УДК 539.376

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ И ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ

В. П. Радченко, М. Н. Саушкин, Е. П. Голудин

Самарский государственный технический университет, 443100 Самара
E-mails: radch@samgtu.ru, msaushkin@gmail.com, goludin@yandex.ru

Предложена стохастическая модель неизотермической ползучести и длительной прочности металлических материалов. Выполнен стохастический анализ экспериментальных данных о ползучести сплава ЖС6КП при значениях температуры, равных 900, 950 и 1000 °C. С использованием экспериментальных данных обоснованы гипотезы, применяемые при построении модели. Выполнена проверка адекватности стохастической модели экспериментальным данным о ползучести сплава ЖС6КП при стационарном и нестационарном режимах нагружения. Показано, что расчетные и экспериментальные данные удовлетворительно согласуются.

Ключевые слова: неизотермическая ползучесть, длительная прочность, стохастическая модель, сплав ЖС6КП.

1. Механические свойства материалов имеют четко выраженный вероятностный характер как на атомно-молекулярном уровне, так и на уровне элемента конструкции, машины или сооружения, вследствие чего однотипные изделия имеют неодинаковые механические свойства. В большой степени такой характер свойств материалов проявляется при реологических деформациях. В работах [1, 2] отмечено, что минимальные значения скорости ползучести, полученные при испытаниях на ползучесть образцов из одной партии, могут различаться на 50 %. Такое различие приходится расценивать как хорошо согласующиеся экспериментальные данные (см. [3–9]). Феноменологические теории ползучести, используемые в прикладных задачах для оценки ресурса безопасности эксплуатации элементов конструкций, как правило, имеют детерминированный характер и не учитывают разброс характеристик ползучести и длительной прочности. Поэтому детерминированный метод расчета является первым и в ряде случаев недостаточным приближением. В инженерной практике неточности детерминированного расчета на прочность и надежность компенсируются, например, назначением коэффициента запаса прочности, который в ряде случаев выбирается без достаточных обоснований и не является оптимальным. Вследствие этого появляются неиспользованные резервы прочности либо происходит преждевременное (по сравнению с расчетным временем) разрушение элементов конструкций. С учетом изложенного выше возникла необходимость разработки стохастических моделей изотермической ползучести и длительной прочности [6–8, 10, 11]. Необходимость разработки стохастических реологических моделей обусловлена также развитием теории ползучести, которая используется, в частности, при решении стохастических краевых задач ползучести [12–15]. Основным элементом постановки таких задач являются определяющие (фи-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-01-00644-а).

зические) соотношения. В настоящей работе результаты работ [7, 10, 11] обобщены на случай неизотермической ползучести и построена соответствующая стохастическая модель ползучести и длительной прочности.

2. В соответствии с [10] предполагается, что деформация образца $\varepsilon(t)$ является аддитивной составляющей двух случайных функций:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)$$

при $M[\varepsilon_2(t)] = 0$ и $|\varepsilon_2(t)| \ll \varepsilon_1(t)$ ($M[\,\cdot\,]$ — оператор математического ожидания). В силу этих условий $\varepsilon_2(t)$ рассматривается как некоторый шум, наложенный на случайную функцию $\varepsilon_1(t)$, описывающую стабильные случайные свойства материала. Таким образом, роль случайной функции $\varepsilon_2(t)$ сводится к созданию незначительных флуктуаций каждой реализации $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(t)$. Модель строится для составляющей $\varepsilon_1(t)$, которая называется главной частью деформации $\varepsilon(t)$, при этом $\varepsilon(t) \simeq \varepsilon_1(t)$.

В соответствии с разработанным в [6–8, 10, 11] подходом к построению стохастических моделей ползучести необходимо иметь базовую детерминированную модель, в которой одни функции полагаются детерминированными, а другие — случайными. В настоящей работе в качестве основной используется реологическая модель ползучести и длительной прочности энергетического типа, предложенная в [16]:

