

Р и с. 6

горой АМГ-6М. В таблице приведена зависимость количества шагов нагружения и значения величин горизонтального перемещения от давления p . Цифры в первом столбце соответствуют позициям оболочки, показанным на рис. 1. Изменение некоторых функций, характеризующих поведение оболочки в процессе ее формообразования, показано на рис. 5 и 6. На рис. 5 изображены зависимости горизонтального перемещения кромки детали V и вертикального перемещения центра оболочки U от p , а на рис. 6 — изменение толщины δ и пружинения Δ по относительной длине меридиана оболочки r/R . По данным расчета и производственного эксперимента оболочка получается за один переход. Закон изменения пружинения по образующей оболочки подтвержден экспериментально.

Номер позиции	$10p$, МПа	V , мм	Количество шагов	Номер позиции	$10p$, МПа	V , мм	Количество шагов
1	0,5	0,6	100	4	2,75	9,25	369
2	1,33	2,55	200	5	3,5	11,25	410
3	2,225	5,93	300	6	6,6	11,35	460

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1.— М.: Наука, 1976.
2. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости.— М.: Наука, 1980.
3. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести.— М.: Машиностроение, 1975.
4. Леванов А. Н., Колмогоров В. Л., Буркин С. И. и др. Контактное трение в процессах обработки металлов давлением.— М.: Металлургия, 1976.

Поступила 6/III 1985 г.

УДК 539.3

СОСТАВНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОНСТРУКТИВНО-ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

И. В. АНДРИАНОВ
(Днепропетровск)

Последовательные упрощенные уравнения оболочек могут быть получены в результате асимптотического расщепления исходной системы [1—4]. Они позволяют решать широкий класс практически важных задач, однако при различных изменениях напряженного состояния приходится использовать различные приближенные соотношения. Как показано в настоящей работе, для конструктивно-ортотропных цилиндрических стрингерных и шпангоутных оболочек этот недостаток устраним при помощи метода составных уравнений [5]. Работа [6] — одна из первых, в которой использовалась близкая идея для изотропных оболочек.

1. В [2—4] показано, что уравнения конструктивно-ортотропных цилиндрических оболочек допускают дополнительные (по сравнению с изотропным случаем [1]) упрощения. Это связано с наличием в них дополнительного малого параметра — отношения изгибных жесткостей в разных направлениях. На основе анализа реальных конструкций в [2] выделены, в частности, классы стрингерных и шпангоутных оболочек, для которых соответственно характерны соотношения

$$D_2/D_1 \equiv \varepsilon_2 \sim \varepsilon_1^2 \equiv D_2/(B_2 R^2), \quad D_3/D_1 \equiv \varepsilon_3 \sim \varepsilon_1,$$

$$B_2/B_1 \equiv \varepsilon_4 \sim 1, \quad B_3/B_1 \equiv \varepsilon_5 \sim 1, \quad e_1/R \equiv \varepsilon_6 \sim \varepsilon_1^2,$$

$$\varepsilon_2 \sim \varepsilon_1^{-1}, \quad \varepsilon_3 \sim 1, \quad \varepsilon_4 \sim 1, \quad \varepsilon_5 \sim 1, \quad e_2/R \equiv \varepsilon_7 \sim \varepsilon_1^{1/2},$$

где B_i , D_i ($i = 1, 2$) — мембранные и изгибные жесткости; e_i — расстояния от центров тяжести совокупных сечений до срединной поверхности обшивки, индекс 1 соот-

ветствует продольному, 2 — кольцевому подкреплениям; B_3, D_3 — сдвиговая и крутильная жесткости; R — радиус оболочки.

Основное отличие полученных в [2—4] упрощенных уравнений от изотропного случая состоит в том, что уравнения теории пологих оболочек также расщепляются на два, имеющих 4-й порядок по продольной координате.

Рассмотрим подробно случай статического напряженного состояния стрингерной оболочки [2]. Для характеристики изменяемости потенциальной функции Φ по координатам введем параметры α, β при помощи соотношений

$$\Phi_{\xi} \sim \varepsilon_1^{-\alpha} \Phi, \quad \Phi_{\eta} \sim \varepsilon_1^{-\beta} \Phi,$$

где $\xi = x/R; \eta = y/R; x, y$ — продольная и окружная координаты.

