в области III $(3\pi/2 - \gamma \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/2 - \gamma_1)$ поле напряжений

$$2k \cos 2(\theta - \varphi) = \zeta + (2k - \zeta) \cos (3\pi - 2\varphi - 2\gamma_1),$$

$$\sigma = (2k - \zeta) \sin (3\pi/2 - \varphi - \gamma) \cos (3\pi/2 + \gamma - \varphi - 2\gamma_1) - - k \sin 2(\theta - \varphi),$$

поле скоростей

$$v_\varphi = \zeta/r, \ v_r = (-2k \sin 2(\theta - \varphi) + (2k - \zeta) \sin (3\pi - 2\varphi - 2\gamma_1))/r.$$

Стационарное решение реализуется, когда $p = p_*$ $(\zeta(p_*) = 0)$. Так как $(dp/d\zeta)_{\zeta=0} = -8k^2(1 + \gamma - \pi/4)$, то из теоремы о неявной функции следует разрешимость уравнения (4.1) относительно ζ в окрестности предельной нагрузки p_*. При этом если $p > p_*$, то $\zeta(p) < 0$. Когда $p \to \infty$, то $\zeta(p) \to -\infty$, а $\gamma_1 \to \gamma$, т. е. область II расширяется до всего клина.

З а м е ч а н и е. «Стационарная» часть скорости (g_1, g_2) получается после построения поля напряжений. В частности, если в начальный момент $t = 0$ клин находился в состоянии покоя, то решением будет $g_1 = g_2 = 0$. Линия $r = g(\varphi)$, отделяющая зону пластичности от покоящейся жесткой зоны, определяется следующим образом: в области II $g = g_0 = \text{const}$, в области I (III) функция $g(\varphi)$ находится решением линейного обыкновенного дифференциального уравнения $\zeta g' - g(rH_r) = 0$ с начальными условиями $g = g_0$ при $\varphi = 3\pi/2 + \gamma_1$ $(\varphi = 3\pi/2 - \gamma_1)$.

Автор выражает благодарность Б. Д. Аннину за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н.** Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике.— Новосибирск: Наука, 1984.
2. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
3. **Соколовский В. В.** Теория пластичности.— М.: Высш. шк., 1969.
4. **Новацкий В. К.** Волновые задачи теории пластичности.— М.: Мир, 1978.
5. **Аннин Б. Д., Бытев В. О., Сенашов С. И.** Групповые свойства уравнений упругости и пластичности.— Новосибирск: Наука, 1985.
6. **Peradzynski Z.** Hyperbolic flows in ideal plasticity // Arch. Mech.— 1975.— V. 27, N 1.
7. **Галин Л. А.** Упругопластические задачи.— М.: Наука, 1984.

г. Новосибирск *Поступила 29/XII 1988 г.*

УДК 539.4

Б. Д. Аннин, А. Г. Колпаков

ПРОЕКТИРОВАНИЕ СЛОИСТЫХ И ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ С ЗАДАННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Задача проектирования композитов с заданными наборами усредненных характеристик [1, 2], имеющая значительный практический интерес, представляет в общем случае обратную задачу, относящуюся по общей классификации [3] к задачам синтеза. Она близка также к задачам оптимального управления дифференциальными уравнениями с частными производными [4] и при поиске частных решений может быть сведена к ней (см. [5]). Исследование задачи проектирования в общем случае ограничено небольшим числом теоретических результатов [5].

Вместе с тем для широко используемых в практике классов композитов (слоистых и волокнистых) наличие явных выражений для усредненных характеристик и результаты работ [2, 6, 7] (в части оценки локальных напряжений) позволяют свести задачу проектирования к частным случаям интегральных уравнений первого рода, для которых удастся развить методы решения, достаточно эффективные для их использования в решении практических задач.

1. Проектирование слоистых композитов с заданными усредненными характеристиками. Пусть композит образован периодически чередующимися тонкими (толщины $\varepsilon \ll 1$) слоями однородных изотропных материалов, параллельными плоскости Ox_1x_2. Тогда усредненные характеристики [1, 2, 8] композитов слоистого строения (удельный вес $\widehat{\rho}$, тензор податливости $\widehat{H}_{ijkl}$, коэффициенты теплового расширения $\widehat{\beta}_{ij}$ и т. д.) выражаются через локальные характеристики (удельный вес $\rho(x_3/\varepsilon)$, модуль Юнга $E(x_3/\varepsilon)$, коэффициент Пуассона $\nu(x_3/\varepsilon)$, коэффициент теплового расширения $\beta(x_3/\varepsilon)$) формулами [1, 2, 9]

$$(1.1)\qquad \widehat{\rho} = \langle\rho\rangle,\ \widehat{H}_{3333} = \left\langle \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \right\rangle + \frac{2\langle \nu/(1-\nu)\rangle^2}{\langle E/(1-\nu)\rangle} \quad \text{и т. д.,}$$

$$\widehat{\beta}_{33} = \widehat{H}_{3333}\frac{\left\langle \dfrac{\beta(1+\nu)}{1-\nu}\right\rangle}{\left\langle \dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\right\rangle} + 2H_{3322}\left[\left\langle \frac{E\beta}{(1+\nu)(1-2\nu)}\right\rangle - \right.$$

$$\left. - \left\langle \frac{2\nu^2 E\beta}{(1-\nu^2)(1-2\nu)}\right\rangle + \frac{\left\langle \dfrac{\nu}{1-\nu}\right\rangle\left\langle \dfrac{(1+\nu)\beta}{1-\nu}\right\rangle}{\left\langle \dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\right\rangle}\right] \quad \text{и т. д.,}$$

где $\langle\cdot\rangle = \int\limits_0^1 \cdot\, dy\ (y = x_3/\varepsilon)$ — среднее по периоду структуры композита.

Мы не приводим все формулы для вычисления поименованных величин, они хорошо известны, их достаточно полную сводку можно найти в [10]. Для наших целей существенно только то, что формулы (1.1) имеют вид

$$(1.2)\qquad (\widehat{\rho},\ \widehat{H}_{ijkl},\ \widehat{\beta}_{ij}) = F\left(\langle\rho\rangle,\ \left\langle \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\right\rangle, \ldots\right)$$

(F — алгебраическая функция, ... обозначены независимые интегральные функционалы (кроме указанных явно), входящие в (1.1)).

Задача проектирования композита одномерного строения с заданным набором усредненных характеристик формулируется следующим образом: 1. Разрешимо ли уравнение (1.2) в заданном классе функций? 2. Если разрешимо, указать множество его решений.

Выделение вопроса о разрешимости является типичным для некорректных задач, к каковым относится рассматриваемая нами. Замечание 1. Выбор класса функций $\mathcal{U}$ производят исходя из имеющихся технологий производства композитов. Например, класс функций

$$\mathcal{U}_\infty = \left\{\begin{matrix} \bar{u}(y) \in L_\infty([0,\ 1]):\ \text{определены все} \\ \text{подынтегральные выражения в (1.1)} \end{matrix}\right\}$$

соответствует применению в качестве компонентов материалов с любыми сочетаниями механических характеристик и любыми типами (непрерывными, кусочно-непрерывными и т. д.) их распределений на структуре композита. Класс функции $\mathcal{U}_\infty$ используется для теоретических исследований задачи. Практически таким классом материалов мы не располагаем. Класс функций

$$\mathcal{U}_d = \left\{\begin{matrix} \bar{u}(y) \in \mathcal{U}_\infty:\ \bar{u}(y) \in \{\rho_\alpha, E_\alpha, \nu_\alpha, \beta_\alpha\}_{\alpha=1}^m \\ \text{для почти всех } y \in [0,\ 1] \end{matrix}\right\}$$

соответствует использованию для создания композита конечного числа материалов m. Это наиболее широко распространенный на практике случай.

Замечание 2. В постановке задачи синтеза требуется указывать все решения задачи (или хотя бы как можно большее их число). Это условие сочетается с техническими требованиями, так как всегда желательно иметь наибольшее число различных проектов композита с необходимыми свойствами с целью отбора наиболее технологичных.