$$\begin{gathered}
\varepsilon(t) = e(t) + p(t), \qquad e(t) = \sigma(t)/E, \qquad p(t) = u(t) + v(t) + w(t),\\
u(t) = \sum_{k=1}^{s} u_k(t), \qquad \dot u_k(t) = \lambda_k[D_k(\sigma(t)/\sigma_*)^n - u_k(t)],\\
v(t) = \sum_{k=1}^{s} v_k(t), \qquad \dot v_k(t) = \begin{cases} \lambda_k[V_k(t) - v_k(t)], & V_k(t) > v_k(t),\\ 0, & V_k(t) \leqslant v_k(t), \end{cases}\\
\dot w(t) = c(\sigma(t)/\sigma_*)^m,\\
\sigma(t) = \sigma_0(t)(1 + \omega(t)), \qquad \dot\omega(t) = \alpha\sigma(t)\dot p(t).
\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь ε, e — полная и упругая деформации; p — деформация ползучести; u, v, w — вязкоупругая, вязкопластическая и вязкая составляющие деформации ползучести соответственно; E — модуль Юнга; σ_0, σ — номинальное и истинное напряжения соответственно; ω — параметр поврежденности, который полагается пропорциональным работе истинного напряжения на деформации ползучести; $V_k(t) = B_k(\sigma(t)/\sigma_*)^n$; λ_k, D_k, B_k, c, n, m, σ_* — параметры материала, с помощью которых описываются первая и вторая стадии ползучести, а также ее обратимая после разгрузки часть;

$$\alpha(t) = L_1(\sigma_0(t)/\sigma_0^*)^{m_1} \text{ —} \tag{2}$$

параметр, контролирующий процесс разупрочнения материала на третьей стадии ползучести; L_1, m_1 — характеристики материала (в частных случаях для ряда материалов $\alpha = \text{const}$ [16]); σ_0^* — обезразмеривающая константа.

С целью прогнозирования времени до разрушения $t = t^*$ используется критерий разрушения энергетического типа

$$\int_0^{t_*} \frac{\sigma(t)\,dp(t)}{A_*^c(\sigma_0)} = 1, \tag{3}$$

где

$$A_*^c(\sigma_0) = L_A(\sigma_0/\sigma_0^*)^{m_A} \text{ —} \tag{4}$$

критическая величина работы разрушения истинного напряжения на деформации ползучести при $\sigma_0 = \text{const}$; L_A, m_A — характеристики материала.

Выполненный в [10, 11] детальный анализ модели (1)–(4) с использованием достаточно больших выборок экспериментальных данных для ряда металлов позволил предложить следующую гипотезу: для описания всего спектра кривых изотермической ползучести параметры D_k, B_k, c, L_1, L_A достаточно считать случайными величинами, а остальные параметры — детерминированными величинами.

Поскольку далее рассматривается неизотермическая высокотемпературная ползучесть жаропрочных металлических материалов, обратимой компонентой $u = u(t)$ можно пренебречь, поэтому $D_k = 0$. В настоящей работе для обобщения модели (1)–(4) на случай неизотермической ползучести вместо случайных величин B_k, c, L_1, L_A вводятся случайные функции температуры

$$B_k(T) = A_1^k \,\mathrm{e}^{\alpha_1 T}, \quad c(T) = A_2 \,\mathrm{e}^{\alpha_2 T}, \quad L_1(T) = A_3 \,\mathrm{e}^{\alpha_3 T}, \quad L_A(T) = A_4 \,\mathrm{e}^{\alpha_4 T}, \tag{5}$$

а вместо констант m, n, m_1, m_A — функции

$$m(T) = m_2 + m_3 T, \quad n(T) = n_1 + n_2 T, \quad m_1(T) = k_1 + k_2 T, \quad m_A(T) = l_1 + l_2 T, \tag{6}$$

где параметры A_1^k, A_2, A_3, A_4 — случайные величины; остальные параметры — детерминированные величины; T — температура.

С точки зрения механики деформируемого твердого тела представление (5), (6) означает, что с использованием (1)–(6), варьируя случайные величины A_1^k, A_2, A_3, A_4, можно получить хорошее аналитическое приближение любой реализации (кривой ползучести) с момента $t = 0$ вплоть до момента разрушения $t = t_*$ как при $\sigma_0 = \mathrm{const}$, так и при $\sigma_0 = \sigma_0(t)$ (нестационарные режимы нагружения).

Таким образом, модель одноосной неизотермической ползучести задается соотношениями (1)–(6) при $u(t) = 0$.

3. Для построения стохастической феноменологической модели (1)–(6) необходимо иметь стационарные экспериментальные кривые ползучести, полученные при нескольких фиксированных значениях температуры и различных значениях напряжения $\sigma_0 = \mathrm{const}$ (по нескольку реализаций при каждом номинальном напряжении), вплоть до точки, соответствующей моменту разрушения.