При малой изменяемости напряженно-деформированного состояния (НДС) в кольцевом направлении ($\beta = 0$) получаются уравнения основного состояния ($\alpha = -0,5$)

$$(1.1) \quad \varepsilon_1^2 \varepsilon_2 \varepsilon_4 \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \Phi_{\eta\eta\eta\eta} + \Phi_{\xi\xi\xi\xi} = 0$$

и простого краевого эффекта ($\alpha = 0,5$)

$$(1.2) \quad (\varepsilon_1^2 + \nu_{12}^2 \varepsilon_6) \Phi_{\xi\xi\xi\xi} + \Phi - 2\nu_{12} \varepsilon_6 \Phi_{\xi\xi} = 0,$$

где ν — коэффициент Пуассона.

При большей изменяемости НДС по кольцу ($\beta = 0,5$) имеем уравнения

$$(1.3) \quad \alpha = 0: \left(\{1\} + \varepsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)^2 \Phi_{\xi\xi\xi\xi} + \varepsilon_1^2 \varepsilon_4 \nabla_1^4 \Phi_{\eta\eta\eta\eta} = 0;$$

$$(1.4) \quad \alpha = 0,5: A_2 \Phi \equiv \nabla_2^4 \Phi + \varepsilon_1^{-2} \left(\{1\} - \nu_{12} \varepsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right)^2 \Phi + \\ + \varepsilon_6 \left(\{2\} - \varepsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2\nu_{12} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \Phi_{\eta\eta} = 0,$$

$$\text{где } \nabla_1 = \frac{\partial^4}{\xi^4} + 2\varepsilon_3 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \varepsilon_2 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4}; \quad \nabla_2 = \frac{\partial^4}{\xi^4} + 2\varepsilon_4 \varepsilon_5^{-1} \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \varepsilon_4 \frac{\partial^4}{\partial \eta^4}.$$

Наконец, при $\beta > 0,5$ исходное уравнение распадается на уравнения изгиба и плоской деформации стрингерной пластинки, которые получаются из (1.3), (1.4), если опустить в них члены в фигурных скобках.

Попробуем теперь построить составные уравнения, пригодные при любой изменяемости НДС. Нетрудно видеть, что (1.4) уже удовлетворяет этому условию, поскольку оно включает уравнения краевого эффекта (1.2) и плоского НДС пластинки. Для преобразования уравнения (1.3) в составное оператор ∇_1 должен быть заменен следующим:

$$\nabla_{10} = \frac{\partial^4}{\xi^4} + 2\varepsilon_3 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \varepsilon_2 \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)^2.$$

Тогда уравнение

$$(1.5) \quad A_1 \Phi \equiv \varepsilon_4 \varepsilon_1^2 \nabla_{10}^4 \Phi_{\eta\eta\eta\eta} + \left(1 + \varepsilon_6 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)^2 \Phi_{\xi\xi\xi\xi} = 0$$

включает уравнения основного состояния (1.1) и изгиба пластинки.

Основные с энергетической точки зрения деформации для НДС, описываемого (1.3), — кривизны κ_1, κ_2 и кручение κ_{12} , а также деформация в продольном направлении ε_{11} . Для (1.4) основные деформации — $\kappa_1, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}$.

Используя предельные уравнения [2], для шпангоутной оболочки имеем составные:

$$(1.6) \quad A_3 \Phi = \frac{\partial^4}{\eta^4} \left[(\varepsilon_1^2 \varepsilon_2 + \varepsilon_7^2) \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2(\varepsilon_1^2 \varepsilon_2 \varepsilon_5 - \nu_{12} \varepsilon_7) \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \right. \\ \left. + (\varepsilon_1^2 \varepsilon_2 \varepsilon_4 + \nu_{12}^2 \varepsilon_7^2) \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \{1\} \right)^2 \right] + \varepsilon_7 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \nu_{12} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \right. \\ \left. - 2\nu_{12} \right) \Phi + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} = 0;$$

$$(1.7) \quad A_4 \Phi \equiv \varepsilon_1^2 \nabla_{10}^4 \Phi + \left(1 + \varepsilon_7 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)^2 \Phi = 0.$$

Уравнение (1.7) не изменилось по сравнению с приведенным в [2] предельным, в (1.6) добавлен член в фигурных скобках. Соотношение (1.6) включает уравнения основного состояния, напряженного состояния с большим показателем изменчивости в кольцевом направлении и преимущественно тангенциальной деформации пластины, соотношение (1.7) — краевого эффекта, напряженного состояния с большим показателем изменчивости в продольном направлении и преимущественно изгибной деформации пластины. Основные деформации для НДС, описываемых (1.6), (1.7), — ε_{11} , ε_{22} , ε_{12} , κ_2 и ε_{22} , κ_1 , κ_2 , κ_{12} соответственно.

