

ны, то согласно фиг. 2 для такого взрыва  $l/r_0 = 180$ ; отсюда расчетное значение  $nl_n/q = 16$ .

Это значение на фиг. 5 представлено штриховой линией. Для нескольких взрывов было подсчитано количество газов, необходимое для обеспечения полученного в опыте разрушения. Такие данные приведены на фиг. 5 в виде процентов от количества газов, реально выделяемых зарядами, и являются вполне правдоподобными.

Другую оценку размера зоны радиальных трещин в экспериментах можно получить по модели п. 1, в которой предполагается, что продукты детонации заперты в полости взрыва и в трещины не проходят. В этом предположении согласно фиг. 1 от заряда диаметром 2,4 мм в оргстекле получается пять трещин размером  $115 r_0 = 138$  мм. Отсюда  $nl_n/q = 10$ . Это значение на фиг. 5 нанесено штрихпунктирной линией. Видно, что к этому уровню экспериментальные данные подошли уже достаточно близко.

С дальнейшим увеличением толщины пластины можно ожидать выход экспериментальных данных и на верхнюю теоретическую асимптоту. Все это подтверждает теоретические оценки п. 1, 2.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шер Е. И. Оценка дробящего действия удлиненного заряда в хрупкой среде.— ФТПРПИ, 1975, № 1.
2. Шер Е. И. Пример расчета движения радиальных трещин, образующихся при взрыве в хрупкой среде в квазистатическом приближении.— ФТПРПИ, 1982, № 2.
3. Родионов В. П., Романов А. И. и др. Механический эффект подземного взрыва. М.: Недра, 1971.
4. Чедвик П., Коке А., Гюнксон Г. Механика глубинных подземных взрывов. М.: Мир, 1966.
5. Ouchterlony F. Fracture mechanics applied to rock blasting. Stockholm, 1973. (Rept./Swedish Detonic Res. Found.; DS 1973 : 29).
6. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
7. Шер Е. И. Об одном случае равновесия системы радиальных трещин.— ПМТФ, 1974, № 5.
8. Westman R. A. Pressurized star crack.— J. Math. and Phys., 1964, vol. 43, N 3.
9. Кузнецов В. М., Шацкевич А. Ф. О взаимодействии продуктов детонации со стенками взрывной полости в грунтах и горных породах.— ФГВ, 1977, т. 13, № 5.
10. Комир В. М., Кузнецов В. М., Шацкевич А. Ф. О влиянии газов — продуктов детонации — на разрушение горных пород взрывом.— ФТПРПИ, 1979, № 6.
11. Бобряков А. П., Покровский Г. Н., Серпенинов Б. Н. Исследование процесса разрушения плоских образцов ударом.— В кн.: Вопросы механизма разрушения горных пород. Новосибирск: ИГД СО АН СССР, 1976.
12. Дубнов Л. В., Бахаревич П. С., Романов А. И. Промышленные взрывчатые вещества. М.: Недра, 1973.

Поступила 1/VI 1983 г.

УДК 539.3

#### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВНЕДРЕНИЯ ЖЕСТКОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКУЮ ПРЕГРАДУ

В. И. КОНДАУРОВ, И. Б. ПЕТРОВ, А. С. ХОЛОДОВ

(Москва)

Рассматривается осесимметричная задача проникания абсолютно жесткого тела вращения в деформируемую преграду конечной толщины. Реология материала преграды описывается уравнениями течения упругопластических тел. Важными особенностями таких задач являются ярко выраженный волновой характер решения и большие деформации, испытываемые преградой. Экспериментальному исследованию задач проникания посвящено большое количество работ, на основе которых изучено влияние разнообразных определяющих задачу параметров и наблюдаемых эффектов и построены различные приближенные методы расчета процессов внедрения. Однако наиболее детальная картина процессов взаимодействия ударников с деформируемыми преградами может быть получена лишь с помощью численного решения подобных задач на основе различных реологических моделей и последующего сопоставления с результатами экспериментов для уточнения математической модели.

Сложный характер этих задач представляет весьма жесткие требования к выбору численного метода их решения, выбору независимых переменных и т. п. В частности, для больших глубин внедрения использование традиционных лагранжевых переменных приводит к сильному искажению (а часто и к нарушению регулярности)

разностной сетки и необходимости ее периодической перестройки (что может приводить к заметному снижению точности). Использование фиксированных в пространстве эйлеровых координат приводит к трудностям в постановке граничных условий на поверхности преграды и необходимости выбора большого числа узлов разностной сетки для получения приемлемой точности при сквозном расчете без явного выделения поверхности преграды. Оба указанных подхода использовались при численном решении подобной рода задач, например, в [1—5]. В данной работе используется подвижная система координат (связанная с верхней и нижней границами преграды) и сеточно-характеристический метод [6], позволяющий наиболее естественным образом строить вычислительный алгоритм вблизи границ области интегрирования, в определенной мере учитывать область зависимости и волновой характер искомого решения. Эта явная схема первого порядка точности относится к числу схем с положительной аппроксимацией (монотонные или мажорантные схемы по другой терминологии) и, как показано в [7], имеет минимальную аппроксимационную вязкость среди явных двухслойных схем такого рода, что является важным свойством при сквозном расчете негладких (разрывных) решений без явного выделения поверхностей разрывов [8].