Идентификация параметров модели (1)–(6) включает следующие этапы.

Этап 1. По осредненным кривым ползучести при каждом значении $\sigma_0 = \mathrm{const}$ строится детерминированная модель изотермической ползучести при фиксированной температуре. Проводится осреднение по времени при заданных значениях деформации ползучести, при этом после момента разрушения (достижения точки (t_*, p_*) на кривой ползучести) кривая имеет вертикальную асимптоту (t_*, p_* — время и деформация ползучести в момент разрушения). По экспериментальным данным, соответствующим первой и второй стадиям ползучести, определяются величины λ_k, B_k, c. На начальных участках кривых ползучести $\omega \simeq 0$, $\sigma = \sigma_0$, и из решения (1) следует зависимость

$$p(t) = \sum_{k=1}^{s} B_k (\sigma_0/\sigma_*)^n (1 - \mathrm{e}^{-\lambda_k t}) + c(\sigma_0/\sigma_*)^m t. \tag{7}$$

Результаты обработки большого количества экспериментальных данных показывают, что первые участки кривых ползучести при различных значениях температуры и напряжения подобны [16], поэтому величины λ_k могут быть вычислены по одной реализации, например методом выделения экспоненциальных слагаемых [17]. Затем по методике, предложенной в работе [16], вычисляются параметры B_k, c, n, m.

Для определения величин L_1 и L_A используется вся кривая ползучести при $\sigma_0 = \mathrm{const}$ вплоть до точки, соответствующей моменту разрушения. При этом сначала для каждой осредненной кривой ползучести варьируется величина α и выполняется численный расчет по соотношениям (1), так чтобы расчетная кривая проходила через точку (t_*, p_*), соответствующую моменту разрушения. Определив α, из (3) можно найти величину A_*^c для заданного значения σ_0.

Далее, с использованием всех полученных значений α и A_*^c при различных $\sigma_0 = \mathrm{const}$ строятся степенные аппроксимации (2), (4) и тем самым определяются величины L_1, L_A, m_1, m_A.

Этап 2. На основе экспериментальных данных для параметров B_k, c, n, m, L_1, L_A, m_1, m_A, полученных при конечном наборе значений температур $T_1, T_2, \ldots, T_j$, строится детерминированная модель неизотермической ползучести и определяются параметры аппроксимаций (5), (6).

Этап 3. С использованием всех имеющихся экспериментальных кривых ползучести при $\sigma_0 = \mathrm{const}$ и $T = \mathrm{const}$ строится стохастическая модель неизотермической ползучести. Поскольку все величины, входящие в (6), а также величины α_1, α_2, α_3, α_4 в (5) являются детерминированными, для построения выборок случайных величин A_1^k, A_2, A_3, A_4 необходимо к каждой реализации применить методику, использованную на первом этапе, и вместо соотношений (2), (4), (7) использовать следующие соотношения:

$$p(t) = \sum_{k=1}^{s} A_1^k \,\mathrm{e}^{\alpha_1 T} (\sigma_0/\sigma_*)^{n_1+n_2T} (1 - \mathrm{e}^{-\lambda_k t}) + A_2 \,\mathrm{e}^{\alpha_2 T} (\sigma_0/\sigma_*)^{m_2+m_3T} t,$$

$$\alpha = A_3 \,\mathrm{e}^{\alpha_3 T} (\sigma_0/\sigma_0^*)^{k_1+k_2T}, \qquad A_*^c = A_4 \,\mathrm{e}^{\alpha_4 T} (\sigma_0/\sigma_0^*)^{l_1+l_2T}.$$

После обработки всех реализаций кривых ползучести и получения выборок случайных величин A_1^k, A_2, A_3, A_4 с помощью статистических методов можно определить теоретические законы распределения указанных случайных величин и их корреляционные зависимости. Таким образом, стохастическая модель неизотермической ползучести и длительной прочности построена.

4. В силу физической и стохастической нелинейности модели (1)–(6) не представляется возможным получить аналитические оценки для случайной функции деформации ползучести и времени до разрушения. Поэтому при численной реализации этой модели с заданными законами распределения случайных величин A_1^k, A_2, A_3, A_4 можно использовать метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), применявшийся в расчетах в случае изотермической ползучести [7, 10, 11]. При заданных законах изменения $\sigma_0 = \sigma_0(T)$ и $T = T(t)$ генерируются выборки случайных величин A_1^k, A_2, A_3, A_4, и для каждой такой выборки выполняется расчет по соотношениям (1)–(6). В результате имеем ряд реализаций для случайной функции $p = p(t)$, времени до момента разрушения t_* и деформации p_* в момент разрушения, для которых можно получить оценки математического ожидания, дисперсии, среднеквадратичного отклонения и статистических моментов любого порядка.