При решении задачи (1.2) удобно исходить не непосредственно из нее, а из следующей задачи. Заменим в (1.2) функционалы $\langle\rho\rangle, \ldots$ на переменные $y_1, \ldots, y_n$. В результате получим алгебраическую систему (система S [10]) относительно $y_1, \ldots, y_n$ ($\widehat{\rho}, \widehat{H}_{ijkl}, \widehat{\beta}_{ij}$ — заданные). Обозначим множество решений системы S (в общем случае ее решение неединственно) через Y. После чего (1.2) сводится к

$$\int\limits_0^1 \bar{f}(\bar{u}(y))\,dy = \bar{y}, \quad \bar{y} \in Y \subset R^n, \tag{1.3}$$

где $\bar{u}(y) = (\rho(y), E(y), \nu(y), \beta(y))$ — набор локальных характеристик на периоде структуры композита — искомая функция. Через $\bar{f}(\bar{u})$ обозначены подынтегральные выражения (под знаком $\langle\ \rangle$) в формулах (1.1). Функции $\bar{f}(\bar{u})$ для слоистых композитов полностью приведены в [8].

Уравнение (1.3) на классе функций $\mathcal{U}_d$ — слоистые композиты переходит в

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \bar{y}_\alpha \lambda_\alpha = \bar{y}, \quad \lambda_\alpha \geqslant 0, \quad \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha = 1, \quad \bar{y} \in Y \tag{1.4}$$

относительно $\{\lambda_\alpha\}$ — объемных содержаний компонентов в композите (λ_α — объемное содержание α-го материала в композиции). Обозначено $\bar{y}_\alpha = \bar{f}(\bar{u}_\alpha)$, где $\bar{u}_\alpha = (\rho_\alpha, E_\alpha, \nu_\alpha, \beta_\alpha)$ — набор механических характеристик α-го материала.

Область возможных значений усредненных характеристик. Как теоретически, так и практически интересным представляется вопрос, какие в принципе усредненные характеристики можно придать слоистым композитам. В частности, общим местом в применении к композитам стало утверждение, что им можно придавать свойства, отличные от свойств компонентов. В чем это может проявляться применительно к слоистым композитам?

Решение поставленной задачи с математической точки зрения сводится к вычислению образа множества $\mathcal{U}$ при отображении (1.1). Для случая $\mathcal{U} = \{\bar{u}(y) \in \mathcal{U}_\infty\colon\ \rho(y),\ E(y),\ \nu(y),\ \beta(y) > 0$ для почти всех $y \in [0, 1]\}$ (при упрощающем предположении о совпадении коэффициентов Пуассона компонентов) эта задача решена в [11] методами оптимального управления.

Из упомянутого решения вытекает: а) Композиты рассматриваемого типа могут иметь следующие усредненные характеристики: $\widehat{\rho} = X$ ($X > 0$); усредненные модули Юнга $\widehat{E}_i$, коэффициенты Пуассона $\widehat{\nu}_{ij}$ и модули сдвига $\widehat{G}_{ij}$:

$$\widehat{E}_1 = \widehat{E}_2 = x, \quad \widehat{E}_3 = \frac{(1-\nu)\,x}{(1+\nu)(1-2\nu)\,xy + 2\nu^2},$$

$$\widehat{\nu}_{12} = \nu, \quad \widehat{\nu}_{13} = \widehat{\nu}_{23} = \frac{\nu(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\,xy + 2\nu^2},$$

$$\widehat{G}_{12} = \frac{2x}{1+\nu}, \quad \widehat{G}_{13} = \widehat{G}_{23} = \frac{2}{(1+\nu)\,y};$$

$$\widehat{\beta}_{11} = \widehat{\beta}_{22} = \frac{t}{x}, \quad \widehat{\beta}_{33} = \frac{1+\nu}{1-\nu}z - \frac{2\nu}{1-\nu}\frac{t}{x}$$

($x > 0$, $y > 1/x$, $z > 0$, $t > 0$). Переменные X, x, y, z, t в указанных для них областях принимают независимые значения. б) Любые усредненные характеристики композитов с непрерывными, кусочно-непрерывными и т. п. распределениями локальных характеристик могут быть получены в качестве усредненных характеристик композитов слоистого строения.

Обратившись к приведенной формуле для $\widehat{\beta}_{33}$, легко заметить, что область возможных значений $\widehat{\beta}_{33}$ есть $(-\infty, +\infty)$. Это значит, что коэффициент теплового расширения композита (образованного из компонентов с положительными (!) коэффициентами теплового расширения, см. выше) может быть отрицательным. В [11] указаны композиции на основе реально существующих материалов, обладающих этим свойством. Остальные усредненные характеристики не доставляют примеров таких разительных качественных отличий свойств композита и его компонентов (хотя количественные различия могут быть весьма значительными).

Этот случай интересен также в связи с использованием различных, часто упрощенных, моделей композитов. Следует отметить, что модели уровня правила смесей не в состоянии уловить приведенный выше эффект.

Что касается утверждения п. б), то оно полезно практически, так как дает ответ на вопрос о том, могут ли непрерывные и т. п. распределения локальных характеристик придать какие-либо новые свойства композиту по сравнению со свойствами традиционных (высокотехнологичных в изготовлении) слоистых композитов. Как видим, все возможные свойства могут быть реализованы в классе слоистых композитов. Аналогичный результат имеет место и при учете прочностных свойств материалов.

Математические методы решения задач (1.3), (1.4). Выше отмечалось, что использование класса функций $\mathcal{U}_\infty$ не адекватно реально возникающим ситуациям, когда для создания композита можно использовать только некоторый ограниченный набор материалов. Этому, наиболее широко встречающемуся в практике случаю соответствует класс функций

$$U = \{\bar{u}(y) \in \mathcal{U}_\infty\colon \bar{u}(y) \in V \text{ для почти всех } y \in [0, 1]\},$$

где V — компакт в R^n (n зависит от числа характеристик компонентов, входящих в формулы для усредненных характеристик). Когда множество V образовано конечным набором точек $\left(V = \{\rho_\alpha, E_\alpha, \nu_\alpha, \beta_\alpha\}_{\alpha=1}^m\right)$, имеем $U = \mathcal{U}_d$.

Предложение 1. а) При $m \geqslant n + 1$ образ множества U при отображении (1.3) есть выпуклая оболочка множества

$$\Sigma = \{\bar{x} \in R^n\colon \bar{x} = \bar{f}(\bar{u}),\ \bar{u} \in V\}.$$

б) Любая точка, принадлежащая образу U при отображении (1.3), может быть получена как значение (1.3) на кусочно-постоянной функции, принимающей не более $n + 1$ различных значений (т. е. опять все возможные усредненные характеристики реализуются в классе слоистых композитов).

З а м е ч а н и е 3. При использовании конечного числа компонентов (см. уравнение (1.4)) множество Σ есть конечный набор точек $\Sigma = \{\bar{y}_\alpha\}_{\alpha=1}^m$ ($\bar{y}_\alpha$ определены в пояснении к (1.4)), а $\operatorname{conv}\Sigma = \operatorname{conv}\{\bar{y}_\alpha\}_{\alpha=1}^m$ — выпуклый многогранник. В этом случае возникает задача о выпуклых комбинациях (см. (1.4)) [10, 12]: 1. Принадлежит ли данная точка $\bar{y}$ многограннику $\operatorname{conv}\Sigma = \operatorname{conv}\{\bar{y}_\alpha\}_{\alpha=1}^m$. 2. Если принадлежит, указать все коэффициенты выпуклых комбинаций точек $\{\bar{y}_\alpha\}_{\alpha=1}^m$, дающих точку $\bar{y}$.

З а м е ч а н и е 4. К этой же задаче мы приходим при дискретизации задачи (1.3) в процессе ее численного решения, см. [8].

Рассмотрим невырожденные симплексы $\{P_1, \ldots, P_M\}$ многогранника $\operatorname{conv}\{\bar{y}_\alpha\}_{\alpha=1}^m$, содержащие точку $\bar{y}$. Каждому симплексу P_η и точке $\bar{y}$ соответствует единственное решение задачи (1.4) [11], обозначим его $\bar{s}_\eta(\bar{y})$. Отметим, что число M таких симплициальных решений конечно. Обозначим через $\Lambda(\bar{y})$ множество всех решений задачи (1.4).