**Постановка задачи.** Для описания поведения деформируемой преграды под действием динамических нагрузок со стороны абсолютно твердого ударника воспользуемся системой уравнений [9]

$$(1) \quad \rho \dot{\mathbf{V}} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{Q}[\nabla \mathbf{V}] = 0,$$

включающей уравнения движения и реологическое уравнение Прандтля—Рейсса для однородного изотропного упруго-идеально-пластического материала, подчиняющегося условию пластичности Мизеса

$$(2) \quad f(\boldsymbol{\sigma}) = \operatorname{tr}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}) - 2k^2 = 0, \quad k = \text{const.}$$

В соотношениях (1) величина  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\sigma})$  представляет собой тензор четвертого ранга, который в эйлеровой системе координат  $x^i$  с метрическим тензором  $g_{ij}$  для условия пластичности (2) имеет вид

$$(3) \quad Q_{ij}^{kl} = \lambda g_{ij} g^{kl} + \mu (\delta_i^k \delta_j^l + \delta_j^k \delta_i^l) - \frac{\mu}{k^2} H(f) s_{ij} s^{kl}.$$

Точка обозначает материальную производную по времени  $t$  в (1);  $\rho$  — плотность материала в актуальной конфигурации тела;  $\boldsymbol{\sigma}$  — тензор напряжений Коши;  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - (1/3) \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{I}$  — девиатор напряжений;  $\mathbf{I}$  — единичный тензор;  $k$  — предел текучести на сдвиг;  $\lambda, \mu$  — упругие постоянные;  $H(f)$  — функция, равная нулю при  $f < 0$ , единице при  $f \geq 0$ .

Можно показать [4], что система (1) пригодна для описания конечных деформаций изотермической упругопластической среды, если справедливы ограничения

$$(4) \quad \rho_0 V_0^2 / \sigma_0, \quad \sigma_0 / k \sim O(1), \quad (\sigma_0 / \mu)^2 \ll 1,$$

где  $\rho_0, V_0, \sigma_0$  — характерные плотность, скорость и напряжение соответственно.

Ограничения (4) соответствуют скоростям соударения порядка скорости пластических волн  $[(\lambda + 2\mu/3)/\rho_0]^{1/2}$ . В этом случае членами, связанными с вращением частицы как жесткого целого, в тензоре скоростей изменения напряжений можно пренебречь и использовать вместо него  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ .

В рассматриваемом приближении система уравнений (1) относительно компонент  $\mathbf{V}, \boldsymbol{\sigma}$  представляет собой квазилинейную гиперболическую систему с четырьмя семействами характеристических поверхностей. Скорости распространения  $c_i$  этих поверхностей относительно частиц среды в направлении нормали  $\mathbf{v}$  определяются формулами [10]

$$(5) \quad \rho c_{1,2}^2 = \mu + \frac{\lambda + \mu}{2} (1 - \tilde{\kappa}^2 \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}) \left\{ 1 \pm \left( 1 + \frac{4\tilde{\kappa}^2 |\mathbf{s} + \mathbf{v}|^2}{1 - \tilde{\kappa}^2 \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}} \right)^{1/2} \right\},$$

$$c_3^2 = \mu / \rho, \quad c_4^2 = 0, \quad \mathbf{s} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{v}, \quad \tilde{\kappa} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{H(f)}{k^2}.$$

Для плоской и осесимметричной задач пропадает конус, соответствующий  $c_3$ .

В случае осевой симметрии ( $x^1 \equiv R, x^2 \equiv Z, x^3 \equiv \theta, \partial/\partial\theta \equiv 0$ ) и безразмерных переменных  $\bar{x}^i = x^i/x_0, \bar{V}_R = V_R/V_0, \bar{V}_Z = V_Z/V_0, \bar{t} = tV_0/x_0, V_0 = \sqrt{k/\rho_0}, \bar{\sigma}_{RR} = \sigma_{RR}/k, \bar{\sigma}_{ZZ} = \sigma_{ZZ}/k, \bar{\sigma}_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}/k, \bar{\sigma}_{RZ} = \sigma_{RZ}/k, \bar{\lambda} = \lambda/k, \bar{\mu} = \mu/k, \bar{\rho} = \rho/\rho_0$ , где компоненты скорости и напряжения с индексами  $R, Z$  и  $\theta$  означают физические компоненты вектора  $\mathbf{V}$  и тензора  $\boldsymbol{\sigma}$ , система (1) записывается в виде

$$(6) \quad \frac{\partial \mathbf{1}}{\partial t} + A^k \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k} - \mathbf{f} = 0, \quad k = 1, 2, \quad \mathbf{u} = \{V_R, V_Z, \sigma_{RR}, \sigma_{ZZ}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{RZ}\}.$$