Для проверки эффективности работы предложенной модели и ее адекватности экспериментальным данным использованы данные работ [5, 6], в которых содержится необходимая статистическая информация о кривых ползучести для жаропрочного сплава ЖС6КП при значениях температуры $T = 900$, 950, 1000 °C (сплошные линии на рис. 1). С использованием изложенной выше методики идентификации параметров для данного сплава получены следующие значения параметров модели (1)–(6): $s = 1$; $\lambda_1 = 0{,}033$; $m_2 = -2{,}38$; $m_3 = 0{,}004$; $n_1 = 18{,}01$; $n_2 = -0{,}0149$; $k_1 = -6{,}9225$; $k_2 = 0{,}0059$; $l_1 = 18{,}681$; $l_2 = 0{,}0177$; $\alpha_1 = 1{,}75 \cdot 10^{-2}$; $\alpha_2 = 4{,}23 \cdot 10^{-2}$; $\alpha_3 = -1{,}77 \cdot 10^{-2}$; $\alpha_4 = 4{,}87 \cdot 10^{-2}$; $\sigma_* = 140$ МПа; $\sigma_0^* = 10$ МПа. Выборки случайных величин A_1^1, A_2, A_3, A_4 для каждой кривой ползучести, представленной на рис. 1, приведены в таблице. Статистический анализ данных выборок позволил установить, что для величин A_1^1, A_2, A_3 можно использовать логарифмически

