0. \quad (2.1)$$

Для течения по схеме Рябушинского $\psi = 0$ на ABB_1CD , $\psi_\theta = 0$ на AD . Для течения по схеме Жуковского — Рашко $\psi = 0$ на ABB_1CEA .

Зависимости $\nu(\tau)$, $M(\tau)$, определяемые свойствами газа, считаем известными дифференцируемыми функциями, аналитическими в окрестности точки $\tau = 1$ ($\lambda = \lambda_a$). При этом коэффициенты уравнения (2.1) разложимы в степенные ряды по $\zeta = \tau - 1$:

$$\tau^2 = 1 + 2\zeta + \zeta^2, \quad 1 - M^2 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \zeta^k, \quad \tau(1 + M^2) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k \zeta^k, \quad (2.2)$$

$$p_0 = 1 - M_a^2, \quad p_k = -\frac{1}{k!} \left. \frac{d^k M^2}{d\tau^k} \right|_{\tau=1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$q_0 = 2 - p_0, \quad q_1 = q_0 - p_1, \quad q_k = -p_{k-1} - p_k, \quad k = 2, 3, \dots$$

Функцию тока ψ представим в виде $\psi = \psi^0 + \chi$, где ψ^0 — функция, описывающая поведение ψ в окрестности особой точки A . Введем переменные σ и ω :

$$\sigma = (\theta^2 + \alpha^2 \zeta^2)^{1/2}, \quad \omega = \arctg \left(\frac{\theta}{\alpha \zeta} \right), \quad \alpha = \sqrt{1 - M_a^2}. \quad (2.3)$$

Согласно (2.3), $\zeta = \alpha^{-1} \sigma \cos \omega$,

$$\sigma_\theta = \sin \omega, \quad \sigma_\tau = \alpha \cos \omega, \quad \omega_\theta = \sigma^{-1} \cos \omega, \quad \omega_\tau = -\alpha \sigma^{-1} \sin \omega. \quad (2.4)$$

Функцию ψ^0 будем искать в виде асимптотического разложения по малому параметру σ , полагая

$$\psi^0 = \psi_1 + \psi_2 + \dots, \quad \psi_k = h_k(\sigma) f_k(\omega); \quad h_{k+1}(\sigma)/h_k(\sigma) \rightarrow 0, \quad \sigma \rightarrow 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

и требуя выполнения условия

$$\psi_1 > 0, \quad 0 < \omega < \pi \quad (2.6)$$

для обеих схем обтекания, а также условий

$$\psi_k = 0, \quad \omega = 0, \pi, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

для течения по схеме Жуковского — Рошко и условий

$$\psi_k = 0, \quad \omega = \pi, \quad \psi_{k\theta} = 0, \quad \omega = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

для течения по схеме Рябушинского.

Главный член разложения (2.5) представим в виде $\psi_1 = \sigma^{-n} f_1(\omega)$ ($n = \text{const}$, $n > 0$). Полагая в (2.2) $\zeta = \alpha^{-1} \sigma \cos \omega$ и используя (2.4), можно показать, что при $\psi_1 = \sigma^{-n} f_1(\omega)$

$$L\psi_1 = R_1 + \Delta R_1, \quad \bar{r}_1 = \alpha^2 \sigma^{-n-2} (n^2 f_1 + f_1''), \quad \Delta R_1 = O(\sigma^{-n-1}).$$

Приравнявая нулю R_1 — главный член в разложении $L\psi_1$ по степеням σ , с учетом (2.6), (2.7) или (2.6), (2.8) получим краевую задачу для функции $f_1(\omega)$. В частности, для течения по схеме Жуковского — Рошко получается краевая задача

$$n^2 f_1 + f_1'' = 0, \quad f_1(0) = f_1(\pi) = 0, \quad f_1(\omega) > 0, \quad 0 < \omega < \pi, \quad n > 0. \quad (2.9)$$

Легко убедиться, что существует единственное (с точностью до постоянного множителя при f_1) решение задачи (2.9): $n = 1$, $f_1 = \sin \omega$. Таким образом, $\psi_1 = \sigma^{-1} \sin \omega$.