Отличные от нуля коэффициенты матриц  $A^h$  будут такими:

$$\begin{aligned} A_{13}^1 &= A_{26}^1 = A_{16}^2 = A_{25}^2 = -1, & A_{31}^1 &= g_1^2 - \lambda - 2\mu, \\ A_{32}^1 &= A_{61}^1 = A_{31}^2 = g_1 g_4, & A_{41}^1 &= g_1 g_3 - \lambda, & A_{42}^1 &= A_{41}^2 = g_3 g_4, \\ A_{51}^1 &= A_{32}^2 = g_2 g_1 - \lambda, & A_{52}^1 &= A_{51}^2 = A_{62}^2 = g_2 g_4, \\ A_{62}^1 &= A_{61}^2 = g_4^2 - \mu, & A_{42}^2 &= g_2 g_3 - \lambda, & A_{52}^2 &= g_2^2 - \lambda - 2\mu, \\ g &= \{\kappa_{RR}, \kappa_{\theta\theta}, \kappa_{ZZ}, \kappa_{RZ}\}, & \kappa^2 &= \mu H(f)/k^2, \\ f &= \left\{ \frac{\sigma_{RR} - \sigma_{\theta\theta}}{\rho R}, \frac{\sigma_{RZ}}{\rho R}, (g_1 g_3 - \lambda) \frac{V_R}{R}, (g_3^2 - \lambda - 2\mu) \frac{V_R}{R}, (g_2 g_3 - \lambda) \frac{V_R}{R}, g_3 g_4 \frac{V_R}{R} \right\}. \end{aligned}$$

Сформулируем теперь краевые условия для системы (6), соответствующие задаче об осевом ударе абсолютно жесткого кругового цилиндра с конической головной частью в упругопластическую преграду, занимающую в начальный момент времени  $t = 0$  область  $\{0 \leq R \leq R_0, 0 \leq Z \leq 1\}$ , где  $R_0$  — отношение первоначального радиуса преграды к ее толщине. Пусть боковая (цилиндрическая) часть преграды жестко заделана, т. е. скорости ее точек равны нулю. Обозначим  $Z^{H,B} = Z^{H,B}(t, R)$  функции, задающие текущее положение нижней и верхней границ, подлежащие определению вместе с  $u(t, R, Z)$ .

Для функций  $Z^{H,B}(t, R)$  справедливы уравнения

$$(7) \quad \left. \frac{\partial Z^{B,H}}{\partial t}(t, R) \right|_R + V_R(t, R, Z^{B,H}(t, R)) \frac{\partial Z^{B,H}}{\partial R}(t, R) = V_Z(t, R, Z^{B,H}(t, R)),$$

позволяющие определить форму поверхностей  $Z^{B,H}(t, R)$  по их начальной форме  $Z^B(0, R) = 1, Z^H(0, R) = 0$ .

Уравнение (7) следует из дифференцирования по  $t$  зависимости  $Z^{H,B} = Z^{H,B} \times [R(\xi^2, t), t]$  как сложной функции времени  $t$  и лагранжевых координат  $\xi^2$  и определения вектора скорости материальной частицы. Отметим, что условие  $V_R = 0$  при  $R = 0$  и  $R = R_0$  избавляет от необходимости ставить для (7) граничные условия, т. е. решение (7) полностью определяется только своими начальными данными.

Решение системы уравнений (6) определяется в области  $\{0 \leq R \leq R_0, Z^H(t, R) \leq Z \leq Z^B(t, R)\}$  с невозмущенными начальными условиями  $u(0, R, Z) = 0$ .

Граничные условия на боковой поверхности преграды  $R = R_0, 0 \leq Z \leq 1$  имеют вид

$$V_R(t, R_0, Z) = V_Z(Z, R_0, t) = 0.$$

Нижняя поверхность преграды  $Z = Z^H(t, R)$  выбиралась ненагруженной

$$(8) \quad \sigma_{nn}(t, R, Z^H(t, R)) = \sigma_{nt}(t, R, Z^H(t, R)) = 0.$$

На верхней поверхности преграды в зависимости от того, находится ли она для данных значений  $R, t$  в контакте с поверхностью ударника или нет, ставились либо условия (8), либо

$$(9) \quad V_n = V_B(t) / \sqrt{1 + (\partial Z^B / \partial R)^2}, \quad \sigma_{nt}(t, R, Z^B(t, R)) = 0, \\ V_n = \left( V_Z - V_R \frac{\partial Z^B(t, R)}{\partial R} \right) / \sqrt{1 + (\partial Z^B / \partial R)^2}.$$

где  $V_B(t) \leq 0$  — скорость ударника, определяемая уравнением движения

$$m_0 dV_B/dt = \int_{S_*} \sigma_{nn} dS, \quad V_B(0) = -V_B^0, \quad dS = 2\pi R dR.$$

Здесь интегрирование проводится для всех значений  $R$ , для которых  $Z^H(t, R) \leq Z^B(t, R)$  и  $\sigma_{nn}(t, R, Z^B(t, R)) < 0, m_0$  — масса ударника,  $Z^H = \psi(t, R) = \psi(0, R) + \int_0^t V_B(\tau) d\tau, R \leq R_0^*$  — уравнение поверхности головной части осесимметричного

ударника (для конической головной части  $\psi(0, R) = 1 + R \operatorname{tg} \varphi$ ). Если  $Z^B(t, R)$ , определяемое из (7), меньше  $\psi(t, R)$ , то для таких значений  $R$  использовались граничные условия (8), в противном случае полагалось  $Z^B(t, R) = \psi(t, R)$  и использовались граничные условия (9). Для тех значений  $R$ , для которых в момент времени  $t$  уже имело

место  $Z^B(t, R) = \psi(t, R)$ , использовались условия (9), но если при этом  $V_n < < V_B(t) / \sqrt{1 + (\partial Z^B / \partial R)^2}$ , то дальнейшее вычисление  $Z^B(t, R)$  осуществляется в соответствии с (7) и с использованием граничных условий (8).