Предложение 2.

$$\Lambda(\bar{y}) = \operatorname{conv}\{\bar{s}_\eta(\bar{y})\}_{\eta=1}^{M}.$$

Определим «невязку» между двумя многогранниками $A,\ B \subset R^n$ как число

$$(A, B) = \max_{\bar{x}\in B\setminus A}\min_{\bar{y}\in A}|\bar{x}-\bar{y}| + \max_{\bar{x}\in A\setminus B}\min_{\bar{y}\in B}|\bar{x}-\bar{y}|. \tag{1.5}$$

Геометрически это величина порядка «толщины невязки» многогранников A и B, равной $(A\setminus B) \cup (B\setminus A)$ (отсюда два слагаемых в (1.5)). Задание на множестве многогранников в R^n функции (1.5) превращает его в топологическое пространство.

Предложение 3. Пусть $\bar{y}_i \to \bar{y}$ при $i \to \infty$, причем $\{\bar{y}_i,\ i \to \infty\}$, $\bar{y} \in \operatorname{conv}\{\bar{y}_\alpha\}_{\alpha=1}^{m}$. Тогда $(\Lambda(\bar{y}_i),\ \Lambda(\bar{y})) \to 0$ при $i \to \infty$.

Доказательства предложений 1, 2 приведены в [12]. Доказательство предложения 3, обеспечивающего возможность дискретизации множества Y при практических вычислениях, носит чисто математический характер, в связи с чем здесь не приводится.

Следствие. Множество решений задачи проектирования слоистых композитов с заданным набором усредненных характеристик таково: α-й материал входит в композицию в объемном содержании

$$\lambda_\alpha = \sum_{\eta=1}^{M}\mu_\eta s_{\eta\alpha}(\bar{y}), \tag{1.6}$$

где $\{\mu_\eta\}$ — произвольные числа, удовлетворяющие условию $\mu_\eta \geqslant 0$; $\sum_{\eta=1}^{M}\mu_\eta = 1$ $(s_{\eta\alpha}(\bar{y}),\ \alpha = 1, \ldots, n$— координаты симплициального решения $\bar{s}_\eta(\bar{y}))$.

Учет прочности компонентов при проектировании. Для включения в рассмотрение прочностных характеристик необходимо иметь усредненный критерий прочности композита — критерий прочности в терминах усредненных напряжений или деформаций (под таковыми понимаются напряжения и деформации, определяемые из решения задачи о деформировании тела с усредненными характеристиками при приложении к нему тех же нагрузок, что и к исходному). Такие критерии могут быть получены на основе использования C^1-асимптотик локальных напряжений или деформаций, выраженных через усредненные величины. В общем случае такие асимптотики отсутствуют. Для обыкновенных дифференциальных уравнений C^1-асимптотика метода усреднения получена в [7, 15] (применительно к рассматриваемой задаче): $\sigma_{ij}^{\varepsilon} \sim \Phi_{ijkl}(\widehat{H}_{ijkl}, \widehat{\beta}_{ij}, E(y))\,\sigma_{kl}$. Конкретный вид функций $\{\Phi_{ijkl}\}$ приведен в [10, 16]. Пусть критерии прочности материалов компонентов таковы: $0 \leqslant f(\sigma_{ij}^{\varepsilon}, E) \leqslant \sigma(E)$, где $\sigma_{ij}^{\varepsilon}$ — локальные напряжения, E используется в качестве индификатора материала (при использовании конечного числа материалов $f_\alpha(\sigma_{ij}^{\varepsilon}) \leqslant \sigma_\alpha$ — критерий прочности α-го материала). Подстановка асимптотики $\sigma_{ij}^{\varepsilon}$ в критерий прочности (при условии ограниченности $\partial f/\partial\sigma_{ij}^{\varepsilon}$) приводит к усредненному критерию прочности (подробнее см. [16, 17])

$$M(\sigma_{ij}, E) \equiv \max_{y\in[0,1]} F(\widehat{H}_{ijkl}, \widehat{\beta}_{ij}, E(y), \sigma_{ij}) \leqslant 1,$$

а в случае материалов слоистого строения

$$M(\sigma_{ij}, E) \equiv \max_{\alpha\in\Sigma} F_\alpha(\widehat{H}_{ijkl}, \widehat{\beta}_{ij}, \sigma_{ij}) \leqslant 1 \tag{1.7}$$

(Σ — множество номеров материалов, реально вошедших в композицию). Функции F, $\{F_\alpha\}$ определяются требуемыми усредненными характеристиками и характеристиками компонентов (см. примеры в [10, 16]).

Проектирование слоистых композитов с заданными деформационно-прочностными характеристиками. Решить задачу (1.4) при дополнительном условии

$M(\sigma_{ij}, E) \leqslant 1$ (композит выдерживает заданную усредненную нагрузку)

или

$M(\sigma_{ij}, E) \to \min$ (композит имеет наибольший запас прочности — наиболее прочный композит).

Методы решения сформулированной задачи подробно освещены в [16, 17].

Максимально прочные и равнопрочные проекты. Отметим, что результаты [16] позволяют сделать следующий вывод. Пусть $(E^*) = \{\lambda_\alpha^*\}$ — проект наиболее прочного композита в указанном выше смысле, $(E) = \{\lambda_\alpha\}$ — проект некоторого равнопрочного композита (композита, для которого критерии прочности всех компонентов нарушаются одновременно). Тогда в очевидном нестрогом неравенстве $M(\sigma_{ij}, E^*) \leqslant M(\sigma_{ij}, E)$ для любого равнопрочного проекта для слоистых композитов, как правило, реализуется строгое неравенство. Так, равнопрочные проекты не реализуют наибольшую прочность композита, хотя критерий (1.7) — всего лишь критерий разрушения «по первому треску» (нарушение (1.7) влечет, вообще говоря, разрушение только некоторых слоев).

Слоистые композиты максимальной удельной прочности. Рассматриваемая ниже задача, представляющая практический интерес, иллюстрирует «теоретический» путь возникновения композитов как кусочно-постоянного решения задачи проектирования при отсутствии решения в виде постоянной. Аналогичный факт отмечался применительно к другой задаче в [18].

Пусть к материалу приложено усредненное напряжение $t\sigma^0_{ij}$, $\sigma^0_{ij} = 0$ при i или $j = 3$ (пропорциональное нагружение в плоскости слоев). Асимптотика локальных напряжений в этом случае $\sigma^\varepsilon_{ij} = \frac{E_\alpha}{\langle E\rangle} t\sigma^0_{ij}$ в слое, занятом α-м материалом. Пусть функции $f_\alpha \geqslant 0$ — однородные функции первой степени. Усредненный критерий прочности

$$\max_{\alpha\in\Sigma} f_\alpha\left(\frac{E_\alpha}{\langle E\rangle} t\sigma^0_{ij}\right) \leqslant 1$$

вследствие однородности функций дает следующее значение параметра t, при котором начинается разрушение:

$$t^* = \langle E\rangle \Big/ \max_{\alpha\in\Sigma} f_\alpha\left(E_\alpha\sigma^0_{ij}\right).$$

Удельная прочность композита есть $t^*/\widehat{\rho}$. Тогда задаче максимизации удельной прочности может быть придан вид

$$\frac{\widehat{\rho}}{t^*} = \frac{\langle\rho\rangle}{\langle E\rangle} \max_{\alpha\in\Sigma} f_\alpha\left(E_\alpha\sigma^0_{ij}\right) \to \min. \tag{1.8}$$

Упорядочим данные материалы так, чтобы соответствующие им числа $m_\alpha = f_\alpha\left(E\sigma^0_{ij}\right)$ расположились в порядке возрастания. Тогда $\max\limits_{\alpha=1,\dots,K} m_\alpha = m_K$ вне зависимости от реального вхождения α-го $(\alpha < K)$ матерuла в композицию. В силу чего для набора материалов с номерами $\alpha \in \{1,\dots,K\}$ задача (1.8) запишется как

$$\frac{\langle\rho\rangle}{\langle E\rangle} m_K \to \min = \min{}_K.$$

Величины $(\langle E\rangle, \langle\rho\rangle)$ (см.замечание 3) могут независимо принимать значения, заполняющие многогранник $\mathrm{conv}\{(E_\alpha, \rho_\alpha);\ \alpha = 1, \dots, K\}$. С учетом чего задача сводится к следующей (при данном K):

$$(1.9)\qquad y/x \to \min = \min_K;$$

$$(1.10)\qquad (x, y) \in R_K = \mathrm{conv}\{(E_\alpha, m_K\rho_\alpha);\ \alpha = 1, \dots, K\}.$$

Задача (1.9), (1.10) имеет решение, и $\min_K$ равен минимальному угловому коэффициенту прямых $y = kx$, имеющих общую точку с многогранником R_K.