2. Составные уравнения могут быть построены и для задач устойчивости и динамики, предельные для конструктивно-ортотропных стрингерных и шпангоутных оболочек приведены в [3, 4].

Составные уравнения устойчивости для стрингерной оболочки можно представить в виде

$$(2.1) \quad A_1 \Phi + \varepsilon_4 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \{1\} \right) \left(\bar{T}_{10} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\bar{S}_0 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \bar{T}_{20} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \Phi = 0;$$

$$(2.2) \quad A_2 \Phi + \{ \varepsilon_1^{-2} \bar{T}_{10} \Phi \} = 0.$$

Для шпангоутных оболочек имеем

$$(2.3) \quad A_3 \Phi + \bar{T}_{20} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left[\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2\varepsilon_3 \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \varepsilon_2 \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right)^2 \right] \Phi + \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 1 \right) \left(2\bar{S}_0 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{T}_{10} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \Phi \right\} = 0;$$

$$(2.4) \quad A_4 \Phi + \left(\bar{T}_{10} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\bar{S}_0 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{T}_{20} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \Phi = 0,$$

где $\{ \bar{T}_{10}; \bar{S}_0; \bar{T}_{20} \} = \{ T_{10}; S_0; T_{20} \} / B_2$; T_{10} , T_{20} , S_0 — осевое, кольцевое и сдвиговое усилия в докритическом состоянии.

Уравнения (2.1)–(2.3) отличаются от приведенных в [3] членами, взятыми в фигурные скобки, а (2.4) совпадает с приведенным в [3].

При исследовании колебаний стрингерных оболочек составные уравнения, справедливые при любых частотах и изменчивостях, записываются как

$$(2.5) \quad A_1 \Phi - \{ \omega^2 A_{11} \Phi \} = A_1 \Phi - \left\{ \omega^2 \left[\left[\frac{\partial^4}{\partial \xi^4} + 2\varepsilon_5^{-1} \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \varepsilon_4 \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 1 \right) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] + \varepsilon_1^2 \varepsilon_4 \left[(a_0 + 1) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (a_0 + \varepsilon_4) \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \omega^2 + \varepsilon_4 a_0 \omega^4 \right] \right\} \Phi = 0;$$

$$(2.6) \quad \varepsilon_1^2 A_2 \Phi - \omega^2 \Phi = 0.$$

Здесь ω — частота колебаний; $a_0 = 2(\varepsilon_5^{-1} + \nu_{12}) / (1 - \nu_{12} \nu_{21})$. Для шпангоутных оболочек получаем

$$(2.7) \quad A_3 \Phi - \{ \omega^2 A_{11} \Phi \} = 0;$$

$$(2.8) \quad A_4 \Phi - \omega^2 \Phi = 0.$$

В [4] для нижней части спектра приведены уравнения, следующие из (2.5)–(2.8), если опустить в них члены в фигурных скобках, для высокочастотных колебаний $A_{11} \Phi = 0$.

3. При формулировке краевых задач для построенных составных уравнений также используется синтез расчлененных граничных условий. Оказывается, что граничные условия для составных уравнений стрингерных оболочек не могут быть расчленены. Для шпангоутных оболочек такое расчленение возможно. Рассмотрим, например, вариант граничных условий:

$$\text{при } \xi = 0, l \quad u = \tilde{u}, \quad w = \tilde{w}, \quad S = \tilde{S}, \quad M_1 = \tilde{M},$$

где $l = L/R$; l — длина оболочки; u , w — продольное и нормальное перемещения; S — сдвиговое усилие; M_1 — продольный изгибающий момент; \tilde{u} , \tilde{w} , \tilde{S} , \tilde{M} — заданные краевые значения соответствующих компонент НДС.