При подстановке $\psi = \psi_1 = \sigma^{-1} \sin \omega$ в (2.1) возникающие в результате дифференцирования ψ_1 члены порядка σ^{-3} взаимно уничтожаются и остается невязка порядка σ^{-2} . Следующий за ψ_1 член разложения (2.5) будем искать в виде $\psi_2 = f_2(\omega)$, требуя, чтобы в результате подстановки $\psi = \psi_1 + \psi_2$ в (2.1) члены порядка σ^{-2} уничтожились и осталась невязка порядка σ^{-1} . При этом с учетом (2.7) для $f_2(\omega)$ получается краевая задача

$$\begin{aligned} \alpha^2 f_2'' &= \delta_1 \sin \omega \cos \omega + \delta_2 \sin^3 \omega \cos \omega, & \delta_1 &= 6p_1 \alpha^{-1} - 12\alpha + 2\alpha q_0, \\ \delta_2 &= 16\alpha - 8p_1 \alpha^{-1}, & f_2(0) &= f_2(\pi) = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Существует единственное решение задачи (2.10):

$$\psi_2 = f_2(\omega) = -\frac{1}{16} (2\delta_1 + \delta_2) \alpha^{-2} \sin 2\omega + \frac{1}{12\alpha} \delta_2 \alpha^{-2} \sin 4\omega.$$

Функцию ψ_3 естественно искать в виде $\psi_3 = \sigma f_3(\omega)$, требуя, чтобы в результате подстановки $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$ в (2.1) члены порядка σ^{-1} уничтожились и осталась невязка порядка 1. При этом для f_3 получается краевая задача

$$f_3 + f_3'' = F_3, \quad f_3(0) = f_3(\pi) = 0 \quad (2.11)$$

(F_3 — известная функция ω). Поскольку функция $f = \sin \omega$ удовлетворяет условиям $f + f'' = 0$, $f(0) = f(\pi) = 0$, то решение задачи (2.11) находится с точностью до слагаемого $q \sin \omega$ ($q = \text{const}$). Возникшая неопределенность свидетельствует о том, что дальнейшее уточнение поведения ψ в окрестности особой точки A возможно только при учете полных граничных условий для этой функции.

Перейдем к рассмотрению течения по схеме Рябушинского. Полагая $\psi_1 = \sigma^{-n} f_1(\omega)$ и приравнявая нулю главный член в разложении $L\psi_1$ по степеням σ , при учете (2.6), (2.8) получим краевую задачу

$$n^2 f_1 + f_1'' = 0, \quad f_1(\pi) = f_1'(0) = 0, \quad f_1(\omega) > 0, \quad 0 < \omega < \pi, \quad n > 0. \quad (2.12)$$

Решение задачи (2.12) имеет вид $n = 1/2$, $f_1 = \cos(\omega/2)$. Таким образом, $\psi_1 = \sigma^{-1/2} \cos(\omega/2)$.

При отыскании функции ψ_2 возникает неопределенность, подобная описанной выше для функции ψ_3 в задаче о течении по схеме Жуковского — Рошко.

3. Зная функцию ψ^0 , можно перейти к решению краевой задачи для ψ с помощью метода конечных разностей. При этом возможны два подхода. Первый подход основан на нахождении функции $\chi = \psi - \psi^0$ из решения соответствующей краевой задачи для уравнения $L\chi = -L\psi^0$. При использовании этого подхода можно продолжить описанный выше процесс отыскания функции ψ^0 , удовлетворяющей условию $L\psi^0 \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow 0$ и краевым условиям соответствующей задачи на отрезках границы, примыкающих к особой точке A (неоднозначность решения при этом не имеет значения). В основе второго подхода лежит соображение о том, что в окрестности точки A функция ψ близка к ψ^0 . При этом подходе значения ψ^0 на некоторой прямоугольной ломаной, отделяющей окрестность точки A от остальной части области Σ , используются в качестве граничных значений функции ψ при решении соответствующей краевой задачи для уравнения $L\psi = 0$. Практика вычислений показала большую простоту и надежность второго подхода, который и был использован при получении результатов настоящей работы.

В случае, когда значения λ_a и λ_c близки друг к другу, велики градиенты ψ вблизи отрезков AD и AE . Это приводит к необходимости преобразования независимых переменных при численном решении задачи. Удобны, в частности, следующие преобразования [12, § 5.6], переводящие Σ в $\Sigma_1 = \{(\xi, \eta) | 0 < \xi < 1, 0 < \eta < 1\}$:

$$\xi = F(1 + \beta_1, \tau/\tau_0), \quad \eta = 1 - F(1 + \beta_2, 1 - \theta/\theta_0), \quad (3.1)$$

$$F(x, y) = \ln[(x + y)/(x - y)] \{ \ln[(x + 1)/(x - 1)] \}^{-1}$$

(параметры β_1 и β_2 — малые положительные числа).