Замечание 5. Указанная прямая в силу выпуклости R_K обязательно проходит через его вершину. Следовательно, задача (1.9), (1.10) обладает решением вида $(x, y) = (E_\beta, m_K\rho_\beta)$ или $(\langle E\rangle, \langle\rho\rangle) = (E_\beta, \rho_\beta)$, что соответствует однородному материалу.

Далее, выбрав $K \in \{1, \dots, m\}$ (обозначим его K_*), при котором k имеет минимальное значение, решаем задачу

$$\sum_{\alpha=1}^{K_*} E_\alpha\lambda_\alpha = x,\quad \sum_{\alpha=1}^{K_*} \rho_\alpha\lambda_\alpha = y/\min_{K_*},\quad \lambda_\alpha \geqslant 0,\quad \sum_{\alpha=1}^{K_*} \lambda_\alpha = 1$$

для определения объемных содержаний компонентов.

Следствие. Материал, обладающий максимальной удельной прочностью, среди изготовленных на основе m данных однородных материалов — один из этих однородных материалов. Следствие вытекает из замечания 4.

Пусть та же задача проектирования композита максимальной прочности дополнена ограничением на удельный вес $\langle\rho\rangle \leqslant \rho_0$. В этом случае приходим к задаче минимизации (1.9) с условием

$$(x, y) \in S_K = R_K \cap \{y \leqslant m_K\rho_0\}.$$

Вершины многогранника S_K могут уже не совпадать с точками вида $(E_\alpha, m_K\rho_\alpha)$.

Следствие. Рассматриваемая задача с ограничением на удельный вес может не иметь решения для однородного материала, но всегда имеет решение, соответствующее слоистому композиту. К аналогичным результатам приводит использование многих практически возникающих ограничений.

2. Проектирование композитов на основе высокомодульных волокон. Рассмотрим композиционные материалы, образованные путем укладки слоев параллельных волокон (так называемая препреговая технология [19]). Будем считать, что слои параллельны плоскости Ox_1x_2 (это не уменьшает общности), обозначим через φ_α угол между осями волокон α-го слоя и осью Ox_1. Тогда [2] усредненные жесткостные характеристики $\{\widehat{a}_{ijkl}\}$ в плоскости Ox_1x_2 $(i, j, k, l = 1, 2)$ и локальные напряжения $\sigma_{ij}^{\varepsilon}$ в волокнах есть

$$(2.1)\qquad \widehat{a}_{ijkl} = Es\sum_{\alpha=1}^{M} \gamma_i^\alpha\gamma_j^\alpha\gamma_k^\alpha\gamma_l^\alpha\lambda_\alpha;$$

$$(2.2)\qquad \sigma_{ij}^{\varepsilon} = E\gamma_i^\alpha\gamma_j^\alpha\sum_{k,l=1}^{2} \gamma_k^\alpha\gamma_l^\alpha e_{kl}$$

в α-м слое волокон.

Усредненные коэффициенты теплового расширения

$$(2.3)\qquad \widehat{\beta}_{ij} = \beta\sum_{\alpha=1}^{M} \gamma_i^\alpha\gamma_j^\alpha\lambda_\alpha.$$

При учете теплового расширения в правую часть (2.2) добавляется член $\theta E\beta\gamma_i{}^\alpha\gamma_j{}^\alpha$.

Обозначено: E, β — модуль Юнга и коэффициент теплового расширения волокон; s — объемное содержание волокон в композите; θ — температура; $\{\gamma_i^\alpha\}$ — направляющие косинусы осей волокон α-го слоя; M — число армирующих семейств на периоде структуры композита; λ_α — удельное (отнесенное к s) содержание волокон в α-м армирующем слое. Усредненные напряжения σ_{ij} и деформации e_{ij} определяются как и раньше.

Асимптотики локальных напряжений в связующем в отличие от предыдущих случаев не могут быть получены в явном виде, так как для их определения необходимо решить задачу о деформировании связующего жесткими волокнами (типа «жесткой» задачи [20]), что практически осуществимо только численно. Вместе с тем, используя явные приближенные решения [21], можно получить оценки локальных напряжений в связующем и на их основе — достаточные условия прочности связующего. Проделанный в [21] анализ деформаций мягкого связующего выявил два характерных типа его деформаций: межслойные и межволоконные. При *переходе* к усредненному критерию прочности это приводит к возникновению ряда критериев, каждый из которых соответствует своему типу разрушения связующего на микроуровне:

критерий прочности по межволоконным напряжениям

$$\max_{\alpha\in\Sigma} f_1(\varphi_\alpha, e_{ij}) \leqslant 1,$$

критерий прочности по межслойным напряжениям

$$\max_{\alpha\in\Sigma} f_2(\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha+1}, e_{ij}) \leqslant 1.$$

Метод построения функций f_1, f_2 описан в [17]. Что касается критерия прочности волокон, то он получается, как и выше, путем подстановки асимптотики (2.2) в условие прочности материала волокон:

$$\max_{\alpha\in\Sigma} f_b(\varphi_\alpha, e_{ij}) \leqslant 1 \tag{2.4}$$

(Σ — множество номеров углов укладки слоев волокон, реально используемых в проекте композита).

Подстановка $\{e_{ij}\} = \{\widehat{a}_{ijkl}\}^{-1}\{\sigma_{ij}\}$ позволяет записать критерий прочности в терминах усредненных напряжений ($\{\widehat{a}_{ijkl}\}$ даются (2.1), в термоупругом случае надо учесть (2.3)).

При записи усредненных критериев прочности имелось в виду, что $\gamma_1^\alpha = \cos\varphi_\alpha$, $\gamma_2^\alpha = \sin\varphi_\alpha$, $\gamma_3^\alpha = 0$. В силу этого все суммы в правых частях (2.1), (2.3) выражаются через четыре независимые функционала:

$$R_1(\overline{\varphi}) = \sum_{\alpha=1}^{M} \lambda_\alpha \cos^4\varphi_\alpha, \quad R_2(\overline{\varphi}) = \sum_{\alpha=1}^{M} \lambda_\alpha \sin^4\varphi_\alpha; \tag{2.5}$$

$$R_3(\overline{\varphi}) = \sum_{\alpha=1}^{M} \lambda_\alpha \sin\varphi_\alpha \cos^3\varphi_\alpha, \quad R_4(\overline{\varphi}) = \sum_{\alpha=1}^{M} \lambda_\alpha \sin^3\varphi_\alpha \cos\varphi_\alpha,$$

где

$$\lambda_\alpha \geqslant 0, \quad \sum_{\alpha=1}^{M} \lambda_\alpha = 1. \tag{2.6}$$

Система S, получающаяся заменой в (2.1) $R_1(\overline{\varphi})$, ..., $R_4(\overline{\varphi})$ на y_1, ..., y_4, решается явно:

$$y_1 = \frac{\widehat{a}_{1111}}{Es}, \quad y_2 = \frac{\widehat{a}_{2222}}{Es}, \quad y_3 = \frac{\widehat{a}_{1112}}{Es}, \quad y_4 = \frac{\widehat{a}_{1222}}{Es} \tag{2.7}$$

(при этом возникает условие разрешимости $\widehat{a}_{1212} = \widehat{a}_{1122} = (1/2)\,(Es - \widehat{a}_{1111} - \widehat{a}_{2222})$).

