УДК 539.3

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ТЕЛА С ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

С. А. Назаров

Институт проблем машиноведения РАН, 199178 Санкт-Петербург
E-mail: serna@snark.ipme.ru

Получены явные представления для начальных членов асимптотики решения спектральной задачи теории упругости в плоской области с быстроосциллирующей границей. На основе асимптотических формул предложены два способа моделирования задачи: с помощью краевых условий Вентцеля и с использованием принципа гладкого изображения сингулярно возмущенной границы. Обсуждаются различные подходы к обоснованию асимптотических представлений.

Ключевые слова: анизотропное упругое тело, мелкозернистая граница, асимптотические представления.

1. Тело с шероховатой поверхностью. Пусть Ω — плоское неоднородное анизотропное упругое тело, ограниченное простым гладким замкнутым контуром Γ. Масштабированием сведем длину контура к единичной и, обозначив малый параметр $h = N^{-1}$, где N — большое натуральное число, определим быстроосциллирующую (мелкозернистую) границу

$$\Gamma_h = \{x \in O_\Gamma\colon n = hH(s, h^{-1}s)\} \tag{1.1}$$

тела Ω_h (рис. 1). Здесь O_Γ — окрестность множества Γ, на которой введена ортогональная система (n, s) криволинейных координат; s — длина дуги на Γ; n — ориентированное расстояние до контура Γ ($n > 0$ вне Ω); H — гладкая функция медленной s и быстрой

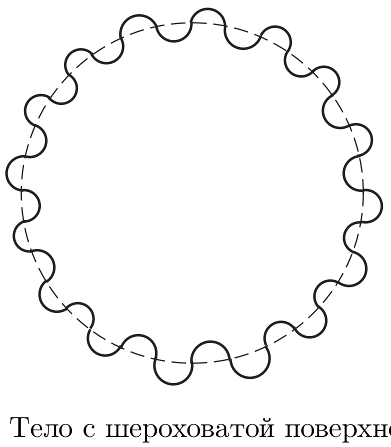

Рис. 1. Тело с шероховатой поверхностью

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-01-00257).

$\eta_2 = h^{-1}s$ переменных, периодическая относительно последней (в данной работе период предполагается единичным).

Рассмотрим задачу о собственных колебаниях тела Ω_h:

$$-\partial_{x_1}\sigma_{1k}(u;h,x) - \partial_{x_2}\sigma_{2k}(u;h,x) = \Lambda(h)\rho(x)u_k(h,x), \qquad x \in \Omega_h; \tag{1.2}$$

$$\sigma_k^{(\nu)}(u;h,x) := \nu_1(h,x)\sigma_{1k}(u;h,x) + \nu_2(h,x)\sigma_{2k}(u;h,x) = 0, \qquad x \in \Gamma_h. \tag{1.3}$$

Здесь $\rho > 0$ и $\Lambda(h) \geqslant 0$ — плотность материала и квадрат собственной частоты; $\partial_{x_j} = \partial/\partial x_j$; $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — единичный вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega_h = \Gamma_h$; $u = (u_1, u_2)$ — вектор смещений; σ_{jk} — декартовы компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_{jk}(u;h,x) = \sum_{p,q=1}^{2} A_{jk}^{pq}(x)\varepsilon_{pq}(u;h,x), \qquad \varepsilon_{pq}(u) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_p}{\partial x_q} + \frac{\partial u_q}{\partial x_p}\Big).$$

Поскольку при $H > 0$ область Ω_h шире области Ω, компоненты A_{jk}^{pq} четырехвалентного тензора A, гладкого, симметричного и положительно-определенного, зададим в окрестности $\Omega \cup O_\Gamma$ множества $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Другие поля, не зависящие от параметра h, также считаем гладко продолженными в область, внешнюю по отношению к Ω. Для краткости записи далее не указываем параметр h среди аргументов функций. В дальнейшем в обозначениях не различаем точку контура Γ и ее координату s.