В области Σ_1 применяется конечно-разностная схема с пятиточечной аппроксимацией на равномерной прямоугольной сетке. Для ее реализации используется метод последовательной верхней релаксации.

После определения функции $\psi(\tau, \theta)$ переход в физическую плоскость производится с использованием формул

$$\nu\tau^2 z_\tau = [(M^2 - 1)\psi_\theta + i\tau\psi_\tau] \exp(i\theta), \quad \nu\tau z_\theta = [\tau\psi_\tau + i\psi_\theta] \exp(i\theta) \quad (3.2)$$

($z = x + iy$). Производные ψ_τ , ψ_θ находятся с помощью сплайн-аппроксимации сеточных значений ψ .

Если функция ψ является решением уравнения (2.1), то значения x и y , определенные с помощью (3.2), не должны зависеть от пути интегрирования. Это соображение используется для рационального выбора параметров β_1 , β_2 в (3.1) и контроля точности вычислений.

Из (3.2) можно, в частности, получить формулу

$$y = \frac{1}{\nu\tau} \left[\psi \cos \theta + \int_0^\theta (\tau\psi_\tau + \psi) \sin \theta d\theta \right] + \Omega(\tau). \quad (3.3)$$

Будем рассматривать течение по схеме Жуковского — Рошко. Для этой схемы $\Omega(\tau) = 0$ при $0 \leq \tau < 1$ и $\Omega(\tau) = \text{const} > 0$ при $1 < \tau \leq \tau_0$. Согласно (3.3), при $\sigma \rightarrow 0$ ($\tau \rightarrow 1, \theta \rightarrow 0$)

$$y \sim I = \frac{1}{\nu_a} [\psi_1 + J_1 + J_2] + \Omega(\tau), \quad J_1 = \int_0^\theta \psi_1 \theta d\theta, \quad J_2 = \int_0^\theta \psi_{1\tau} \theta d\theta,$$

где $\psi_1 = \sigma^{-1} \sin \omega$; ν_a — значение ν при $\tau = 1$ ($\lambda = \lambda_a$).

Используя (2.3), (2.4), нетрудно убедиться, что

$$J_1 = \sigma [\sin \omega - g(\omega) \cos \omega], \quad J_2 = \alpha \sin \omega \cos \omega - \alpha g(\omega), \quad g(\omega) = \omega, \quad 0 \leq \omega < \pi/2 \quad (\zeta > 0);$$

$$g(\omega) = \omega - \pi, \quad \pi/2 < \omega \leq \pi \quad (\zeta < 0).$$

Отсюда следует, что

$$I \rightarrow \frac{1}{\nu_a} \left(\sigma^{-1} + \sigma + \frac{\alpha\pi}{2} \right) \quad \text{при } \zeta < 0, \quad \omega \rightarrow \pi/2,$$

$$I \rightarrow \frac{1}{\nu_a} \left(\sigma^{-1} + \sigma - \frac{\alpha\pi}{2} \right) + \Omega(\tau) \Big|_{\zeta > 0} \quad \text{при } \zeta > 0, \quad \omega \rightarrow \pi/2.$$

Чтобы величина y не терпела разрыва на прямой $\omega = \pi/2$ ($\zeta = 0$), необходимо положить $\Omega(\tau) = \alpha\pi/\nu_a$ при $\zeta > 0$. Таким образом, при $\psi_1 = \sigma^{-1} \sin \omega$ (функция ψ_1 определена с точностью до постоянного множителя) $y = \alpha\pi/\nu_a$ на AE . Это соотношение также можно использовать для контроля точности вычислений.

Введем в рассмотрение число кавитации Q и коэффициент сопротивления клина C_x при обтекании последнего сжимаемой жидкостью (газом) по одной из рассматриваемых кавитационных схем: $Q = 2(p_a - p_c)/(\rho_a V_a^2)$, $C_x = 2X/(\rho_a V_a^2 h)$. Здесь V_a, ρ_a, p_a — скорость, плотность и давление жидкости в бесконечно удаленной точке; p_c — давление в каверне; X — сопротивление клина; h — длина проекции клина на ось y ($h = 2l \sin \theta_0$, где l — длина щеки клина bc).