Замечание 6. Усредненные коэффициенты теплового расширения выражаются через функционалы $J_1(\overline{\varphi}) = \sum_{\alpha=1}^{M} \lambda_\alpha \cos^2\varphi_\alpha$, $J_2(\overline{\varphi}) = \sum_{\alpha=1}^{M} \lambda_\alpha \sin^2\varphi_\alpha$, сводимые к (2.5). Задание $\widehat{\beta}_{ij}$ накладывает дополнительные условия разрешимости системы S.

Отметим, что в рассматриваемом случае углы укладки волокон принимают конечное число значений, но ни их число M, ни сами углы не фиксируются. На практике возникает ограничение на углы укладки волокон вида

$$\varphi \in \Phi_\alpha = [a_1, b_1] \cup \ldots \cup [a_r, b_r]. \tag{2.8}$$

Задача проектирования волокнистого композита с заданными усредненными характеристиками. 1. Разрешимы ли уравнения

$$R_i(\bar{\varphi}) = y_i, \; i = 1, 2, 3, 4, \tag{2.9}$$

с условиями (2.8), (2.5)? 2. Если разрешимы, то указать множество решений.

Математические методы решения задачи проектирования. Применение методов [14] приводит к аналогу предложения 1.

Предложение 4. а) При $M \geqslant 5$ образ множества $\mathscr{V} = \left\{(\varphi_\alpha, \lambda_\alpha): \; \varphi_\alpha \in \Phi_\alpha, \; \lambda_\alpha \geqslant 0, \; \sum_{\alpha=1}^{M} \lambda_\alpha = 1\right\}$ представляет выпуклую оболочку множества

$$\Gamma = \{\bar{x} \in R^4: \; x_1 = \cos^4\varphi, \; x_2 = \sin^4\varphi,$$
$$x_3 = \sin\varphi\cos^3\varphi, \; x_4 = \sin^3\varphi\cos\varphi, \; \varphi \in \Phi_\alpha\}.$$

б) Любая точка, принадлежащая образцу множества $\mathscr{V}$, может быть получена как значение функций $R_1(\bar{\varphi}), \ldots, R_4(\bar{\varphi})$ при $M = 5$.

Следствие. Для получения волокнистого композита рассматриваемого типа с любыми возможными наборами усредненных жесткостных характеристик $\{\widehat{a}_{ijkl}\}$ (и теплового расширения $\{\widehat{\beta}_{ij}\}$) достаточно использовать не более пяти семейств армирующих волокон.

Замечание 7. На практике часто применяются симметричные укладки волокон $\{\pm\varphi_\alpha\}$, характеризующиеся соотношением $\varphi_\alpha = -\varphi_{M+1-\alpha}$, $\lambda_\alpha = \lambda_{M+1-\alpha}$, $\alpha = 1, \ldots, M/2$ (M — четное). В этом случае $R_3(\bar{\varphi}) = R_4(\bar{\varphi}) \equiv 0$ и размерность уравнения (2.9) снижается до двух (в (2.9) $i = 1, 2$). Линия Γ принимает вид

$$\Gamma = \{\bar{x} \in R^2 : x_1 = \cos^4\varphi, \; x_2 = \sin^4\varphi, \; \varphi \in \Phi_\alpha\}.$$

Для решения задачи могут применяться графические методы, наглядно иллюстрирующие используемую технику решения.

Рассмотрим случай, когда возможные углы укладки принимают конечное число значений $\{\varphi^\gamma\}_{\gamma=1}^m$. Задача (2.9), (2.6) сводится к задаче о выпуклых комбинациях (1.4) с

$$\bar{y}_\alpha = (\cos^4\varphi^\alpha, \; \sin^4\varphi^\alpha, \; \sin\varphi^\alpha\cos^3\varphi^\alpha, \; \sin^3\varphi^\alpha \cos\varphi^\alpha)$$

(или $\bar{y}_\alpha = (\cos^4\varphi^\alpha, \sin^4\varphi^\alpha)$ в случае симметричных укладок). Соответственно при $m \geqslant 5$ имеют место предложения 2, 3.

Выше мы считали объемное содержание волокон s фиксированным. Рассмотрим теперь следующую проблему.

Проектирование композита с заданными $\widehat{a}_{ijkl}$, $\widehat{\beta}_{ij}$ при использовании минимального объема волокна. Решить задачу $s \to \min$ при выполнении условий (2.9), (2.6), (2.8).

Поставленная задача легко сводится к предыдущей. Пусть $\bar{y}_0$ — некоторое решение системы S (2.7) (s_0 — соответствующее $\bar{y}_0$ объемное содержание волокна), при котором разрешима задача (2.9), (2.6), (2.8). Включение s в число переменных приводит к задаче (2.9), (2.6), (2.8) с правой частью (2.9), равной $\bar{y}_0 s_0/s$. Точки $L = \{\bar{y}_0 s_0/s : s \in [s_0, 0)\}$ образуют луч. В соответствии с п. а) предложения 4 достаточно найти точку пересечения луча L и выпуклого множества conv Г, что даст искомое значение s. Это стандартная задача выпуклого программирования.

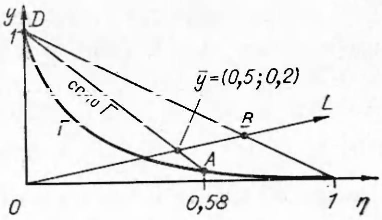

Рис. 1

Пример 1. Пусть требуется создать композит с усредненными жесткостями $\widehat{a}_{1111}=0{,}5\cdot 10^{11}$Па, $\widehat{a}_{2222}=0{,}2\cdot 10^{11}$ Па из волокон с модулем Юнга $E = 1{,}25 \cdot 10^{11}$ Па при объемном содержании волокна $s = 0{,}8$. Ограничений на углы укладки нет: $\Phi_\alpha = [0,\ \pi]$. Используются симметричные схемы укладки типа $\{\pm\varphi_\alpha\}$. Дуга

$$\Gamma = \{(\cos^4\varphi,\ \sin^4\varphi) : \varphi \in [0,\ \pi]\} = \{(\eta,\ (1-\sqrt{\eta})^2) \colon\ \eta = \cos^4\varphi \in [0,\ 1]\}$$

представлена на рис. 1. Там же изображена ее выпуклая оболочка conv Г. Решение системы S в рассматриваемом случае: $y_1 = 0{,}5$, $y_2 = 0{,}2$. Точка $\bar{y}$ принадлежит conv Г. Следовательно, задача проектирования разрешима. Проектов создания композита бесконечно много. Например, точка $\bar{y}$ может быть получена как выпуклая комбинация точек A и D. Углы укладки слоев волокон $\pm\varphi_1 = \pm\arccos 0 = \pm 90°$ и $\pm\varphi_2 \approx \pm\arccos\sqrt[4]{0{,}58} \approx \pm 31°$ (так как $\eta_1 = 0$, $\eta_2 \approx 0{,}58$, см. рис. 1). Удельные содержания волокна $\lambda_1 + \lambda_3 = |A\bar{y}|/|AD| \approx 0{,}15$, $\lambda_2 + \lambda_4 \approx 0{,}85$ делятся поровну между слоями волокон с углами укладки $\pm\varphi_\alpha$. Приведенная схема укладки решает задачу проектирования при использовании максимально больших углов укладки волокон (вопрос, играющий важную роль при изготовлении композита намоткой).

Решим задачу о создании того же композита при использовании минимального объема волокна. Луч $L = \{(0{,}5;\ 0{,}2)0{,}8/s\colon\ s \in [0{,}8;\ 0)\}$, см. рис. 1. Минимальному значению s, при котором задача (2.9), (2.6), (2.8) разрешима, соответствует точка B рис. 1. Теперь находим $\pm\varphi_1 = \pm 90°$, $\pm\varphi_2 = 0$, $\lambda_1 + \lambda_3 \approx 0{,}25$, $\lambda_2 + \lambda_4 \approx 0{,}75$. Объемное содержание волокна $s = 0{,}55$.