Рассмотрим (1.6), (1.7). Для основного состояния должны быть поставлены условия по u и S [1, 7], для уравнения с преимущественной изменчивостью в кольцевом направлении — по u и w [7], для плоского НДС — по u и S . Следовательно, для составного уравнения (1.6), включающего указанные соотношения, должны быть поставлены граничные условия по u , S и w . Аналогично определяем, что для (1.7) нужно ставить граничные условия по \bar{S} , w и w_ξ . Окончательно имеем, что условия по \bar{S} и w

Условия для (1.6), или (2.3), или (2.7)	Общие условия	Условия для (1.7), или (2.4), или (2.8)	Условия для (1.6), или (2.3), или (2.7)	Общие условия	Условия для (1.7), или (2.4), или (2.8)
u, v	w	w_ξ	u	S, w	w_ξ
T_1, v	w	w_ξ	T_1	S, w	w_ξ
u, v	w	M_1	u	S, w	M_1
T_1, v	w	M_1	T_1	S, w	M_1

должны быть общими для обоих уравнений, условия по u отходят к (1.6), а условия по w_ξ — к (1.7).

Окончательные результаты приведены в таблице, где v — кольцевое перемещение, а T_1 — продольное усилие.

При решении конкретных задач можно использовать методику [8]. А именно, после построения решений типа пограничного слоя их нужно исключить из краевых условий. В результате остаются краевые условия для уравнений типа основного состояния.

4. Для оценки области применимости составных уравнений проведено сравнение квадратов корней характеристических уравнений, соответствующих уравнениям стрингерной оболочки (1.4), (1.5), с точными значениями, найденными численно. Потенциальная функция Φ представлялась в виде

$$\Phi = C \exp(\lambda \xi) \cos(m\eta).$$

Принимались следующие значения геометрико-жесткостных параметров:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 = 2,2 \cdot 10^{-6}, \quad \varepsilon_2 = 10^{-4}, \quad \varepsilon_3 = 10^{-2}, \quad \varepsilon_4 = 0,6, \\ \varepsilon_5 = 0,3, \quad \varepsilon_6 = \varepsilon_7 = 0, \quad \nu_{12} = 0,2. \end{aligned}$$

Результаты сравнения приведены на рис. 1, 2, где сплошные линии — действительные части λ^2 , штриховые — мнимые. Цифрами 1 обозначено точное решение; 2—4 — решения на основе (1.4) (рис. 1) и (1.5) (рис. 2); (1.1) (рис. 1) и (1.2) (рис. 2); изгиба (рис. 1) и плоского НДС (рис. 2) пластинки.

Видно, что составные уравнения действительно пригодны для всех m и осуществляют гладкое сращивание решений, справедливых при малых и больших изменностях НДС.

