

а плотность двухфазной смеси возросла более чем в 2 раза по сравнению со случаем  $z_s = 0,1$ .

Следует отметить, что распределения давления по боковой поверхности обтекаемого тела количественно мало отличаются в обоих случаях. Заметно некоторое увеличение давления в окрестности точки прекращения вдува при увеличении  $z_s$ , что приводит к увеличению коэффициента волнового сопротивления при  $z_s = 0,6$  на 7,7% по сравнению со случаем  $z_s = 0,1$ , а полного сопротивления с учетом реактивного действия вдуваемого потока приблизительно на 6%. На основании расчетов можно сделать вывод о незначительном влиянии весового содержания частиц малого размера во вдуваемом потоке на сопротивление обтекаемого тела при изменении  $z_s$  в пределах  $0,1 \leq z_s \leq 0,6$ .

Поступила 22 XII 1982

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Краснов Н. Ф., Кошевой В. Н. Управление и стабилизация в аэродинамике. М.: Высш. школа, 1978.
2. Коваль М. А., Стулов В. П., Швец А. П. Некоторые особенности взаимодействия сильного вдува со встречным сверхзвуковым потоком.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 1.
3. Антонов В. А., Гришин А. М. Исследование аэродинамики осесимметричных тел в сверхзвуковом потоке при наличии локализованного вдува.— ПМТФ, 1982, № 4.
4. Гершбейн Э. А. Теория гиперзвукового вязкого ударного слоя при больших числах Рейнольдса и при сильном вдуве инородных газов.— ПММ, 1974, т. 38, № 6.
5. Яненко Н. Н., Алхимов А. П. и др. Изменение волновой структуры при обтекании тел сверхзвуковым двухфазным потоком.— ДАН СССР, 1981, т. 260, № 4.
6. Клингел Дж., Никерсон Г. Течение смеси газа и твердых частиц в осесимметричном сопле.— В кн.: Детонация и двухфазное течение. М.: Мир, 1966.
7. Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами.— ПММ, 1965, т. 29, № 3.
8. Стернин Л. Е. Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М.: Машиностроение, 1974.
9. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
10. Соу С. Гидродинамика многофазных систем. М.: Мир, 1971.
11. Панкратов Б. М., Полежаев Ю. В., Рудько А. К. Взаимодействие материалов с газовыми потоками. М.: Машиностроение, 1976.
12. Яненко Н. П., Солоухин Р. П., Папырин А. Н., Фомин В. М. Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц. Новосибирск: Наука, 1980.
13. Васенин И. М., Рычков А. Д. Численное решение задачи о течении смеси газа и частиц в осесимметричном сопле Лаваля.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 5.
14. Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами/Под ред. Л. Е. Стернина. М.: Машиностроение, 1980.
15. Стасенко А. Л., Чеховский В. Ф. Сферически-симметричное течение двухфазной смеси в пустоту.— Тр. ЦАГИ, 1974, вып. 1612.
16. Численное решение многомерных задач газовой динамики/Под ред. С. К. Годунова. М.: Наука, 1976.
17. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
18. Численные методы в динамике жидкостей/Под ред. О. М. Белоцерковского и В. П. Шидловского. М.: Мир, 1981.

УДК 532.556.533

### МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В РАСЧЕТЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА ГАЗА С ЛАМИНАРНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ ПРИ НАЛИЧИИ СРЫВНОЙ ЗОНЫ

*Д. О. Лыжин*

(Москва)

Один из путей исследования вязко-невязкого взаимодействия состоит в том, что в качестве основных уравнений выбираются классические уравнения двумерного сжимаемого пограничного слоя, которые дополняются соотношением, описывающим взаимодействие пограничного слоя с внешним невязким течением (см., например, [1]). При этом в случае сверхзвукового обтекания необходимо задавать некоторое нижнее по течению граничное условие для замыкания исходной системы, т. е. задача является краевой (например, [2]). Метод «пристрелки» параметров в начале расчетной области

для получения решения, удовлетворяющего такому условию, требует обычно больших затрат машинного времени из-за высокой чувствительности интегральных кривых к незначительным изменениям условий на верхней по течению границе. Более эффективным является алгоритм глобальных релаксаций распределения давления по всей расчетной области [1]. В данной работе предложен численный метод расчета сверхзвукового взаимодействующего пограничного слоя при наличии срывной зоны.