На оси симметрии  $R = 0$  использовались асимптотические уравнения, получаемые из (6) предельным переходом при  $R \rightarrow 0$ . При этом

$$(10) \quad V_R = 0, \sigma_{RR} = \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{RZ} = 0, R = 0, Z^H(t, 0) \leq Z \leq Z^B(t, 0).$$

Для численных расчетов использовалась подвижная система координат  $\eta^i = \eta^i(x^m, t)$  такая, что

$$(11) \quad \eta^1 = R/R_0, \eta^2 = (Z - Z^H)/(Z^B - Z^H).$$

Соотношения (11) отображают актуальную конфигурацию тела на единичный квадрат, причем равномерной координатной сетке в плоскости  $(\eta^1, \eta^2)$  соответствует в плоскости  $(R, Z)$  криволинейная сетка, шаг которой постоянен при фиксированном  $R$ .

Если обозначить  $\eta_m^i = \partial \eta^i / \partial x^m$ ,  $w^i = \partial x^i / \partial t \big|_{\eta^m}$ , то система (6) в переменных  $(t, \eta^i)$  запишется в виде

$$(12) \quad \partial \mathbf{u} / \partial t \big|_{\eta^i} + \mathbf{B}^m (\partial \mathbf{u} / \partial \eta^m) - \mathbf{f} = 0,$$

$$\mathbf{B}^m = \eta_m^i \{ \mathbf{A}^i - (V^i - w^i) \mathbf{I} \}, \quad 0 \leq \eta^i \leq 1, \quad i, m = 1, 2,$$

$$R = R_0 \eta^1, \quad Z = Z^H(\eta^1, t) + \eta^2 [Z^B(\eta^1, t) - Z^H(\eta^1, t)].$$

Система (12) по-прежнему является гиперболической. Скорости  $\lambda^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, 6$ ) распространения слабых разрывов в направлении нормали  $n_i = v_m (\partial x^m / \partial \eta^i)$  определяются выражением

$$\lambda^\alpha = c_\alpha + (V^m - w^m) \eta_m^i n_i,$$

где  $c_\alpha$  заданы формулами (5).

Из гиперболичности следует также [11], что существует невырожденная матрица  $\omega = \omega(\mathbf{u}, \mathbf{n})$  такая, что

$$(13) \quad \omega_{\alpha\beta} B_{\beta\gamma}^m n_m = \omega_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \delta_{\beta\gamma} \quad (m = 1, 2, \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, 6),$$

где суммирование по  $\alpha$  отсутствует. Как видно из (13), строками  $\omega$  являются левые собственные векторы матрицы  $\mathbf{B}^n n_m$ .

Обозначим теперь матрицу  $\omega$ , соответствующую  $\mathbf{n} = (1, 0)$ , символом  $\omega^1$ . Умножая систему (12) слева на  $\omega^1$  и используя (13), получим характеристическую форму системы уравнений

$$(14) \quad \omega_{\alpha\beta}^1 (du_\beta / ds_1^\alpha) + \omega_{\alpha\beta}^1 B_{\beta\gamma}^2 (du_\gamma / d\eta^2) = \omega_{\alpha\beta}^1 f_\beta,$$

где суммирование по  $\alpha$  отсутствует;  $du_\beta / ds_1^\alpha = \partial u_\beta / \partial t + \lambda_1^\alpha (\partial u_\beta / \partial \eta^1)$  — производная вдоль бихарактеристики, соответствующей скорости  $\lambda_1^\alpha$  и нормали  $\mathbf{n} = (1, 0)$ . Умножая (14) слева на  $\Omega^1 = (\omega^1)^{-1}$ , получим

$$(15) \quad \Omega_{\alpha\beta}^1 \omega_{\beta\gamma}^1 (du_\gamma / ds_1^\alpha) + B_{\alpha\gamma}^2 (\partial u_\gamma / \partial \eta^2) = f_\alpha.$$

Аналогично, обозначая  $\omega^2$  матрицу  $\omega$  для значения  $\mathbf{n} = (0, 1)$  и  $\Omega^2 = (\omega^2)^{-1}$ , найдем

$$(16) \quad \Omega_{\alpha\beta}^2 \omega_{\beta\gamma}^2 (du_\gamma / ds_2^\beta) + B_{\alpha\gamma}^1 (\partial u_\gamma / \partial \eta^1) = f_\alpha.$$

Из (12), (15) и (16) следует

$$(17) \quad \partial u_\alpha / \partial t \big|_{\eta^m} = \Omega_{\alpha\beta}^m \omega_{\beta\gamma}^m (du_\gamma / ds_m^\beta) - f_\alpha \quad (m = 1, 2, \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, 6).$$

Уравнение (17), кроме производной по времени, содержит производные только вдоль бихарактеристик и удобно для построения характеристических методов расчета.

**Метод численного расчета.** Для численного решения сформулированных краевых задач использовался явный сеточно-характеристический метод [6, 7] сквозного счета.