В пп. **2–4** представлен асимптотический анализ сформулированной спектральной задачи и получены в значительной степени явные формулы для двух членов асимптотических разложений ее решений. Однако основная цель работы — моделирование задачи в области с быстроосциллирующей границей (1.1), а именно построение более простых по постановке краевых задач, решения которых дают приближение повышенной точности (двучленную асимптотику) для решения $\{\Lambda, u\}$ в области Ω_h. Для скалярной задачи Дирихле различные способы моделирования разработаны в [1]. Помимо технических проблем, связанных с определением членов асимптотического анзаца в задаче теории упругости с краевыми условиями в напряжениях (аналог условий Неймана) возникает еще одна трудность: спектральный параметр присутствует в краевых условиях предельной и результирующей задач.

2. Построение главных членов асимптотики. Как известно, вблизи быстроосциллирующей границы возникает пограничный слой (см., например, [2, 3]), поэтому асимптотический анзац для решения $\{\Lambda, u\}$ спектральной задачи (1.2), (1.3) берем в следующем виде:

$$\Lambda = \lambda_0 + h\lambda_1 + \ldots; \tag{2.1}$$

$$u(x) = v^0(x) + hv^1(x) + \chi(n)h(w^1(s,\eta) + hw^2(s,\eta)) + \ldots. \tag{2.2}$$

Здесь v^i — слагаемые регулярного типа; w^i — слагаемые типа пограничного слоя, умноженные на срезающую функцию χ, которая равна единице вблизи контура Γ и нулю вне множества O_Γ. Слагаемые регулярного типа являются решениями задач в области $\Omega = \Omega_0$, ограниченной предельным контуром $\Gamma = \Gamma_0$; например, формальный переход к $h = 0$ приводит к соотношениям

$$-\partial_{x_1}\sigma_{1k}(v^0;x) - \partial_{x_2}\sigma_{2k}(v^0;x) = \lambda_0\rho(x)v_k^0(x), \qquad x \in \Omega; \tag{2.3}$$

$$\sigma_k^{(n)}(v^0;x) := n_1(s)\sigma_{1k}(v^0;x) + n_2(s)\sigma_{2k}(v^0;x) = 0, \qquad x \in \Gamma. \tag{2.4}$$

Поскольку нормаль $n = (n_1, n_2)$ к контуру Γ отличается от осциллирующей нормали ν к контуру Γ_h, решение задачи (2.3), (2.4) оставляет невязку в краевом условии (1.3), которая компенсируется слагаемыми типа пограничного слоя. Вектор-функции w^i зависят не только от медленной переменной $s \in \Gamma$, но и от быстрых переменных

$$\eta = (\eta_1, \eta_2) = (h^{-1}n, h^{-1}s). \tag{2.5}$$

Замена координат $x \mapsto \eta$ и локально-периодическое строение границы (1.1) предопределяют возникновение полуполосы

$$\Pi(s) = \{\eta \in \mathbb{R}^2 \colon \eta_2(0,1), \eta_1 < H(s,\eta_2)\} \tag{2.6}$$

в качестве еще одной предельной области; торец полуполосы $\pi(s) = \{\eta \in \partial\Pi(s) \colon \eta_1 \in (0,1)\}$ искривлен. Введем проекции вектора w^i на оси n и s:

$$\boldsymbol{w}_1^i = w_n^i = n_1 w_1^i + n_2 w_2^i, \qquad \boldsymbol{w}_2^i = w_s^i = -n_2 w_1^i + n_1 w_2^i.$$