1. Исходную систему уравнений сжимаемого двумерного пограничного слоя для совершенного газа удобно записать, вводя следующие безразмерные переменные:

$$X = \frac{s}{L}, \quad Y = \frac{u_e}{\sqrt{2X \operatorname{Re}_{\infty} \mu_{\infty}}} \int_0^n \rho dn, \quad F = \frac{u}{u_e},$$

$$G = \frac{H}{H_e}, \quad V = \frac{\rho v \sqrt{2X \operatorname{Re}_{\infty}}}{\rho_{\infty} u_{\infty}} + F \frac{\partial Y}{\partial X}.$$

Здесь  $s, n$  — ортогональная система координат, связанная с поверхностью тела;  $u, v$  — компоненты скорости;  $\mu$  — коэффициент вязкости;  $\rho$  — плотность;  $H$  — полная энтальпия;  $\operatorname{Re} = u\rho L/\mu$  — число Рейнольдса;  $L$  — характерный размер тела. Индексами  $e$  и  $\infty$  отмечены значения величин соответственно на внешней границе пограничного слоя и в невозмущенном сверхзвуковом потоке. Предполагая линейную зависимость коэффициента вязкости от температуры  $\mu/\mu_{\infty} = CT/T_{\infty}$  и постоянство числа Прандтля  $\operatorname{Pr}$ , основные уравнения и граничные условия можно представить в виде

$$(1.1) \quad V' + F + 2X \dot{F} = 0,$$

$$\frac{\rho_e u_e \mu_e}{\rho_{\infty} u_{\infty} \mu_{\infty}} F'' - VF' + 2 \frac{d \ln M_e}{d \ln X} (G - F^2) = 2XF\dot{F},$$

$$\frac{\rho_e u_e \mu_e}{\rho_{\infty} u_{\infty} \mu_{\infty}} G'' - VG' + \frac{\rho_e u_e^3 \mu_e}{2\rho_{\infty} u_{\infty} \mu_{\infty} H_e} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{Pr}}\right) (F^2)'' = 2XFG\dot{G},$$

$$V(X, 0) = F(X, 0) = 0, \quad G(X, 0) = G_w(X) \text{ или } G'(X, 0) = 0, \quad F(X, \infty) = G(X, \infty) = 1,$$

где  $M$  — число Маха; индекс  $w$  соответствует поверхности тела; точки и штрихи обозначают дифференцирование по координатам  $X$  и  $Y$ .

Для учета влияния вязкого взаимодействия введем в рассмотрение толщину эффективного тела  $\delta = y_w + \delta^*$ , которая является суммой ординаты поверхности  $y_w(X)$  и толщины вытеснения пограничного слоя  $\delta^*(X)$ , обезразмеренных с помощью масштаба  $L$ . Тогда распределение функций течения на внешней границе пограничного слоя, определяющее коэффициенты системы (1.1), обуславливается отклонением линий тока внешнего изэнтропического течения, обтекающего эффективное тело. В частности, поведение числа Маха  $M_e(X)$  или давления можно вычислить с помощью  $\delta(X)$  из уравнения взаимодействия, представляющего формулу Аккерета, Прандтля — Майера или приближение касательных клиньев.

Появление члена  $\delta(X)$  в выражении для градиента давления делает необходимым решать краевую задачу (1.1) с учетом как верхних, так и нижних по течению граничных условий. В данной работе для получения профилей скорости и энтальпии, а также величин  $\delta_1, p_1$  на первой расчетной характеристике  $X = X_1$  производится решение задачи о слабом взаимодействии на плоском начальном участке тела. В нижней части потока при  $X = X_N$  в общем случае требуется равенство давления заранее заданной величине:  $p(X_N) = p_N$ .

2. Для решения краевой задачи (1.1) применяется итерационная процедура последовательных приближений для распределения  $\delta(X)$ . При этом на каждой итерации требуется, чтобы функция  $\delta(X)$  удовлетворяла

заранее заданным граничным условиям

$$(2.1) \quad \delta(X_1) = \delta_1, \quad \dot{\delta}(X_N) = \dot{\delta}_N,$$

где значение  $\dot{\delta}_N$  соответствует, согласно уравнению взаимодействия, заданной величине донного давления при  $X = X_N$ . Пусть в начале  $n$ -й итерации задано распределение  $\delta^{(n)}(X)$ , удовлетворяющее условиям (2.1).