Решение в этом методе ищется по слоям  $t = \text{const}$ , узлы разностной сетки образуются пересечением линий  $\eta^m = \text{const}$ . Каждый узел определен числами  $(l_1, l_2, n)$ , где  $\eta^i = l_i h_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $h_i$  — шаг сетки по пространственным координатам,  $t = \sum_n \tau_n$ ,  $\tau_n$  — шаг по времени. Для вычисления вектора решения  $\mathbf{u}$  во внутреннем узле на  $n + 1$

слое по значениям на  $n$  слое используются соотношения

$$(18) \quad \mathbf{u}_{l_1 l_2}^{n+1} = \mathbf{G} \mathbf{u}_{l_1 l_2}^n + \tau \mathbf{f}_{l_1 l_2}^n, \quad \mathbf{G} = \mathbf{I} + \frac{\tau}{h_i} \{ \Omega^i \Lambda_+^i \omega^i \Delta_-^i - \Omega^i \Lambda_-^i \omega^i \Delta_+^i \}_{l_1 l_2}, \quad \Lambda_{\pm}^i = \\ = 0,5 (\Lambda^i + |\Lambda^i|), \quad \Lambda_-^i = 0,5 (\Lambda^i - |\Lambda^i|),$$

где  $\Lambda^i$  — диагональные матрицы, составленные из собственных чисел  $\lambda^\alpha$ ,  $\Delta_{\pm}^i$  — правые и левые разности вектора решения на  $n$ -м слое вдоль координатной линии  $\eta^i$ .

Разностная схема (18) следует из (17) при замене производных вдоль бихарактеристик  $du/ds_i^\beta$  разностным соотношением  $(\mathbf{u}_{l_1 l_2}^{n+1} - \mathbf{u}_{(\beta, i)})/\tau_n$ , где  $\mathbf{u}_{(\beta, i)}$  — значение вектора решения в точке пересечения бихарактеристики, соответствующей  $\lambda_i^\beta$  с координатной линией  $\eta^i$  на  $n$ -м временном слое. Значение  $\mathbf{u}_{(\beta, k)}$  определяется через значения  $\mathbf{u}_{l_1 l_2}^n$  в ближайших двух узлах сетки линейной интерполяцией. Вследствие этого рассматриваемая схема имеет пятиточечный шаблон.

Схема (18) обладает наименьшей аппроксимационной вязкостью среди явных двухслойных схем первого порядка точности [6, 7] и относится к классу схем, вырабатывающих монотонный профиль «размазанной» ударной волны [8].

Для вычисления решения на границах использовались два граничных условия (9) и четыре уравнения в характеристической форме, которые соответствуют характеристическим плоскостям, проходящим внутри тела. Для границы  $\eta^1 = 1$  эти уравнения имеют вид (14), где  $\alpha = 1, 2, 3, 4, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, 6$ . С учетом равенства (13), из которого следует

$$B_{\beta\gamma}^2 = \Omega_{\beta\alpha}^2 \lambda_2^\alpha \omega_{\alpha\gamma},$$

система (14) может быть записана в форме, аналогичной (17), в которую входят только производные вдоль бихарактеристик

$$(19) \quad \omega_{\alpha\beta}^1 \frac{du_\beta}{ds_1^\alpha} + \omega_{\alpha\beta}^1 \left( \Omega_{\beta\gamma}^2 \omega_{\gamma\lambda}^2 \frac{du_\lambda}{ds_2^\gamma} - \frac{\partial u_\beta}{\partial t} \right) = \omega_{\alpha\beta}^1 f_\beta,$$

$\alpha = 1, 2, 3, 4, \beta, \gamma, \lambda = 1, 2, \dots, 6$ , суммирование по  $\alpha$  отсутствует. Заменяем теперь в (19), как и в случае внутренних точек, производные  $du/ds_i^\alpha$  разностным соотношением  $(\mathbf{u}_{l_1 l_2}^{i+1} - \mathbf{u}_{(\beta, i)})/\tau_n$ . В результате получим систему четырех разностных уравнений

$$\omega_{l_1 l_2}^1 \mathbf{u}_{l_1 l_2}^{n+1} = \tau_n \omega_{l_1 l_2}^1 \mathbf{f}_{l_1 l_2}^n + \frac{\tau_n}{h_1} \Lambda_-^1 \omega^1 \Delta_- \mathbf{u}_{l_1 l_2}^n + \frac{\tau_n}{h_2} \omega^1 (\Omega_+^2 \Lambda_+^2 \omega^2 \Delta_-^2 - \Omega_-^2 \Lambda_-^2 \omega^2 \Delta_+^2) \mathbf{u}_{l_1 l_2}^n,$$

которая замыкается двумя граничными условиями (8), (9).