Проектирование волокнистых композитов с заданными деформационно-прочностными характеристиками. 1. Разрешима ли задача (2.9), (2.6), (2.8) с условием

$$M \equiv \max_{\alpha\in\Sigma}\{f_1(\varphi_\alpha,\ e_{ij}),\ f_2(\varphi_\alpha,\ \varphi_{\alpha+1},\ e_{ij}),\ f_b(\varphi_\alpha,\ e_{ij})\} \leqslant \sigma \tag{2.10}$$

($\sigma = 1$). 2. Если разрешима, то указать множество ее решений.

Методы решения сформулированной задачи основаны на приводившихся выше результатах. Рассмотрим случай, когда углы укладки волокон принимают конечное число значений $\{\varphi^\gamma\}_{\gamma=1}^m$. Введем множества ($\sigma = 1$)

$$\mathcal{U}_2(\sigma) = \{(\varphi,\ \psi) \in \{\varphi^\gamma\}_{\gamma=1}^m\colon\ f_1(\varphi,\ e_{ij}) \leqslant \sigma,\ f_1(\psi,\ e_{ij}) \leqslant \sigma,\ f_2(\varphi,\ \psi,\ e_{ij}) \leqslant \sigma\}; \tag{2.11}$$

$$\mathcal{U}(\sigma) = \{\varphi \in \{\varphi^\gamma\}_{\gamma=1}^m\colon\ f_b(\varphi,\ e_{ij}) \leqslant \sigma\}. \tag{2.12}$$

Период структуры композита содержит не более m слоев армирующих волокон разной ориентации. Каждый слой характеризуется углом укладки φ_α и удельным содержанием волокна λ_α, а вся структура — векторами $\bar{\varphi} = (\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_m)$, $\bar{\lambda} = (\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_m)$. Векторы $\bar{\varphi}$, $\bar{\lambda} \in R^m$ (отсутствующему слою отвечает $\lambda_\alpha = 0$). Отметим, что индексы α в φ_α и γ в φ^γ — возможные значения углов укладки — различные. Углы φ_α могут принимать любые значения из множества $\{\varphi^\gamma\}_{\gamma=1}^m$, а λ_α — равняться нулю (когда данная укладка не используется).

Рассмотрим два физически соседних армирующих слоя (припишем им индексы α, β). Вектор $\bar{\lambda}$ в части, соответствующей этим слоям, есть $\bar{\lambda} = (\ldots, \lambda_\alpha, 0, \ldots, 0, \lambda_\beta, \ldots)$. Условия прочности (2.11), (2.12) выполнены тогда и только тогда, когда соседние углы укладки

$$(\varphi_\alpha, \psi_\beta) \in \mathcal{U}_2(\sigma) \cap \mathcal{U}(\sigma). \tag{2.13}$$

Таким образом, надо получить алгоритм построения схем армирования $\bar{\lambda}$, $\bar{\varphi}$, для которых выполнено условие (2.13) для соседних (т. е. разделенных нулями в записи $\bar{\lambda}$) координат вектора $\bar{\varphi}$.

Для получения алгоритма достаточно указать, как, имея фрагмент векторов $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\varkappa)$, $(\varphi_1, \ldots, \varphi_\varkappa)$, $\varkappa < m$, удовлетворяющий (2.13), проводить его дополнение углом укладки $\psi \in \{\varphi^\gamma\}_{\gamma=1}^m$, отвечающим условию:

если $\qquad \lambda_{\varkappa+1} \neq 0$, то $(\varphi_\varkappa, \psi) \in \mathcal{U}_2(\sigma) \cap \mathcal{U}(\sigma)$,

если $\qquad \lambda_{\varkappa+1} = 0$, то ψ любое.

Один из возможных алгоритмов решения последней задачи таков ($\varkappa$ нумерует шаг алгоритма): 1. Полагаем $\varkappa = 1$ и выбираем произвольное целое число $R \leqslant m$. 1.1. Выбираем произвольную точку $(x, y) \in \mathcal{U}_2(\sigma) \cap \mathcal{U}(\sigma)$. 1.2. Полагаем $\varphi_1 = x$.
2. Среди точек вида $(\varphi_\varkappa, y)$ ищем принадлежащие $\mathcal{U}_2(\sigma) \cap \mathcal{U}(\sigma)$. Если таковых нет — останов. Если есть, полагаем $\varphi_{\varkappa+1} = y$ и $\varkappa = \varkappa + 1$. Если $\varkappa = R$ — останов (полагаем $\varphi_{R+1} = \ldots = \varphi_m = 0$), если $\varkappa < R$ — повторение п. 2. Число R имеет смысл числа ненулевых элементов в векторе $\bar{\lambda}$. Варьируя выборы, получаем различные векторы $\bar{\varphi}$, $\bar{\lambda}$.

Расположение координат в полученном векторе $\bar{\varphi}$ произвольное. Упорядочим его координаты в том же порядке, что в $\{\varphi^\gamma\}_{\gamma=1}^m$. Пусть, например, $\{\varphi^\gamma\}_{\gamma=1}^m$ расположены в порядке возрастания. Обозначим через N оператор перестановки, располагающий координаты $\bar{\varphi}$ в порядке возрастания: $(N\bar{\varphi})_1 \leqslant \ldots \leqslant (N\bar{\varphi})_m$. Тем же оператором подействуем на вектор $\bar{\lambda}$. Мы удовлетворяем применением алгоритма условию (2.10). Требуется удовлетворить еще (2.9), (2.8), (2.5). Это условие равносильно в силу предложения 2 следующему: $N\bar{\lambda} \in \Lambda(\bar{y})$, где $\Lambda(\bar{y})$ дается (1.6). Отметим, что возникшие здесь условия на $N\bar{\lambda}$ сводятся только к тому, что на определенных местах $N\bar{\lambda}$ стоят нули.

Пусть $\bar{v} \in R^m$, определим по нему вектор $\operatorname{sgn} \bar{v}$ (сигнатура $\bar{v}$) по правилу: $(\operatorname{sgn} \bar{v})_i = 0$, если $v_i = 0$, $(\operatorname{sgn} \bar{v})_i = 1$, если $v_i \neq 0$. Будем писать $\operatorname{sgn} \bar{v} \in \operatorname{sgn} \bar{w}$, если из $(\operatorname{sgn} \bar{v})_i = 1$ следует $(\operatorname{sgn} \bar{w})_i = 1$ $\forall i = 1, \ldots, m$.

Таким образом, нам надо проверить включение $\operatorname{sgn} N\bar{\lambda} \ni \operatorname{sgn} \bar{\lambda}$ для некоторого $\bar{\lambda} \in \Lambda(\bar{y})$. Поскольку сумма чисел $\lambda_\alpha \geqslant 0$ равна 1, то это условие равносильно $\bar{\lambda} \operatorname{sgn} N\bar{\lambda} = 1$ для некоторого $\bar{\lambda} \in \Lambda(\bar{y})$. Подставляя сюда $\bar{\lambda}$ через симплициальные решения (см. предложение 2), получаем

$$\sum_{\eta=1}^{M} \mu_\eta \left(\bar{s}_\eta(\bar{y}) \operatorname{sgn} N\bar{\lambda} - 1\right) = 0$$

для некоторого набора $\{\mu_\eta\}$. Поскольку

$$\bar{s}_\eta(\bar{y}) \operatorname{sgn} N\bar{\lambda} \leqslant \sum_{\alpha=1}^{m} s_{\eta\alpha}(\bar{y}) = 1 \text{ и } \mu_\eta \geqslant 0, \text{ то}$$

$$\mu_\eta(\bar{s}_\eta(\bar{y}) \operatorname{sgn} N\bar{\lambda} - 1) = 0 \text{ для всех } \eta = 1, \ldots, M.$$

Таким образом, вопрос свелся к вопросу о существовании симилициальных решений, для которых

$$\bar{s}_\eta(\bar{y}) \operatorname{sgn} N\bar{\lambda} = 1 \tag{2.14}$$

(так как μ_η не могут в силу $\sum\limits_{\eta=1}^{M} \mu_\eta = 1$ одновременно обращаться в нули). Проверка последнего условия из-за конечности числа симплициальных решений легко реализуется практически.

Иными словами, процедура решения задачи проектирования состоит в том, что мы инициируем алгоритмом различные схемы армирования, удовлетворяющие (2.11), (2.12), до тех пор, пока не находим схему армирования, удовлетворяющую (2.14). Разумеется, после этого можно продолжить действия с целью нахождения и других схем.