Коэффициенты системы (1.4) определяются с помощью  $\dot{\delta}^{(n)}(X)$  и  $\ddot{\delta}^{(n)}(X)$ , после чего исходные уравнения интегрируются численно. Для этого в случае безотрывного обтекания используется традиционный маршевый метод, а для расчета отрывных течений применяется релаксационный метод с использованием схемы переменных направлений в соответствии с изменением направления распространения возмущений в зоне возвратных токов [3]. Рассчитанные при этом поля  $F^{(n)}(X, Y)$  и  $G^{(n)}(X, Y)$  дают возможность получить распределения толщины вытеснения и толщины эффективного тела  $\delta_{\Pi}^{(n)}(X)$ . Для определения следующего приближения  $\delta^{(n+1)}(X)$  используется процедура:  $\delta^{(n+1)}(X) = \delta^{(n)}(X) + \Delta^{(n)}(X)$ , где функция  $\Delta^{(n)}(X)$  находится из решения краевой задачи

$$(2.2) \quad \ddot{\Delta}^{(n)} - \alpha_1 \Delta^{(n)} = \alpha_2 (\delta^{(n)} - \delta_{\Pi}^{(n)}), \quad \Delta^{(n)}(X_1) = 0, \quad \dot{\Delta}^{(n)}(X_N) = 0.$$

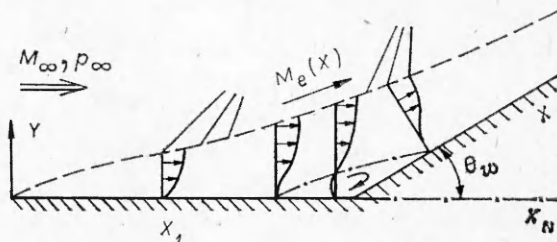
Здесь  $\alpha_1, \alpha_2$  — положительные константы. Процесс итераций продолжается до тех пор, пока не будет достигнуто совпадение  $\delta^{(n)}$  и  $\delta_{\Pi}^{(n)}$  с заданной относительной точностью  $\epsilon$  на всем расчетном интервале  $[X_1, X_N]$ .

Функция  $\delta^{(n+1)}(X)$  удовлетворяет условиям (2.1) и отвечает естественному требованию  $\delta^{(n+1)}(X) \rightarrow \delta^{(n)}(X)$ , если  $\delta^{(n)}(X) - \delta_{\Pi}^{(n)}(X) \rightarrow 0$  на  $[X_1, X_N]$ . Заметим, что уравнение такого же функционального вида, как (2.2), можно получить, используя интегральную форму исходных уравнений пограничного слоя. К достоинству метода следует отнести то, что уравнение (2.2) имеет весьма простой вид и для его решения требуется информация о расчетных полях течения только в виде интегральной функции  $\delta_{\Pi}^{(n)}(X)$ . Начальное приближение  $\delta^{(1)}(X)$ , необходимое для старта процедуры, может в общем случае представлять собой любое гладкое распределение, удовлетворяющее граничным условиям (2.2).

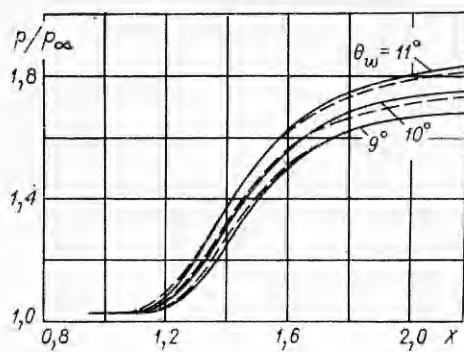
3. Во всех расчетных вариантах рассматривался практически важный случай обтекания щитков сжатия. Конфигурация тела и схема течения показаны на фиг. 1. В качестве нижнего по течению граничного условия использовалось равенство величины давления значению, соответствующему невязкому обтеканию полубесконечного клина. Для повышения точности расчетов в пристеночной части потока было сделано преобразование поперечной координаты  $Y_1 = Y/(1 + Y)$ . Вычисления проводились с помощью конечно-разностной схемы второго порядка точности по  $\Delta X$  и  $\Delta Y_1$  с шагами расчетной сетки  $\Delta X = \Delta Y_1 = 0,02$ . Численный анализ влияния значений параметров  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  на скорость сходимости алгоритма показал, что для безотрывных течений их величина должна быть порядка 100, а для расчета срывной зоны — порядка 0,1.