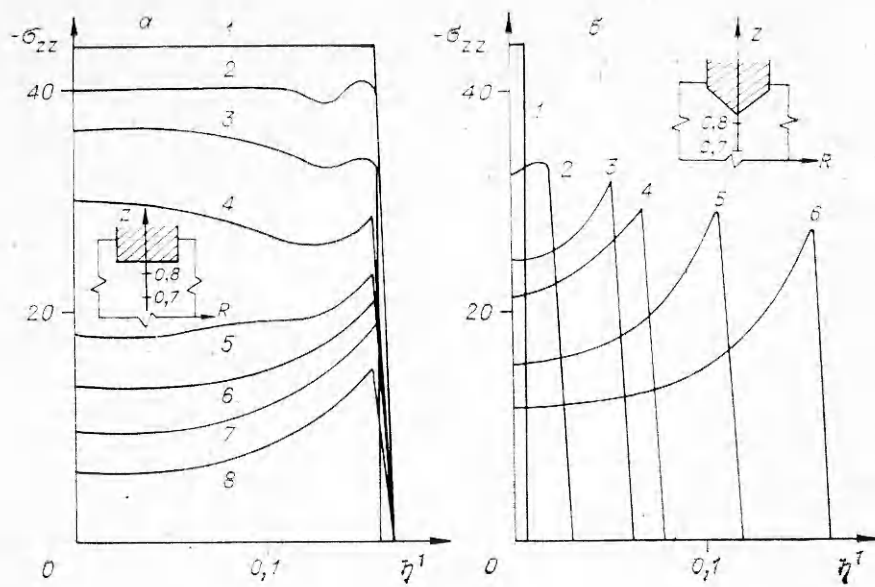
**Результаты численных расчетов.** В изложенной выше постановке были проведены расчеты процессов соударения абсолютно жестких осесимметричных ударников с деформируемыми преградами конечной толщины для различных значений параметров, определяющих задачу. Некоторые результаты этих расчетов представлены на фиг. 1—6.

Важной особенностью рассматриваемой задачи является сильное влияние на решение радиальных волн разгрузки. Это влияние сравнительно мало освещалось в имеющихся работах по пробиванию упругопластических преград. В частности, как видно из распределения напряжений  $\sigma_{zz}(\eta^1)$  при  $\eta^2 = 1$  (фиг. 1) и  $\sigma_{zz}(\eta^2)$  при  $\eta^1 = 0$  (фиг. 2), для моментов времени, при которых возмущения от удара жестким цилиндром и конусом еще не достигли тыльной стороны преграды, влияние радиальных волн на этой начальной стадии процесса внедрения является определяющим. На фиг. 1, *a* кривые 1—8 соответствуют  $\varphi = 0,5\pi, t = 0; 3,5 \cdot 10^{-3}; 6,43 \cdot 10^{-3}; 1,2 \times 10^{-2}; 1,82 \cdot 10^{-2}; 2,1 \cdot 10^{-2}; 2,4 \cdot 10^{-2}; 3 \cdot 10^{-2}$ ; на фиг. 1, *b* кривые 1—6 соответствуют  $\varphi = 0,25\pi, t = 0; 6,43 \cdot 10^{-3}; 2,11 \cdot 10^{-2}; 2,7 \cdot 10^{-2}; 3,45 \cdot 10^{-2}; 6,78 \cdot 10^{-2}$ . На фиг. 2, *a* кривые 1—6 соответствуют  $\varphi = 0,5\pi, t = 3,5 \cdot 10^{-3}; 6,4 \cdot 10^{-3}; 1,2 \cdot 10^{-2}; 1,8 \cdot 10^{-2}; 2,4 \times 10^{-2}; 3,0 \cdot 10^{-2}$ ; а на фиг. 2, *b* кривые 1—5 соответствуют  $\varphi = 0,25\pi, t = 3,5 \cdot 10^{-3}; 6,4 \cdot 10^{-3}; 1,8 \cdot 10^{-2}; 2,4 \cdot 10^{-2}; 3,9 \cdot 10^{-2}$ .

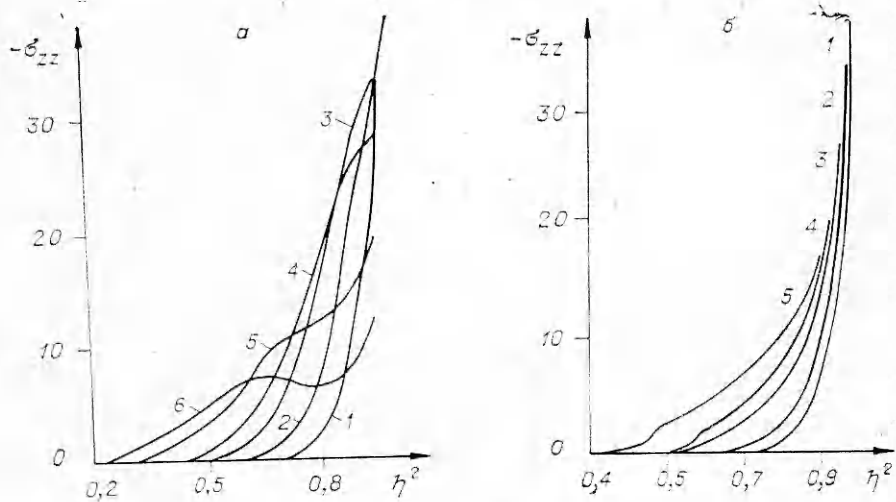
Здесь и далее расчеты проводились для следующих безразмерных параметров задачи:  $m_0 = 0,174, V_0^0 = 2,33, R_0^* = 0,16, H = 1,0, \lambda = 148,0, \mu = 99,0$ .