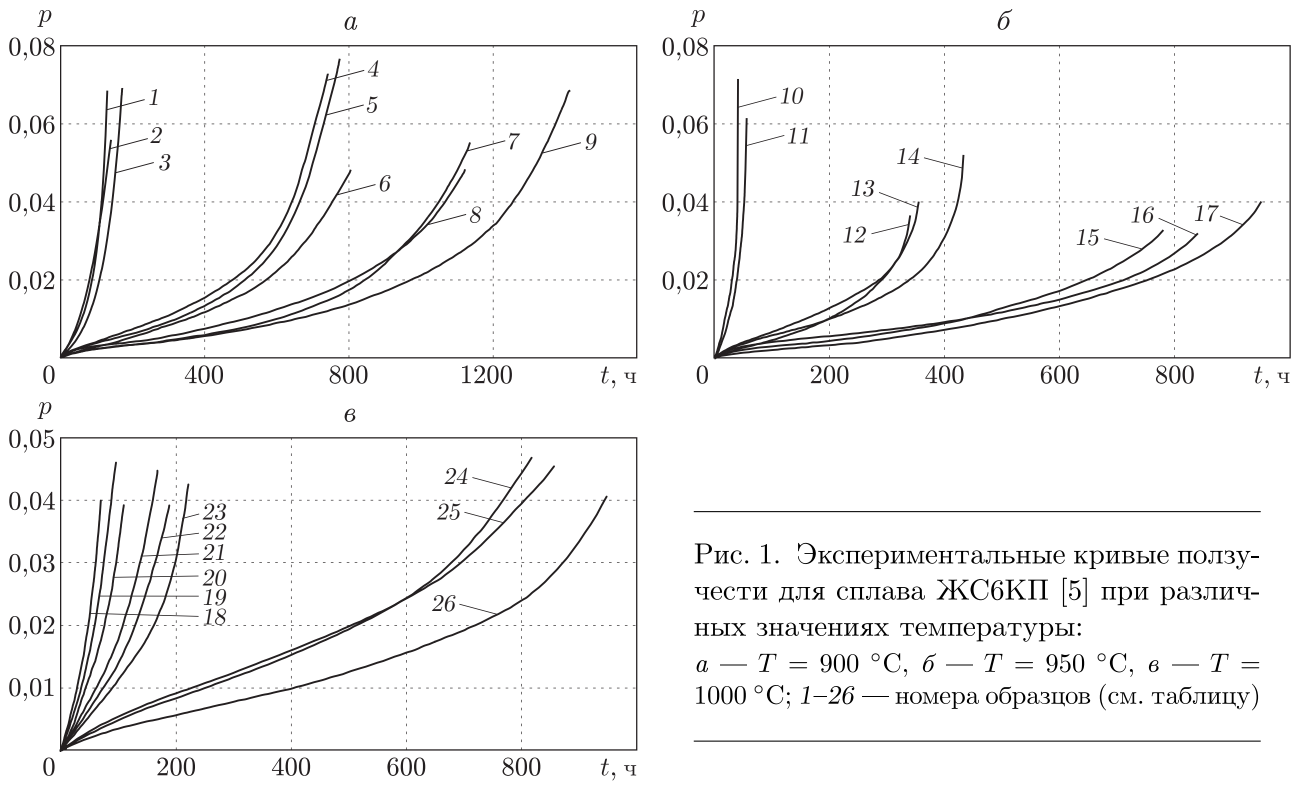

Рис. 1. Экспериментальные кривые ползучести для сплава ЖС6КП [5] при различных значениях температуры:
а — $T = 900$ °C, *б* — $T = 950$ °C, *в* — $T = 1000$ °C; *1–26* — номера образцов (см. таблицу)

нормальные законы распределения, а для величины A_4 — нормальный закон распределения. Ниже приведена матрица коэффициентов корреляции величин A_1^1, A_2, A_3, A_4.

	A_1^1	A_2	A_3	A_4
A_1^1	1,000	0,119	−0,028	−0,266
A_2		1,000	−0,074	−0,194
A_3			1,000	0,152
A_4				1,000

Таким образом, величины A_1^1, A_2, A_3, A_4 можно считать некоррелированными и генерировать независимо друг от друга в соответствии со стохастическими законами их распределения.

Прогнозирование деформаций ползучести для сплава ЖС6КП с использованием модели (1)–(6) осуществлялось методом Монте-Карло. Для этого в соответствии с законом распределения случайных величин A_1^1, A_2, A_3, A_4 генерировались их случайные значения (объем выборки — 20 реализаций), и для каждого полученного набора значений проводилось численное интегрирование соотношений (1)–(6) при заданном законе изменения напряжения и температуры. Затем полученная совокупность реализаций (кривых ползучести) осреднялась и строились доверительные интервалы для деформации ползучести $p = p(t)$, времени разрушения t_* и деформации ползучести p_* в момент разрушения. В частности, такая процедура была выполнена для трех режимов температурного нагружения $T = 900$, 950, 1000 °C.

На рис. 2 приведены результаты расчета по стохастической модели (1)–(6) для сплава ЖС6КП при двух стационарных режимах нагружения: $\sigma_0 = 270$ МПа, $T = 900$ °C (рис. 2,*а*) и $\sigma_0 = 110$ МПа, $T = 950$ °C (рис. 2,*б*).

Значения случайных параметров модели для кривых ползучести, представленных на рис. 1

Номер образца (см. рис. 1)	T, °C	σ_0, МПа	$A_1^1 \cdot 10^{10}$	$A_2 \cdot 10^{22}$	$A_3 \cdot 10^{-8}$	$A_4 \cdot 10^{22}$
1			0,610	1,791	8,437	12,729
2		270	0,486	2,189	6,252	3,899
3			0,341	1,500	7,920	8,409
4			1,329	1,385	6,039	9,067
5	900	200	1,399	1,116	7,268	11,929
6			0,776	1,183	6,350	4,641
7			1,512	1,214	7,672	4,946
8		185	1,806	0,946	7,357	5,986
9			1,194	0,858	7,127	10,753
10		230	0,209	1,138	8,873	12,629
11			0,167	1,580	8,743	14,611
12			0,898	0,985	11,072	8,548
13	950	140	1,491	1,208	7,660	7,858
14			1,686	0,744	10,165	15,090
15			1,333	1,073	10,011	8,679
16		110	2,321	0,892	9,295	7,932
17			1,014	0,932	10,618	11,897
18			0,295	1,571	8,256	8,774
19		125	0,250	1,435	6,268	9,054
20			0,174	1,188	6,021	7,635
21			0,505	1,835	6,240	8,685
22	1000	95	0,458	1,509	6,594	7,432
23			0,934	0,947	9,157	9,289
24			2,202	1,384	6,689	9,291
25		60	2,195	1,593	5,015	8,268
26			1,921	0,876	9,314	8,604