Для течения по схеме Жуковского — Рошко имеет место соотношение [11]

$$C_x = Q H_2 h^{-1}, \quad (3.4)$$

которое также может служить для контроля точности получаемых результатов. Заметим, что для совершенного газа с показателем адиабаты γ при $M_c = 1$

$$Q = \frac{2}{\gamma M_a^2} \left[1 - \left(\frac{2}{\gamma + 1} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} M_a^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \right].$$

4. С помощью описанного метода выполнены расчеты симметричного обтекания клина воздухоподобным газом по схемам Рябушинского и Жуковского — Рошко при условии $M_c = 1$. Систематические вычисления проводились для $\theta_0 = 30, 45, 60, 75, 90^\circ$ и $M_a = 0,7; 0,8; 0,9; 0,95; 0,98; 0,99$ (эти значения θ_0 и M_a назовем базисными). Использовалась сетка, получаемая делением каждой из сторон квадрата Σ_1 на 100 равных частей. Значения ψ^0 в семи внутренних узлах сетки в окрестности точки A использовались в качестве дополнительных граничных значений ψ (полагалось $\psi^0 = \sigma^{-1/2} \cos(\omega/2)$ для схемы Рябушинского и $\psi^0 = \sigma^{-1} \sin \omega + f_2(\omega)$ для схемы Жуковского — Рошко). Для всех базисных значений θ_0, M_a условие (3.4) в задаче В оказалось выполненным с погрешностью, не превышающей 0,15%.

Некоторые результаты решения задачи A_0 и задачи В при $\theta_0 = \pi/2$ содержатся в табл. 1 и 2 соответственно (h — длина прямолинейного отрезка, образующего переднюю часть контура оптимального тела).

Таблица 1

M_a	H_1/h	L_1/H_1	$(L_1/H_1)_1$	L_1^2/S_1	C_x
0,7	2,588 82	3,900 15	3,617 13	4,539 94	1,734 78
0,8	3,939 88	8,477 11	7,966 22	10,130 6	1,458 03
0,9	8,041 74	27,245 7	26,295 5	33,195 1	1,277 72
0,95	16,277 0	81,115 9	79,701 6	99,435 0	1,211 98
0,98	40,994 0	329,112	327,669	404,376	1,178 43
0,99	82,169 8	937,916	938,679	1 153,00	1,168 10

Таблица 2

M_a	H_2/h	L_2/H_2	S_2/H_2^2	S_2'/H_2^2	C_x	QH_2h^{-1}
0,7	2,228 45	1,154 56	0,981 82	0,172 74	1,735 65	1,736 11
0,8	3,356 59	2,614 90	2,141 13	0,473 77	1,458 22	1,458 91
0,9	6,806 70	8,618 55	6,853 51	1,765 04	1,277 73	1,278 69
0,95	13,746 7	25,836 6	20,351 1	5,485 53	1,211 98	1,212 65
0,98	34,607 6	105,211	82,579 5	22,631 3	1,178 42	1,179 36
0,99	69,386 4	300,325	235,549	64,775 6	1,168 09	1,169 16

Путем аппроксимации расчетных данных с применением метода наименьших квадратов получены зависимости $M_* = F_1(H_1/L_1, \theta_0)$, $M_* = F_2(S_1/L_1^2, \theta_0)$, $M_* = F_3(H_2/L_2, \theta_0)$ и $M_* = F_4(H_2^2/S_2', \theta_0)$, характеризующие решения задач А и В для воздухоподобного газа в области $\pi/6 \leq \theta_0 \leq \pi/2$, $0,7 \leq M_* \leq 1$ и имеющие вид

$$F_k(t_k, \theta_0) = [1 + a_1^{(k)} t_k^{2/3} + a_2^{(k)} t_k^{4/3} + a_3^{(k)} t_k^2]^{-1}, \quad t_1 = \frac{H_1}{L_1}, \quad t_2 = \frac{S_1}{L_1^2}, \quad t_3 = \frac{H_2}{L_2},$$

$$a_n^{(k)} = a_{n0}^{(k)} + a_{n1}^{(k)} (\pi/2 - \theta_0) + a_{n2}^{(k)} (\pi/2 - \theta_0)^5, \quad k = 1, 2, 3, \quad n = 1, 2, 3, \quad (4.1)$$

$$F_4(t_4, \theta_0) = [1 + a_1^{(4)} p + a_2^{(4)} p^2 + a_3^{(4)} p^3]^{-1}, \quad t_4 = \frac{H_2^2}{S_2'}, \quad p = 0,1 \left(\frac{1}{t_4} - \frac{1}{4} \operatorname{ctg} \theta_0 \right)^{-2/3},$$

$$a_n^{(4)} = a_{n0}^{(4)} + a_{n1}^{(4)} (\pi/2 - \theta_0) + a_{n2}^{(4)} (\pi/2 - \theta_0)^4, \quad n = 1, 2, 3.$$