Первая серия вычислений соответствовала случаю, рассчитанному в [2] ( $M_{\infty} = 3,0$ ,  $Re_{\infty} = 10^5$ ,  $G_w = 0,5$ ,  $Pr = 0,72$ ). Вершина скругленного угла с наклоном  $\theta_w$  располагалась в точке  $X = 1,55$ .

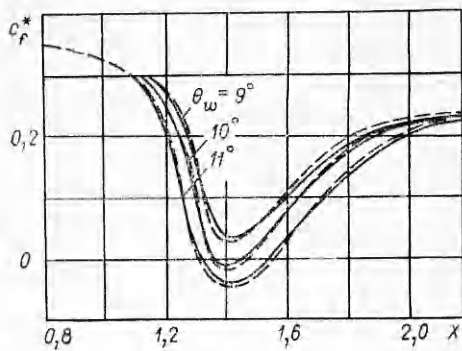
В качестве условия взаимодействия применялась формула Аккерета. На фиг. 2 приведены распределения давления вдоль поверхности тел для углов наклона, равных 9; 10; 11°. Распределение параметра  $c_f^*$  представ-



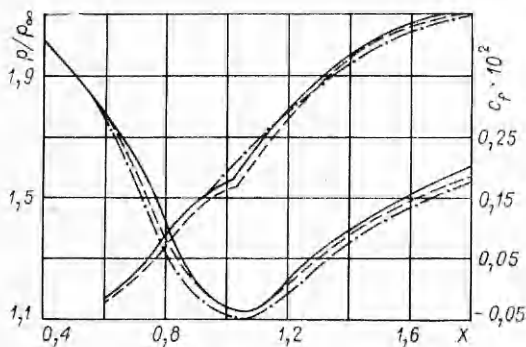
Ф и г. 1



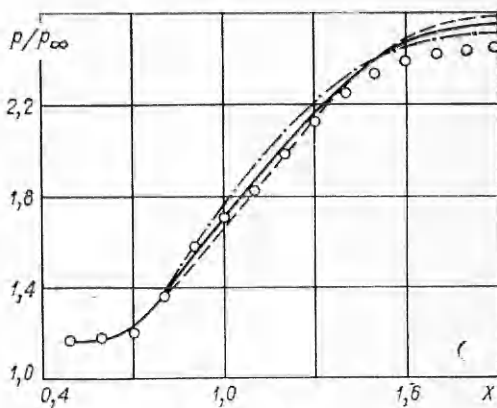
Ф и г. 2



Ф и г. 3



Ф и г. 4



Ф и г. 5

лено на фиг. 3, где  $c_f^* = c_f \sqrt{Re_\infty}/2$  ( $c_f$  — коэффициент поверхностного трения, вычисленный по значениям параметров в невозмущенном потоке). Полученные результаты (сплошные линии) хорошо согласуются с расчетными данными [2] (штриховые линии).

Следующие два расчетных случая используют приближение касательных клиньев для величины давления. Исходные данные для первого из них:  $M_\infty = 3,0$ ,  $Re_\infty = 1,68 \cdot 10^4$ ,  $G_w = 1$ ,  $Pr = 1$ ,  $\theta_w = 10^\circ$ . На фиг. 4 сплошными линиями изображены распределения давления и коэффициента поверхностного трения вдоль тела вместе с результатами решений уравнений Навье — Стокса [4] (штриховые линии) и [5] (штрихпунктирные линии). Сравнение показывает хорошее совпадение всех данных. Второй случай соответствует условиям экспериментальной работы [6]:  $M_\infty = 4,0$ ,  $Re_\infty = 6,8 \cdot 10^4$ ,  $G_w' = 0$  (адиабатическая стенка),  $Pr = 0,72$ ,  $\theta_w = 10^\circ$ . Распределение давления на теле, полученное в настоящей работе, представлено на фиг. 5 вместе с результатами численных решений уравнений Навье — Стокса [5] (штриховая линия), численными расчетами [1] (штрихпунктирная линия) и экспериментальными данными [6] (кружки). Наблюдается хорошее совпадение расчетных и экспериментальных результатов.

Поступила 23 XI 1982

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Werle M. J., Vatsa V. N. A new method for supersonic boundary layer separation.— AIAA J., 1974, vol. 12, N 11.
2. Нейланд В. Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 4.
3. Carter J. E. Solutions for laminar boundary layers with separation and reattachment. AIAA Paper, 74—583, 1974.
4. Hung C. M., MacCormack R. W. Numerical solutions of supersonic and hypersonic laminar compression corner flow.— AIAA J., 1976, vol. 14, N 4.