Поскольку растяжение координат в h^{-1} раз и переход к $h = 0$ подразумевают "замораживание" зависимостей от медленных переменных в точках $s \in \Gamma$, координаты (2.5) следует рассматривать в главном как декартовы. Положим $\boldsymbol{w}^i = (\boldsymbol{w}_1^i, \boldsymbol{w}_2^i)$ и

$$\boldsymbol{\sigma}_{jk}(\boldsymbol{w}; s, \eta) = \sum_{p,q=1}^{2} \boldsymbol{A}_{jk}^{pq}(0,s)\boldsymbol{\varepsilon}_{pq}(\boldsymbol{w}; s, \eta), \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_{pq}(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{w}_p}{\partial \eta_q} + \frac{\partial \boldsymbol{w}_q}{\partial \eta_p}\Big), \tag{2.7}$$

где $\boldsymbol{A}_{jk}^{pq}(0,s)$ — компоненты тензора $\boldsymbol{A}(0,s)$, полученного ортогональным преобразованием тензора $A(x)\big|_{n=0}$ с помощью матрицы

$$\Theta(s) = \begin{pmatrix} n_1(s) & n_2(s) \\ -n_2(s) & n_1(s) \end{pmatrix}.$$

Сохраняя обозначение $v^i(n,s)$ для полей, записанных на множестве $\Omega \cap O_\Gamma$ в криволинейных координатах, имеем $\boldsymbol{v}^i(0,s) = \Theta(s)v^i(0,s)$. Приведем также формулы для деформаций и уравнения равновесия в системе координат (n,s):

$$\begin{gathered} \varepsilon_{nn}(u) = \partial_n u_n, \qquad \varepsilon_{ss}(u) = J^{-1}(\partial_s u_s + \varkappa u_n), \\ \varepsilon_{ns}(u) = \varepsilon_{sn}(u) = (\partial_n u_s + J^{-1}(\partial_s u_n - \varkappa u_s))/2; \end{gathered} \tag{2.8}$$

$$\begin{gathered} -\partial_n \sigma_{nn}(u) - J^{-1}(\partial_s \sigma_{ns}(u) + \varkappa(\sigma_{nn}(u) - \sigma_{ss}(u))) = \Lambda\rho u_n, \\ -\partial_n \sigma_{sn}(u) - J^{-1}(\partial_s \sigma_{ss}(u) + 2\varkappa\sigma_{ns}(u)) = \Lambda\rho u_s. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Здесь $J(n,s) = 1 + n\varkappa(s)$ — якобиан; $\varkappa(s)$ — кривизна дуги Γ в точке s. Наконец, проекции нормали ν на оси n и s допускают представления

$$\begin{gathered} \nu_n(s,\eta) = \boldsymbol{\nu}_1(s,\eta_2)(1 - hY(s,\eta)) + O(h^2), \\ \nu_s(s,\eta) = \boldsymbol{\nu}_2(s,\eta_2)(1 - hY(s,\eta)) - h(\boldsymbol{\nu}_2(s,\eta_2)\eta_1\varkappa(s) + y(s,\eta_2)\partial_s H(s,\eta_2)) + O(h^2), \\ Y = \boldsymbol{\nu}_1\boldsymbol{\nu}_2(\partial_s H - \varkappa H \partial_{\eta_2} H), \qquad y = (1 + |\partial_{\eta_2} H|^2)^{-1/2}, \end{gathered} \tag{2.10}$$

где $\boldsymbol{\nu} = (\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)$ — единичный вектор нормали к торцу полуполосы $\Pi(s) \subset \mathbb{R}^2 \ni \eta$.