Значения коэффициентов $a_{ni}^{(k)}$ приводятся в табл. 3.

Погрешность аппроксимации расчетных данных формулами (4.1) для всех базисных значений параметров θ_0 и $M_a = M_*$ не превышает 0,05%. При $\theta_0 = \pi/2$ для построения формул (4.1) использованы результаты вычислений, полученные для 12 различных значений M_a из интервала $[0,7; 0,995]$, включая базисные, причем в этом случае аппроксимация оказывается более точной. В частности, соотношение

$$F_1(t_1, \pi/2) = [1 + 0,966 58 t_1^{2/3} + 0,401 08 t_1^{4/3} - 0,409 75 t_1^2]^{-1} \quad (4.2)$$

($t_1 = H_1/L_1$) аппроксимирует расчетные данные с погрешностью, не превышающей 0,006%.

На рис. 2 показаны зависимости M_* от $t_1 = H_1/L_1$ (кривые 1-3 при $\theta_0 = \pi/2, \pi/4, \pi/6$) и от θ_0 (кривые 4-6 при $t_1 = 0,2; 0,1; 0,05$). Аналогичный вид имеют зависимости M_* от t_k и θ_0 для $k = 2, 3, 4$. С уменьшением t_k (с приближением M_* к единице) зависимость M_* от θ_0 становится все более слабой ($\partial F_k(t_k, \theta_0)/\partial \theta_0 \rightarrow 0$ при $t_k \rightarrow 0$). Каждая из функций $F_k(t_k, \theta_0)$

Таблица 3

Задача А				Задача В			
	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$		$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$
$a_{1i}^{(1)}$	0,966 58	0,005 58	0,004 87	$a_{1i}^{(3)}$	0,453 59	0,000 61	0,009 52
$a_{2i}^{(1)}$	0,401 08	-0,091 52	-0,121 40	$a_{2i}^{(3)}$	0,067 27	-0,013 06	-0,083 14
$a_{3i}^{(1)}$	-0,409 75	0,663 06	0,717 13	$a_{3i}^{(3)}$	-0,052 15	0,089 93	0,185 06
$a_{1i}^{(2)}$	1,114 27	0,005 97	0,019 47	$a_{1i}^{(4)}$	1,675 44	0,030 82	-0,041 68
$a_{2i}^{(2)}$	0,400 26	-0,108 70	-0,473 27	$a_{2i}^{(4)}$	-0,811 37	-2,325 41	0,118 48
$a_{3i}^{(2)}$	-0,643 69	1,370 91	2,727 00	$a_{3i}^{(4)}$	-0,813 94	4,036 93	-0,832 13

является монотонно убывающей по t_k и монотонно возрастающей по θ_0 , по крайней мере, при $\pi/6 \leq \theta_0 \leq \pi/2$ и значениях t_k , обеспечивающих выполнение условия $F_k(t_k, \theta_0) \geq 0,7$.

В работе [3] при решении задачи A_0 для совершенного газа с показателем адиабаты γ используется уравнение

$$\psi_{\mu\mu} + \psi_{\theta\theta} + g\psi_{\mu} = 0, \quad \mu = \int_1^{\lambda} \frac{\sqrt{1-M^2}}{\lambda} d\lambda, \quad g = -\frac{\gamma+1}{2} \frac{M^4}{(1-M^2)^{3/2}}.$$

Решается краевая задача для функции $\chi = \psi - \psi^0$, где $\psi^0 = \text{Im}\{i[\theta + i(\mu - \mu_a)]\}^{-1/2}$, μ_a — значение μ при $\lambda = \lambda_a$. Вычисления выполнены при $\gamma = 1,4$ для трех значений M_a . Согласно [3], $L_1/H_1 = 4,30; 7,87; 14,36$ при $M_a = 0,72; 0,80; 0,86$ соответственно. Метод настоящей работы для тех же значений M_a дает $L_1/H_1 = 4,49; 8,48; 15,70$. Достаточно большое различие результатов можно объяснить использованием в [3] довольно грубой сетки и необходимостью отсечения части полубесконечной области изменения параметров μ, θ ($-\infty < \mu \leq 0$).