5. Carter J. E. Numerical solutions of the Navier—Stokes equations for the supersonic laminar flow over a two-dimensional compression corner. NACA TR R-385, 1972.
6. Lewis J. E., Kubota T., Lees L. Experimental investigation of supersonic laminar, two-dimensional boundary-layer separation in a compression corner with and without cooling. — AIAA J., 1918, vol. 6, N 1.

УДК 538.4 : 538.665

## НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

И. Ф. Султанов

(Москва)

Намагничивающиеся жидкости находят все более широкое применение в различных областях техники [1]. Такие жидкости успешно могут использоваться в качестве теплоносителя в устройствах, генерирующих магнитное поле, в условиях, когда отсутствует сила тяжести [2] и ряде других случаев. Эффективность работы теплообменных аппаратов в значительной степени определяется температурой намагничивающейся жидкости. В связи с этим представляет интерес рассмотрение неизо термических течений при температуре, близкой к точке Кюри, где зависимость объемной намагниченности  $M$  от температуры выражена наиболее ярко. В этом случае на характер течения жидкости будет оказывать существенное влияние не только зависимость объемной намагниченности насыщения от температуры, но и неоднородность температуры, вызванная появлением внутренних источников и стоков тепла, обусловленных магнетокалорическим эффектом. Отметим, что хотя это и слабый эффект [3], тем не менее вызванное им перераспределение температуры по сечению канала может быть значительным. При большом градиенте внешнего магнитного поля  $H$  даже малое изменение температуры может существенно изменить силу, действующую на элемент намагничивающейся жидкости. Особенности течений магнитных жидкостей при температуре, близкой к точке Кюри, могут быть выявлены при совместном решении уравнений движения и теплопроводности.

Система уравнений несжимаемой неэлектропроводной намагничивающейся жидкости, находящейся в насыщении, в приближении Розенсвайга — Нойрентера [4] имеет вид

$$(1) \quad \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = - \nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \mu_0 M \nabla H;$$

$$(2) \quad \rho c \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T \right] = \lambda \Delta T - \mu_0 \left( \frac{\partial M}{\partial T} \right)_{\rho, H} T \left[ \frac{\partial H}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla H \right],$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad M = M(T),$$

где  $\rho$  — плотность;  $\mathbf{v}$  — вектор скорости;  $t$  — время;  $p$  — давление;  $\eta$  — коэффициент динамической вязкости;  $\mu_0$  — магнитная проницаемость вакуума;  $c$  — теплоемкость;  $T$  — температура;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности. В дальнейшем считаем, что  $M = \Lambda (T_c - T)$ , где  $\Lambda = -(\partial M / \partial T)_{\rho, H}$  — пиромангнитный коэффициент,  $T_c$  — температура Кюри [4, 5]. Так как изменение температуры мало по сравнению с абсолютной температурой, то в последнем члене уравнения (2), учитывающем магнетокалорический эффект, можно считать, что  $T = \text{const}$ .

Пусть в плоском канале шириной  $2L$  происходит движение намагничивающейся жидкости под действием градиентов внешнего магнитного поля  $G = \partial H / \partial x = \text{const}$  и давления  $\partial p / \partial x = \text{const}$ . Температура стенок канала  $T_0$  поддерживается постоянной и близкой к точке Кюри. Выберем в качестве характерных величин длину  $L$ , время  $L^2 \rho / \eta$ , температуру  $(T_c - T_0)$  и скорость  $(T_c - T_0) \sqrt{\lambda / (\eta T_0)}$ . Тогда систему уравнений (1), (2) одномерного течения намагничивающейся жидкости в плоском канале можно записать в безразмерном виде

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2k^2 \theta + q;$$

$$(4) \quad \operatorname{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + 2k^2 u,$$

где  $\theta = (T - T_0) / (T_c - T_0)$ ;  $2k^2 = \mu_0 \Lambda G L^2 \sqrt{T_0 / \eta \lambda}$  ( $k > 0$ );  $q = 2k^2 - P$ ;  $P = [L^2 / (T_c - T_0)] \sqrt{T_0 / \eta \lambda} \cdot \partial p / \partial x$ ;  $\operatorname{Pr} = \eta c / \lambda$  — число Прандтля;  $u$  —  $x$ -