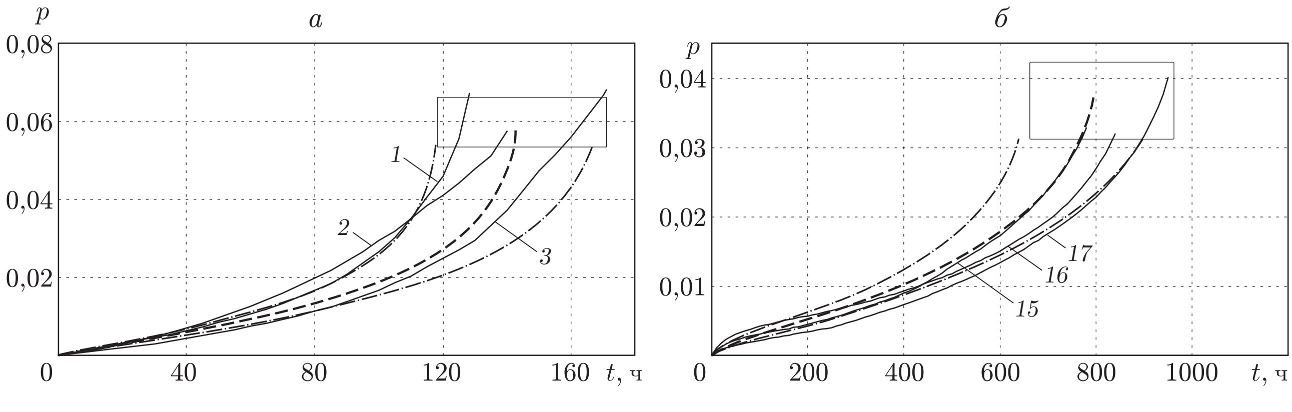

Рис. 2. Расчетная осредненная (штриховая линия) и экспериментальные (линии *1–3*, *15–17*) [5] кривые ползучести для сплава ЖС6КП:

а — $\sigma_0 = 270$ МПа, $T = 900$ °C, *б* — $\sigma_0 = 110$ МПа, $T = 950$ °C; штрихпунктирные линии — границы 95 %-го доверительного интервала; прямоугольник — область разрушения (декартово произведение доверительных интервалов времени разрушения и деформаций в момент разрушения); *1–3*, *15–17* — номера образцов (см. таблицу)

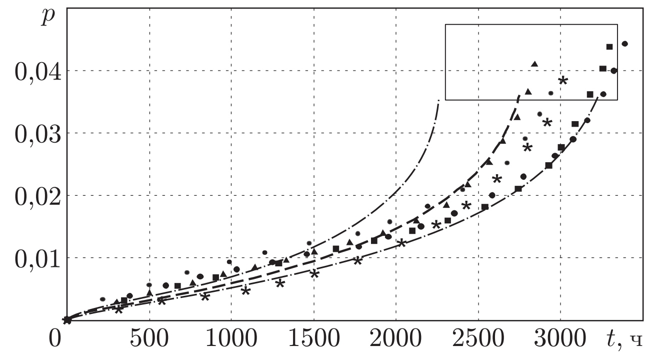

Рис. 3. Расчетные и экспериментальные данные для сплава ЖС6КП при $\sigma_0 = 135$ МПа, $T = 900$ °C в режиме стационарного нагружения:
штриховая линия — осредненная кривая ползучести; точки — экспериментальные данные для пяти образцов [5]; штрихпунктирные линии — границы 95 %-го доверительного интервала; прямоугольник — область разрушения

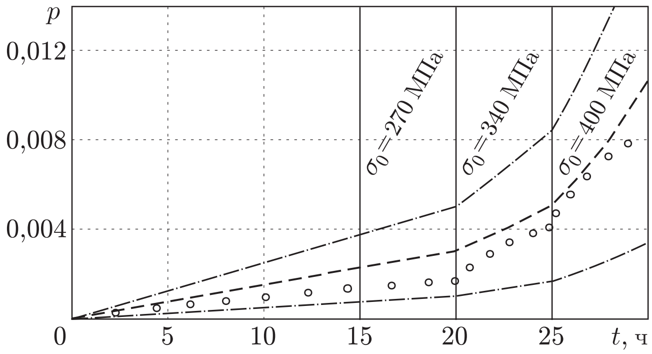

Рис. 4. Расчетные и экспериментальные данные для сплава ЖС6КП при $T = 900$ °C в режиме нестационарного нагружения:
штриховая линия — осредненная кривая ползучести; точки — экспериментальные данные [6]; штрихпунктирные линии — границы 95 %-го доверительного интервала

Кроме того, выполнен расчет при $\sigma_0 = 135$ МПа, $T = 900$ °C, т. е. проведен прогноз в область экстраполяции данных (экспериментальные данные при этом значении напряжения не использовались для построения предложенной модели) (рис. 3).