Проектирование композита максимальной прочности. Выше мы полагали (см. (2.11), (2.12)) $\sigma = 1$. Согласно определению, σ — значение максимума в (2.10): $M = \sigma$. Соответственно $M = \sigma$ при $\sigma \leqslant 1$ имеет физический смысл запаса прочности (указывая, насколько значения критерия прочности M «удалены» от предельного значения, равного единице).

Решение задачи $M \to \min$ при выполнении условий (2.9), (2.8), (2.5) проводится на основании описанного выше алгоритма. Только σ в определениях (2.11), (2.12) берется равным не 1, а в виде возрастающего от 0 до 1 параметра, ищется минимальное значение σ, при котором разрешима задача (2.9), (2.8), (2.5), (2.10). Поскольку при конечном числе значений углов укладки изменение множеств (2.11), (2.12) при росте σ от 0 до 1 происходит дискретно, то задача нахождения указанного σ становится вполне практически решаемой (аналогичный случай рассмотрен в [16]).

Проектирование конструкций. Композиционные технологии естественным образом совмещают возможности проектирования материалов и конструкций (под последними понимаются тела с распределенными механическими характеристиками). Управление микроструктурой композита позволяет, в принципе, получить тело с заданным распределением усредненных характеристик, скажем, упругих $\widehat{a}_{ijkl}(\bar{x})$, $\bar{x} \in Q$ (Q — область, занятая конструкцией).

Как решить задачу практически? Это можно сделать на основе изложенных методов. Возьмем соотношения (1.1) или (2.1), составим систему S и решим ее. Решение будет зависеть от $\bar{x} \in Q$ как от параметра. После чего решим задачу (1.4) (или (2.9)) с правой частью $\bar{y} \in Y(\bar{x})$. Получим искомый ответ — локальную структуру композита в данной точке конструкции. Возможность дискретизации параметра $\bar{x} \in Q$, что необходимо при практическом решении задачи, следует из предложения 3 (при условии $Y(\bar{x}) \in C(Q)$).

П р и м е р 2. Пусть требуется изготовить материал со следующим распределением жесткостей: $\widehat{a}_{1111} = (0{,}25 - 0{,}125x_1)\cdot 10^{11}$ Па, $\widehat{a}_{2222} = 0{,}25 \times \times 10^{11}$ Па, где $x_1 \in [0,\ 1]$. Пусть используется волокно с модулем Юнга $E = 1{,}25\cdot 10^{11}$ Па (стекловолокно). Применяются симметричные схемы армирования типа $\{\pm\varphi_\alpha\}$.

Решение системы S при $s_0 = 1$ (физически нереализуемо) $\bar{y}_0(x_1) = (0{,}2 - 0{,}1x_1;\ 0{,}2)$, чему соответствует луч $L(x_1) = \{(1/s)(0{,}2 - 0{,}1x_1;\ 0{,}2)\colon s \in [1,\ 0)\}$. Положим $\Phi_\alpha = [45°,\ 90°]$. В рассматриваемом случае $\Gamma = \{(\eta,\ (1 - \sqrt{\eta})^2)\colon \eta \in [0,\ \cos^4 45°]\}$ (рис. 2, там же изображены лучи $L(x_1)$). Как видно, задача разрешима, так как $L(x_1) \cap \operatorname{conv} \Gamma \neq \varnothing$ для всех $x_1 \in [0{,}1]$; решения неединственны. Выше накладывалось условие непрерывности $\widehat{a}_{ijkl}(\bar{x})$ (и $Y(\bar{x})$), но в нашем случае оно сохраняет множественность решений, что, разумеется, не является недостатком и дает свободу при выборе технологии реализации проекта. Не желая загромождать демонстрационное решение, выделим единственное решение требованием: объемное содержание волокна должно быть минимально. Геометрически это означает, что рассматриваются точки отрезка $[c,\ d]$. Находим, что объемное содержание волокна в проекте

$$s(x_1) = 0{,}8 - 0{,}3x_1.$$

После чего решаем задачу (2.9), (2.6), (2.8) с правой частью $(1/s(x_1))\bar{y}_0(x_1)$:

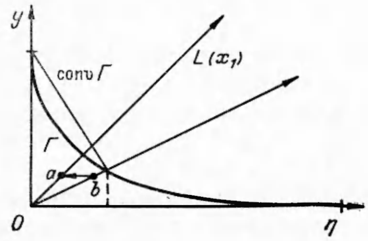

Рис. 2

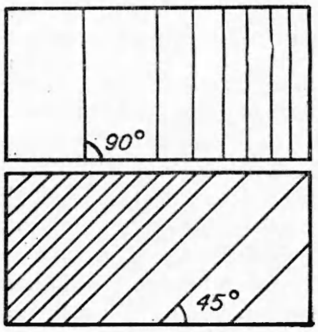

Рис. 3

углы укладки $\pm\varphi_1(x_1) = 90°$, $\pm\varphi_2(x_1) = \pm 45°$, удельные содержания волокна в армирующих слоях $\lambda_1(x_1) + \lambda_3(x_1) = 0{,}205x_1$ и $\lambda_2(x_1) + \lambda_4(x_1) = 1 - 0{,}205\, x_1$ (удельные содержания делятся поровну между слоями с углами $\pm\varphi_\alpha$).

Объемные содержания волокон в армирующих семействах $\lambda_1(x_1)s(x_1) = 0{,}205x_1(0{,}8-0{,}3x_1)$, $\lambda_2(x_1)s(x_1) = (1-0{,}205x_1)(0{,}8 - 0{,}3x_1)$.

Требуемое распределение плотности укладки волокна, достигаемое управлением интенсивностью укладки, представлено на рис. 3 (представлены семейства с углами укладки $\varphi_1 = 90$ и $\varphi_3 = 45°$).

Применение ЭВМ для решения задач проектирования. В приведенных примерах графического решения задачи проектирования существенно использована низкая размерность соответствующей задачи о выпуклых комбинациях. В практически возникающих случаях размерность (число уравнений в (1.4)) порядка 10. В случае волокнистых композитов размерность от 4 и выше (за счет введения дополнительных переменных, см. далее). Задача о выпуклых комбинациях — типичная задача выпуклого анализа, для которой характерна неэффективность прямых методов решения в связи с очень быстрым ростом объема вычислений при увеличении размерности задачи. Для получения частных решений (1.4) или (2.9), (2.6), (2.8) эффективным оказывается симплекс-метод. В [22] предложен алгоритм построения общего решения $\Lambda(\bar{y})$, основанный на последовательном удовлетворении уравнений в задаче о выпуклых комбинациях (на основе построения на каждом шаге множества симплициальных решений одномерной задачи, что осуществляется в явном виде и, делая вычислительный процесс целенаправленным, дает возможность проводить расчеты для практически возникающего числа уравнений). Алгоритм реализован в виде программ для ЭВМ, показавших свою работоспособность на модельных задачах [23, 24].

Использование разносортных волокон (гибридные композиты). Функционалы $R_1(\bar{\varphi})$, ..., $R_4(\bar{\varphi})$, $J_1(\bar{\varphi})$, $J_2(\bar{\varphi})$ приобретают вид

$$R_1(\bar{\varphi}) = \sum_{\delta=1}^{s^*}\sum_{\alpha=1}^{m} E_\delta \cos^4 \varphi_\alpha \lambda_{\alpha\delta} \text{ и т. д.},$$

$$J_1(\bar{\varphi}) = \sum_{\delta=1}^{s^*}\sum_{\alpha-1}^{m} \beta_\delta \cos^2 \varphi_\alpha \lambda_{\alpha\delta} \text{ и т. д.},$$

$$\lambda_{\alpha\delta} \geqslant 0, \quad \sum_{\delta=1}^{s^*}\sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_{\alpha\delta} = 1,$$

где s^* — число сортов используемых волокон; $\lambda_{\alpha\delta}$ — удельное (отнесенное к s) содержание волокон δ-го сорта в слое волокон с углом укладки φ_α. Функционалы $R_1(\bar{\varphi})$, ..., $R_4(\bar{\varphi})$ и $J_1(\bar{\varphi})$, $J_2(\bar{\varphi})$ при этом становятся независимыми. Размерность задачи возрастает до шести. Условие разрешимости таково: решение $\bar{y}$ системы S принадлежит выпуклой оболочке множества

$$\Gamma = \{\bar{x} \in R^6 \colon x_1 = E\cos^4\varphi, \ldots, x_5 = \beta\cos^2\varphi, \ldots,$$
$$\varphi \in \Phi_\alpha, \quad (E, \beta) \in \{(E_\delta, \beta_\delta)\}_{\delta=1}^{s*}\}.$$

Рост размерности задачи и множества Γ расширяет класс возможных свойств композитов.