Поведение силы сопротивления во времени представлено на фиг. 3. Быстрое падение  $F(t) = \int_{S_*} \sigma_{nn} dS$  ( $S_*$  — проекция поверхности контакта на плоскость  $Z = \text{const}$ )

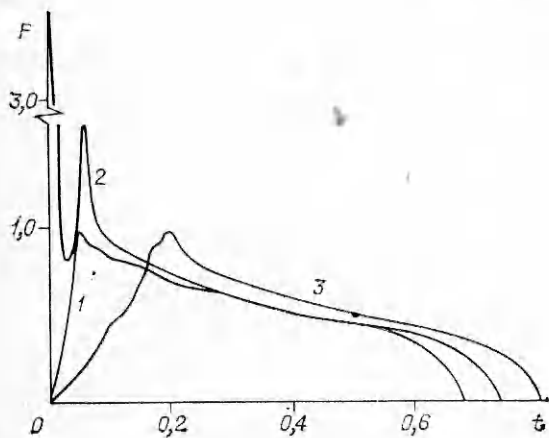
и наличие локального минимума для случая цилиндрического ударника (кривая 1,  $\varphi = 0,5\pi$ ) свидетельствуют о возможности «отскока» ударника, потери контакта между достаточно тонким ударником и толстой преградой еще до того, как придет отраженная от тыльной стороны ( $\eta^2 = 0$ ) волна растяжения, исключительно за счет действия радиальных волн разгрузки. Расчеты показывают также, что в случае цилиндрического ударника осевая симметрия задачи приводит к значительному увеличению амплитуды



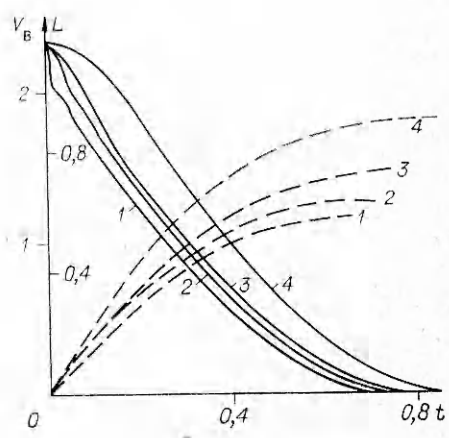
Ф и г. 1



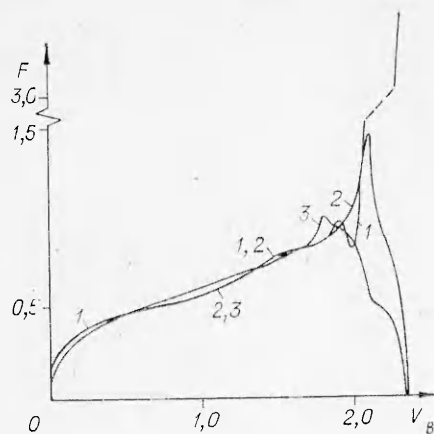
Ф и г. 2



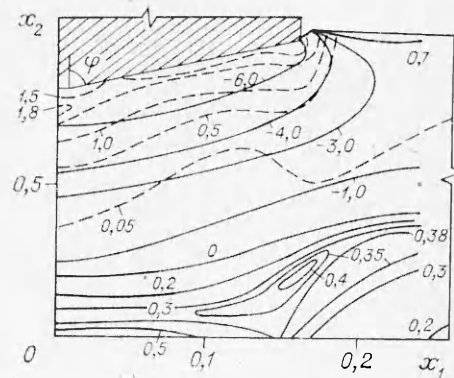
Ф и г. 3



Ф и г. 4



Ф и г. 5



Ф и г. 6

литуды волн разгрузки, сходящихся к оси  $R = 0$ . Это может вызвать появление растягивающих нормальных напряжений в окрестности оси  $R = 0$ , т. е. «локальный отскок» части контактирующей поверхности, хотя сила сопротивления  $F < 0$ .

Для графиков  $F(t)$  в случае ударников с конической головной частью (кривые 2, 3,  $\varphi = 0,25\pi; 0,1\pi$ ) характерным является вначале рост  $F(t)$  за счет увеличения площади контакта и наличие максимума, соответствующего моменту полного внедрения головной части в преграду. Амплитуда этих максимумов монотонно возрастает с увеличением угла  $\varphi$ .

После точки максимума (абсолютного для ударников с конической головной частью, локального для цилиндрических ударников) сила сопротивления  $F$  уменьшается до нуля. Причем ее приближение к нулю не является асимптотическим, производная  $dF/dt$  в конце процесса даже увеличивается. Это обусловлено тем, что преграда при небольших нагрузках ведет себя упруго, более жестко, чем в состоянии пластичности.

Зависимость глубины внедрения  $L$  и скорости внедрения  $V_B$  от времени  $t$  для цилиндрических ударников с конической головной частью изображена на фиг. 4 (штриховые и сплошные линии соответственно). Кривые  $L(t)$  имеют монотонный характер, при этом глубина внедрения уменьшается с ростом угла полураствора  $\varphi$  головной части. Зависимость  $V_B(t)$  для цилиндрического (кривая 1,  $\varphi = 0,5\pi$ ) и «тупых» конических ударников (кривая 2,  $\varphi = 0,4\pi$ ) имеет особенность в виде «полочки», либо точки перегиба, соответствующую тому же самому моменту времени, что и экстремум кривой  $F(t)$  на фиг. 3. Наличие этой особенности обусловлено также действием радиальных волн разгрузки. С уменьшением угла полураствора конуса  $\varphi$  (кривые 3, 4;  $\varphi = 0,25\pi; 0,1\pi$ ) этот эффект исчезает. Для заостренных ударников характерно слабое падение скорости  $V_B$  в начале процесса, далее же производная  $dV_B/dt$  практически одинакова для любых форм головных частей (при одинаковых прочих параметрах).