Выполнен прогноз деформации ползучести в область экстраполяции данных для одного образца [6] в случае $T = 900$ °C при режиме нестационарного нагружения по следующей программе (рис. 4): при $t \in [0, 20 \text{ ч}]$ $\sigma_0(t) = 270$ МПа; при $t \in [20 \text{ ч}, 25 \text{ ч}]$ $\sigma_0(t) = 340$ МПа; при $t \in [25 \text{ ч}, 30 \text{ ч}]$ $\sigma_0(t) = 400$ МПа.

Анализ приведенных расчетных и экспериментальных данных показывает, что в условиях неизотермической ползучести предложенная стохастическая модель позволяет получить приемлемые результаты и может быть использована для оценки надежности конструкции, а также (с учетом возможности ее обобщения на случай сложного напряженного состояния [16]) для решения стохастических краевых задач ползучести при соответствующих температурно-силовых режимах нагружения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
2. **Салли А.** Ползучесть металлов и жаропрочные сплавы. М.: Оборонгиз, 1953.

3. **Локощенко А. М., Мякотин С. А., Шестериков С. А.** Ползучесть и длительная прочность стали 12Х18Н10Т в условиях сложного напряженного состояния // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1979. № 4. С. 87–94.
4. **Локощенко А. М., Шестериков С. А.** Методика описания ползучести и длительной прочности при чистом растяжении // ПМТФ. 1980. № 3. С. 155–159.
5. **Бадаев А. Н.** К вопросу об определении функции распределения параметров уравнения состояния ползучести // Пробл. прочности. 1984. № 12. С. 22–26.
6. **Ковпак В. И., Бадаев А. Н.** Унифицированный подход к прогнозированию ползучести. Вопросы жаропрочных материалов в статистическом аспекте // Унифицированные методы определения ползучести и длительной прочности. М.: Изд-во стандартов, 1986. С. 51–62.
7. **Радченко В. П.** Прогнозирование ползучести и длительной прочности материалов на основе энергетического подхода в стохастической постановке // Пробл. прочности. 1992. № 2. С. 34–40.
8. **Самарин Ю. П.** Стохастические механические характеристики и надежность конструкций с реологическими свойствами // Ползучесть и длительная прочность конструкций: Сб. науч. тр. Куйбышев: Куйбышев. политехн. ин-т, 1986. С. 8–17.
9. **Борисов С. П., Борщев Н. И., Степанов М. Н., Хазанов И. И.** Неустановившаяся ползучесть и релаксация сплава АК4-1 в вероятностном аспекте // Пробл. прочности. 1975. № 1. С. 22–26.
10. **Радченко В. П., Симонов А. В., Дудкин С. А.** Стохастический вариант одномерной теории ползучести и длительной прочности // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2001. № 12. С. 73–84.
11. **Радченко В. П., Голудин Е. П.** Феноменологическая стохастическая модель изотермической ползучести поливинилхлоридного пластиката // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2008. № 1. С. 45–52.
12. **Радченко В. П., Попов Н. Н.** Статистические характеристики полей напряжений и деформаций ползучести стохастически неоднородной плоскости // Изв. вузов. Машиностроение. 2006. № 2. С. 3–11.
13. **Попов Н. Н., Радченко В. П.** Нелинейная стохастическая задача ползучести неоднородной плоскости с учетом поврежденности материала // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 2. С. 140–146.
14. **Попов Н. Н., Самарин Ю. П.** Пространственная задача стационарной ползучести стохастически неоднородной среды // ПМТФ. 1985. № 2. С. 150–155.
15. **Попов Н. Н., Исуткина В. Н.** Построение аналитического решения двумерной стохастической задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2007. № 2. С. 90–94.
16. **Радченко В. П.** Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций / В. П. Радченко, Ю. А. Еремин. М.: Машиностроение-1, 2004.
17. **Самарин Ю. П.** Построение экспоненциальных аппроксимаций для кривых ползучести методом последовательного выделения экспоненциальных слагаемых // Пробл. прочности. 1974. № 9. С. 24–27.

Поступила в редакцию 1/IX 2011 г.