3. Проектирование пластинок. Слоистые пластинки. Развитые в [25] (см. также библиографию в [26]) методы позволяют получить явные выражения для жесткостей слоистой пластинки и сформулировать задачу проектирования слоистых пластинок с заданными жесткостями. В рассматриваемом случае возникает уравнение вида

$$\int_0^1 \bar{f}(\bar{u}(y), y)\, dy = \bar{y}. \tag{3.1}$$

В [27] дано описание множества возможных значений усредненных характеристик слоистых пластинок (на множестве материалов с неотрицательными механическими характеристиками), в [27, 28] обсуждаются методы численного решения уравнения (3.1), рассмотрены примеры. Отметим, что при большом количестве слоев задача сводится к рассмотренной в разделе 1, см. [29].

Волокнистые пластинки. В [30] проведен ряд расчетов локальных напряжений в пластинке волокнистого строения, позволяющих дать оценки напряжений в связующем, приведены значения усредненных жесткостей. В совокупности с [31] это позволяет сформулировать задачу проектирования.

В целом изучение методов решения задач проектирования композиционных пластинок с заданными характеристиками только начинается. Появление в этом случае аргумента y в функции $f(\bar{u}, y)$, не препятствуя применению развитых выше методов, резко повышает размерность задач при численном счете.

Слоистые мембраны, покрытия и т. п. Характеристики слоистых покрытий и перегородок (см. [32, 33]), как правило, даются в виде некоторых типов средних, что позволяет использовать для их проектирования изложенные методы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.** Asymptotic analysis for periodic structures.— Amsterdam: North-Holland, 1976.
2. **Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.** Усреднение процессов в периодических средах.— М.: Наука, 1984.
3. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач.—М.: Наука, 1986.
4. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.— М.: Мир, 1972.
5. **Литвинов В. Г.** Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике.— М.: Наука, 1987.
6. **Панасенко Г. П.** Прочность пространственно-армированных композиционных материалов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика.— 1985.— № 1.
7. **Колпаков А. Г.** Осреднение некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Мат. сб.— 1982.— Т. 119, вып. 4.
8. **Колпаков А. Г.** К определению некоторых эффективных характеристик композиционных материалов // V Всесоюз. съезд по теор. и прикл. механике: Аннот. докл.— Алма-Ата: Наука, 1981.
9. **Колпаков А. Г.** Эффективные термоупругие характеристики неоднородного материала // Динамика сплошной среды/ИГ СО АН СССР.— 1981.— Вып. 49.
10. **Алёхин В. В., Аннин Б. Д., Колпаков А. Г.** Синтез слоистых материалов и конструкций.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1988.
11. **Колпаков А. Г., Ракин С. И.** К задаче синтеза композиционного материала одномерного строения с заданными характеристиками // ПМТФ.— 1986.— № 6.

12. **Алёхин В. В., Колпаков А. Г.** Синтез слоистых упругих тел и материалов // VI Всесоюз. съезд по теор. и прикл. механике: Аннот. докл.— Ташкент, 1986.
13. **Рокафеллар Р. Т.** Выпуклый анализ.— М.: Мир, 1973.
14. **Колпаков А. Г., Ракин С. И.** Задача синтеза композита одномерного строения в заданном классе материалов // Динамика сплошной среды/ ИГ СО АН СССР.— 1986.— Вып. 78.
15. **Колпаков А. Г.** Осреднение в одном обыкновенном дифференциальном уравнении второго порядка // Дифференц. уравнения.— 1982.— Т. 18, № 10.
16. **Аннин Б. Д., Колпаков А. Г.** Проектирование слоистых композитов с заданными деформационно-прочностными характеристиками // Механика композит. материалов.— 1987.— № 1.
17. **Аннин Б. Д., Колпаков А. Г.** Проектирование слоистых композитов с заданными деформационно-прочностными характеристиками // VI Всесоюз. конф. по полимерным и композит. материалам: Тез. докл.— Рига: Зинатне, 1986.
18. **Лурье К. А., Черкаев А. В.** Регуляризация проблемы оптимального проектирования неоднородных тел с помощью композиционных материалов // V Всесоюз. съезд по теор. и прикл. механике: Аннот. докл.— Алма-Ата: Наука, 1981.
19. **Работнов Ю. И.** Механика деформируемого твердого тела.— М.: Наука, 1979.
20. **Лионс Ж.-Л.** Замечания по некоторым вычислительным аспектам метода гомогенизации в композиционных материалах // Вычислительные методы в математике, геофизике и оптимальном управлении.— Новосибирск: Наука, 1978.
21. **Колпаков А. Г.** Усредненные характеристики слоистых композитов (численный алгоритм) // Численные методы решения задач упругости и пластичности: Материалы IX Всесоюз. конф.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1986.
22. **Колпаков А. Г.** Усредненный критерий прочности связующего волокнистых композитов // ПМТФ.— 1988.— № 2.
23. **Колпаков А. Г.** Задача проектирования волокнистых композитов с заданными характеристиками // Материалы VI Всесоюз. конф. по композиционным материалам.— Ереван, 1987.— Т. 1.
24. **Колпаков А. Г.** Деформационно-прочностные характеристики слоистых и волокнистых композитов. Расчет и проектирование // I Всесоюз. симпоз. «Механика и физика разрушения композитных материалов и конструкций»: Тез. докл.— Ужгород, 1988.
25. **Gailleria D.** Thin elastic and periodic plates // Math. Meth. Engng Sci.— 1986.— N 12.
26. **Каламкаров А. Л., Кудрявцев Б. А., Партон В. З.** Асимптотический метод осреднения в механике композитов регулярной структуры // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела.— М.: ВИНИТИ, 1987.— Т. 19.
27. **Колпаков А. Г.** Расчет и проектирование слоистых пластинок // ПМТФ.— 1989.— № 4.
28. **Колпаков А. Г.** Прочностные характеристики слоистых конструкций: (Расчет и проектирование) // III Всесоюз. науч.-техн. совещание «Динамика и прочность автомобиля»: Тез. докл.— М., 1988.
29. **Колпаков А. Г.** Эффективные жесткости композиционных пластинок // ПММ.— 1982.— Т. 46, вып. 6.
30. **Партон В. З., Каламкаров А. Л., Колпаков А. Г.** К расчету высокомодульных перекрестно-армированных композитных оболочек // Механика композит. материалов.— 1989.— № 1.
31. **Каламкаров А. Л.** К определению эффективных характеристик сетчатых оболочек и пластинок периодической структуры // Изв. АН СССР. МТТ.— 1987.— № 2.
32. **Колпаков А. Г., Колпакова И. Г.** Теплопроводность через границу с нелокальными характеристиками // Дифференц. уравнения.— 1985.— Т. 21, № 9.
33. **Колпаков А. Г.** Об асимптотике первой краевой задачи для эллиптических уравнений в области с тонким покрытием // Сиб. мат. журн.— 1988.— Т. 29, № 6.

г. Новосибирск *Поступила 22/VI 1989 г.*

УДК 539.3+539.4

В. И. Герман, В. В. Кобелев

РАЦИОНАЛЬНОЕ АРМИРОВАНИЕ В ЗАДАЧЕ О ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ИДЕАЛЬНОГО ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТА

Проблемы отыскания оптимальной анизотропии и рациональной структуры армирования деталей из композиционных материалов, находящихся в плоском напряженном или плоском деформированном состоянии, изучались в [1—5]. В [1, 2] установлен критерий максимальной прочности деталей из слоистых анизотропных компози-