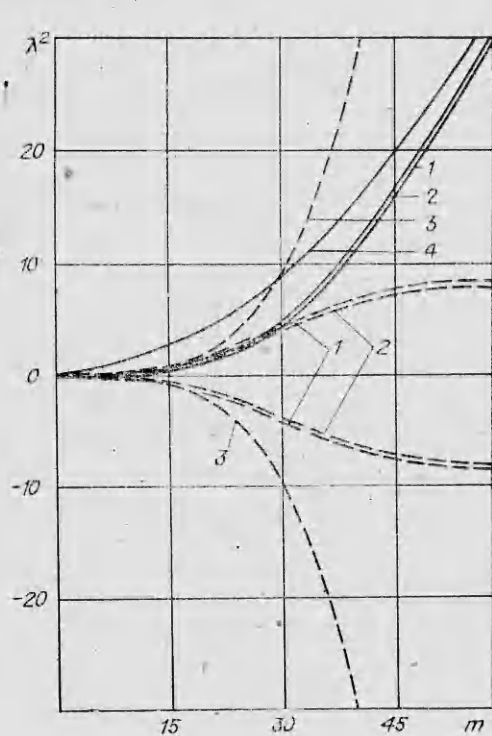


Рис. 1

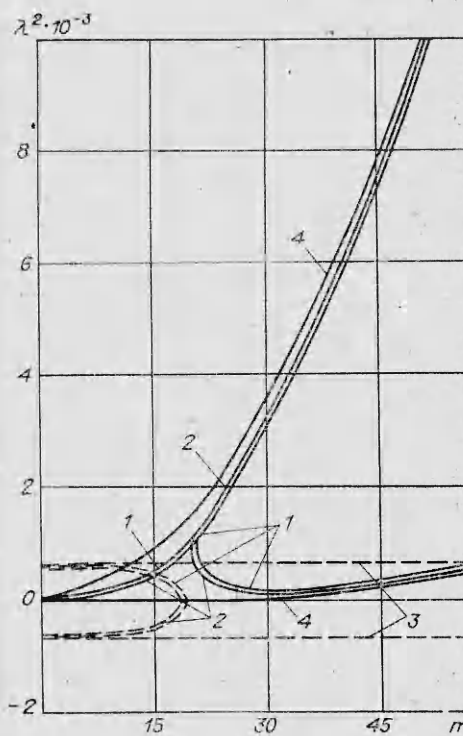


Рис. 2

Далее проведены расчеты при использовании параметров (4.1) (характерных для реальной конструкции), когда ε_1 менялся в пределах от 10^{-6} до 10^{-5} , а ε_2 — от 10^{-4} до 10^{-3} . Остальные параметры, как показано в [2—4], существенно не влияют на характер асимптотических разложений. Погрешность составных уравнений во всех случаях не превышала 5% во всем диапазоне изменения m .

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек.— М.: Наука, 1976.
2. Маневич Л. И., Павленко А. В. Асимптотический анализ уравнений теории эксцентрично подкрепленных цилиндрических оболочек.— В кн.: Теория пластин и оболочек. М.: Наука, 1971.
3. Андрианов И. В., Маневич Л. И. Приближенные уравнения устойчивости эксцентрично подкрепленных цилиндрических оболочек.— В кн.: Гидроаэромеханика и теория упругости. Днепропетровск, 1975, № 20.
4. Лесничая В. А., Маневич Л. И. Собственные колебания эксцентрично подкрепленных цилиндрических оболочек.— В кн.: Гидроаэромеханика и теория упругости. Днепропетровск, 1974, № 18.
5. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости.— М.: Мир, 1967.
6. Шкутин Л. И. Введение двух разрешающих функций в уравнения непологих оболочек.— ДАН СССР, 1972, т. 204, № 4.
7. Андрианов И. В., Лобода В. В., Маневич Л. И. К формулировке краевых задач для упрощенных уравнений теории эксцентрично подкрепленных цилиндрических оболочек.— ЦМ, 1975, т. 11, вып. 7.
8. Корнев В. М., Вахромеев Ю. М. О краевых задачах с малым параметром для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.— Дифференциальные уравнения, 1977, т. 13, № 7.

Поступила 28/IV 1985 г.

ТЕХНИЧЕСКИМ УНИВЕРСИТЕТОМ г. ААХЕНА (ФРГ)

с 26 по 30 июля 1987 г. будет проведен
**16 МЕЖДУНАРОДНЫЙ СИМПОЗИУМ
ПО УДАРНЫМ ТРУБАМ И ВОЛНАМ**

Программа будет включать приглашенные и секционные доклады по следующей традиционной тематике:

- структура ударных волн, распространение и взаимодействие,
- достижения технологии ударных труб, современное оборудование и лазерная диагностика,
- химические процессы и явления излучения,
- ударные волны в конденсированных средах, фокусировка,
- ударно-волновые процессы в плазме,
- развитие численных методов динамики жидкости и ударно-волновые приложения,
- взрывные волны, взрывы и отражения ударных волн,
- приложения в индустрии и энергетике,
- ударные волны в запыленных газах, многофазные процессы,
- медицинские и биологические аспекты и приложения.

Председатель Оргкомитета проф. Г. Грёниг (H. Gronig).

Дата подачи тезисов (600—800 слов)

— 15 октября 1986 г.

Информация о результатах рассмотрения предложений по докладам —

10 февраля 1987 г.

Дальнейшая информация может быть получена только у Оргкомитета:
16th Int. Shock Wave Symp., Stoßwellenlabor, RWTH Aachen, Templergraben 55, 5100 Aachen, FRG.