В [4] для решения задачи A_0 используется метод, близкий к методу настоящей работы. Результаты представлены в виде графика зависимости H_1/L_1 от M_a при $\gamma = 1,4$, которому хорошо соответствуют полученные нами точки.

При решении задачи A_0 для совершенного газа с показателем адиабаты γ на основе трансзвуковой теории малых возмущений получена формула [4]

$$\frac{1 - M_a^2}{M_a^4} = K(H_1/L_1)^{2/3}, \quad K = \left[\pi \frac{\gamma+1}{2} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(4/3)} \right]^{2/3}. \quad (4.3)$$

Значения L_1/H_1 , вычисленные в соответствии с (4.3) при $\gamma = 1,4$, когда $K = 1,933 53$, приводятся в табл. 1 под обозначением $(L_1/H_1)_1$. Различие между найденными нами значениями L_1/H_1 и $(L_1/H_1)_1$ монотонно убывает с увеличением M_a от 8% при $M_a = 0,7$ до 0,08% при $M_a = 0,99$.

В соответствии с (4.3) для точного решения задачи A_0 справедливо асимптотическое соотношение

$$1 - M_a^2 \sim K(H_1/L_1)^{2/3}, \quad M_a \rightarrow 1. \quad (4.4)$$

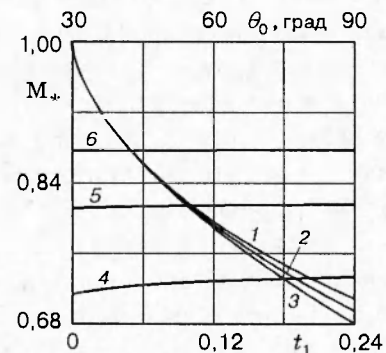


Рис. 2

В то же время, согласно (4.2),

$$1 - M_a^2 \sim 2a_{10}^{(1)} t_1^{2/3} = 1,933\,16(H_1/L_1)^{2/3}, \quad M_a \rightarrow 1, \quad \gamma = 1,4.$$

Таким образом, коэффициент $a_{10}^{(1)}$, найденный в результате аппроксимации расчетных данных, лишь на 0,02% отличается от значения, обеспечивающего выполнение асимптотического соотношения (4.4) при $\gamma = 1,4$. Это является одним из свидетельств надежности результатов настоящей работы.

Задача, аналогичная задаче А, рассматривалась в [5]. Решение задачи об обтекании клина воздухоподобным газом по схеме Рябушинского строилось конечно-разностным методом в физической плоскости при заданных параметрах $\beta = l \cos \theta_0 / L_1$ и M_a . Для оптимального по M_* тела в [5] приводятся графики зависимости M_* от S_1/L_1^2 при $\beta = 0,2$ и зависимости θ_0 от β при $Q = 0,5; 0,9; 1,5$.

Задача о симметричном обтекании газом клина по схеме Жуковского — Рошко при звуковой скорости на свободной поверхности, лежащая в основе решения задачи В, исследовалась впервые в [13]. Методом разделения переменных в сочетании с методом контурных интегралов получены аналитические выражения для функции тока ψ , имеющие вид рядов, члены которых содержат гипергеометрические функции. Параметры течения на основе этих выражений не вычислялись.

Эта же задача рассматривалась в [6], где строилась функция ψ_0 , описывающая поведение функции тока $\psi(\lambda, \theta)$ в окрестности особой точки и обращающаяся в нуль на границе области изменения годографа скорости. Функция $\chi = \psi - \psi_0$ удовлетворяет уравнению $L\chi = -L\psi_0$ ($L\psi = 0$ — уравнение Чаплыгина) и однородным граничным условиям. Для ее отыскания используется подход, основанный на построении функции Грина. В результате χ находится в виде ряда, члены которого содержат в качестве множителей гипергеометрические функции, а также простые и повторные интегралы с подынтегральными выражениями, содержащими те же функции. Найденное представление $\psi = \psi_0 + \chi$ используется для вычисления характеристик исследуемого течения. Основным результатом работы [6] является график зависимости $H_2/2L_2$ от $|\theta_0|$ ($0 \leq |\theta_0| \leq 90^\circ$) при $M_* = 0,3; 0,4; \dots 0,9$ для воздухоподобного газа.