Полученные результаты позволяют заметить, что существенное влияние радиальных волн напряжений на процесс внедрения снижает ценность информации, получаемой при попытке использовать плоские приближения для расчета «косого», неосесимметричного соударения жесткого тела с преградой.

Определенный интерес представляют изображения на фиг. 5 зависимости силы  $F = F(V_B)$  от текущей скорости внедрения. Отчетливо видно, что рассчитанное семейство кривых, зависящих от формы головной части ударника, можно разделить на две части — правую, где имеются существенные различия, и левую, где кривые практически совпадают. Граница этих областей определена положением крайних правых максимумов на фиг. 3. Параметрически зависимость силы сопротивления от скорости внедрения можно представить в виде

$$F = \begin{cases} F_1(V_B, \chi), & V_B \leq V_*(\chi), \\ F_2(V_B), & V_B > V_*(\chi), \end{cases}$$

где  $\chi$  — параметр формы головной части ударника (для конических головных частей в качестве  $\chi$  можно выбрать угол полураствора  $\varphi$ );  $V_*$  — скорость ударника в момент полного внедрения наиболее заостренной головной части.

Таким образом, различие форм головных частей сказывается на зависимости  $F(V_B)$  лишь в начальной стадии осесимметричного процесса соударения жестких тел вращения с упругопластической преградой. Этот факт полностью согласуется с выводами [12], где аналогичный результат установлен экспериментально для цилиндрических ударников с различными коническими головными частями и может быть использован при создании расчетно-аналитических, инженерных моделей процессов внедрения.



Для прогнозирования областей возможных разрушений рассчитывались поля плотности работы напряжений на пластических деформациях

$$A_p = \int_t \operatorname{tr}(\sigma \cdot \dot{\epsilon}^p) dt = \int_t H(f) \operatorname{tr}(s \cdot \nabla V) dt$$

и максимальных главных напряжений

$$\sigma_I = \max \left\{ \sigma_{00}, 0,5 \left[ \sigma_{RR} + \sigma_{ZZ} + \sqrt{(\sigma_{RR} - \sigma_{ZZ})^2 + 4\sigma_{RZ}^2} \right] \right\}.$$

На фиг. 6 представлены изолинии  $A_p$  и  $\sigma_I$  (штриховые и сплошные линии соответственно), откуда видно, что область разрушений сдвига, при котором в качестве критерия выступает пластическая работа  $A_p$ , наиболее вероятна у острия и краев конуса. Разрушение же, обусловленное действием растягивающих напряжений, может локализоваться у тыльной поверхности преграды после взаимодействия с этой поверхностью ударной волны сжатия.

В заключение отметим, что сравнение результатов расчетов для двух типов граничных условий на контактной поверхности цилиндрический ударник — преграда (условия полного слияния и скольжения без трения) показало разницу по величине глубины внедрения не более 2%.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Меньшиков Г. П., Одинцов В. А., Чудов Л. А. Внедрение цилиндрического ударника в конечную плиту. — Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 1.
2. Гриднева В. А., Корнеев А. И., Трушков В. Г. Численный метод расчета напряженного состояния и разрушения плиты конечной толщины при ударе бойками различной формы. — Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 1.
3. Фомин В. М., Яненко П. П. Численное моделирование задач высокоскоростного взаимодействия тел. — В кн.: Материалы симпозиума. Нелинейные волны деформации. Т. 2. Таллин, 1978.
4. Kondaurov V. I., Kukudjanov V. N. On constitutive equations and numerical solution of the multidimensional problems of the dynamics of nonisothermic elastic-plastic media. — Arch. Mech., 1979, vol. 31, N 5.
5. Фомин В. М., Гулидов А. И. Численное моделирование отскока осесимметричных стержней от твердой преграды. — ПМТФ, 1980, № 3.
6. Магомедов К. М., Холодов А. С. О построении расчетных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений. — ЖВММФ, 1969, № 2.
7. Холодов А. С. О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений гиперболического типа. — ЖВММФ, 1978, т. 18, № 6.
8. Кондауров В. И., Рой И. В. Исследование и применение одной разностной консервативной схемы для уравнений динамики деформируемой среды. — ЧММСС, 1980, т. 2, № 2.
9. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1973.
10. Кукуджанов В. П., Кондауров В. И. Численное решение неоднородных задач динамики твердого тела. — В кн.: Проблемы динамики упругоэластических сред. М.: Мир, 1975.
11. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
12. Витман Ф. Ф., Степанов В. А. Влияние скорости деформирования на сопротивление деформированию металлов при скоростях удара  $10^2$ – $10^3$  м/с. — В кн.: Некоторые проблемы прочности твердого тела. М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1959.

Поступила 8/VI 1983 г.

УДК 539.4; 539.376

#### МОДЕЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

М. Д. ДАЧЕВА, А. М. ЛОКОЩЕНКО, С. А. ШЕСТЕРИКОВ  
(Москва)

В рамках концепции уравнения состояния по Ю. Н. Работнову [1] рассмотрим описание процессов деформирования в условиях, когда определяющим является накопление поврежденности  $\omega$ .

Воспользуемся вариантом уравнения состояния, предложенным в [2]:

$$\begin{aligned} (1) \quad & d\epsilon/dt = G'(s)ds/dt + F(s); \\ (2) \quad & d\omega/dt = g'(s)ds/dt + f(s). \end{aligned}$$