Метод настоящей работы дает результаты, вполне удовлетворительно согласующиеся с графиками, представленными в [5, 6].

5. Таким образом, главным результатом настоящей работы являются впервые найденные аналитические зависимости критического числа Маха M_* от параметров t_1 и θ_0 , характеризующие решение задач А и В для воздухоподобного газа в наиболее интересной для практики области значений аргументов. Заметим, что функция $F_1(t_1, \theta_0)$ при $\theta_0 < \pi/2$, а также функции $F_2(t_2, \theta_0)$ и $F_4(t_4, \theta_0)$ ранее вообще не исследовались.

Очевидно, для произвольных плоских симметричных тел конечной длины, удовлетворяющих условию (1.2) и обтекаемых безотрывно симметричным потенциальным потоком воздухоподобного газа, справедливы соотношения

$$M_* \leq F_1(H_1/L_1, \theta_0), \quad M_* \leq F_2(S_1/L_1^2, \theta_0). \quad (5.1)$$

Аналогично для произвольных плоских симметричных полубесконечных тел, получаемых путем деформации передней части прямоугольной полуполосы, удовлетворяющих условию (1.2) и обтекаемых безотрывно потенциальным потоком воздухоподобного газа, справедливы соотношения

$$M_* \leq F_3(H_2/L_2, \theta_0), \quad M_* \leq F_4(H_2^2/S_2', \theta_0). \quad (5.2)$$

Строгое равенство в (5.1) и (5.2) выполняется только для оптимальных по M_* тел. Авторы благодарны Г. Ю. Степанову за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00123).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Gilbarg D., Shiffman M.** On bodies achieving extreme values of the critical Mach number. I // *J. Ration. Mech. and Analysis*. 1954. V. 3, N 2. P. 209–230.
2. **Крайко А. Н.** Плоские и осесимметричные конфигурации, обтекаемые с максимальным критическим числом Маха // *Прикл. математика и механика*. 1987. Т. 51, вып. 6. С. 941–950.
3. **Fisher D. D.** Calculation of subsonic cavities with sonic free streamlines // *J. Math. Phys.* 1963. V. 42, N 1. P. 14–26.
4. **Schwendeman D. W., Kropinski M. C. A., Cole J. D.** On the construction and calculation of optimal nonlifting critical airfoils // *ZAMP*. 1993. V. 44. P. 556–571.
5. **Брутян М. А., Ляпунов С. В.** Оптимизация формы симметричных плоских тел с целью увеличения критического числа Маха // *Учен. зап. ЦАГИ*. 1981. Т. 12, № 5. С. 10–22.
6. **Щербаков С. А.** Расчет головной или кормовой части плоского тела, обтекаемого дозвуковым потоком с максимально возможным критическим числом Маха // *Учен. зап. ЦАГИ*. 1988. Т. 19, № 4. С. 10–18.
7. **Киселев О. М.** О расчете струйных течений газа с использованием переменных годографа скорости // *IV Всесоюз. науч. шк. «Гидродинамика больших скоростей»: Тез. докл. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1989. С. 34.*
8. **Зигангареева Л. М., Киселев О. М.** О расчете кавитационного обтекания кругового конуса дозвуковым потоком сжимаемой жидкости // *Прикл. математика и механика*. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 93–107.
9. **Зигангареева Л. М., Киселев О. М.** Отрывное дозвуковое обтекание диска идеальным газом и тела с наибольшими критическими числами Маха // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. 1996. № 3. С. 166–172.
10. **Зигангареева Л. М., Киселев О. М.** О полубесконечных телах вращения, обтекаемых с максимальным критическим числом Маха // *Прикл. математика и механика*. 1997. Т. 61, вып. 1. С. 97–107.
11. **Гуревич М. И.** Теория струй идеальной жидкости. М.: Физматгиз, 1961.
12. **Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.** Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 1. М.: Мир, 1990.
13. **Maskie A. G.** The solution of boundary value problems for a general hodograph equation // *Proc. Cambridge Philosophical Society*. 1958. V. 54, pt 4. P. 538–553.

Поступила в редакцию 3/ХІІ 1996 г.