В соотношениях (2.8) и (2.9) перейдем к растянутым координатам (2.5) и подставим анзац (2.2) в уравнения (1.2) и краевые условия (1.3). Собирая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра и приравнивая их суммы к нулю, получаем следующие задачи в полуполосе (2.6):

$$\begin{gathered} -\partial_{\eta_1}\boldsymbol{\sigma}_{1k}(\boldsymbol{w}^i; s, \eta) - \partial_{\eta_2}\boldsymbol{\sigma}_{2k}(\boldsymbol{w}^i; s, \eta) = \boldsymbol{F}_k^i(s,\eta), \qquad \eta \in \Pi(s), \\ \boldsymbol{\sigma}_k^{(\nu)}(\boldsymbol{w}^i; s, \eta) := \boldsymbol{\nu}_1(s,\eta_2)\boldsymbol{\sigma}_{1k}(\boldsymbol{w}^i; s, \eta) + \boldsymbol{\nu}_2(s,\eta_2)\boldsymbol{\sigma}_{2k}(\boldsymbol{w}^i; s, \eta) = \boldsymbol{G}_k^i(s), \quad \eta \in \pi(s), \end{gathered} \tag{2.11}$$

$$\boldsymbol{w}^i(s,\eta_1,0)=\boldsymbol{w}^i(s,\eta_1,1),\qquad \partial_{\eta_2}\boldsymbol{w}^i(s,\eta_1,0)=\partial_{\eta_2}\boldsymbol{w}^i(s,\eta_1,1),\qquad \eta_1<H(s,0).$$

При этом согласно разложению (2.10) имеем

$$\boldsymbol{F}_k^0(s,\eta)=0,\qquad \boldsymbol{G}_1^0(s,\eta)=0,\qquad \boldsymbol{G}_2^0(s,\eta)=-\boldsymbol{\nu}_2(s,\eta_2)\sigma_{ss}(v^0;0,s) \tag{2.12}$$

($\boldsymbol{G}_2^0$ — главная часть невязки вектор-функции v^0 в краевом условии (1.3): все напряжения, кроме $\sigma_{ss}(v^0;0,s)$, аннулируются на Γ в силу соотношений (2.4)).

Среднее компоненты $\boldsymbol{\nu}_2$ по торцу $\pi(s)$ равно нулю, а значит, при $i=0$ задача (2.11) имеет единственное экспоненциально затухающее на бесконечности решение

$$\boldsymbol{w}^0(s,\eta)=-\boldsymbol{W}(s,\eta)\sigma_{ss}(v^0;0,s). \tag{2.13}$$

Этот факт, вытекающий, например, из общих результатов [4, гл. 6], выражает известный принцип Сен-Венана при учете условий периодичности на боковых сторонах полуполосы $\Pi(s)$. Следует отметить, что затухание решения (2.13) типа пограничного слоя подтверждает правильность выбора краевых условий в задаче (2.3), (2.4) для решения регулярного типа.

Ясно, что $\boldsymbol{W}$ — решение задачи (2.11) с правыми частями $\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{F}_2=0$, $\boldsymbol{G}_1=0$ и $\boldsymbol{G}_2=\boldsymbol{\nu}_2$. С помощью этого решения введем аналогичную упругой емкости [5] энергетическую характеристику упругой полуполосы

$$m(s)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{W};\Pi(s))=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{2}\int\limits_{\Pi(s)}\boldsymbol{\sigma}_{jk}(\boldsymbol{W};s,\eta)\,\boldsymbol{\varepsilon}_{jk}(\boldsymbol{W};s,\eta)\,d\eta. \tag{2.14}$$

Величина (2.14) неотрицательна и вырождается лишь в том случае, когда $\pi(s)$ — отрезок, параллельный оси η_2, и, следовательно, $\boldsymbol{W}=0$.

3. Младшие члены асимптотики. Второй член v^1 регулярного типа удовлетворяет уравнениям

$$-\partial_{x_1}\sigma_{1k}(v^1;x)-\partial_{x_2}\sigma_{2k}(v^1;x)=\rho(x)(\lambda_0v_k^1(x)+\lambda_1v_k^0(x)),\qquad x\in\Omega, \tag{3.1}$$

а правые части краевых условий

$$\sigma_k^{(n)}(v^1;0,s)=g_k^1(s),\qquad s\in\Gamma \tag{3.2}$$

определяются из условий затухания решения w^1 типа пограничного слоя, удовлетворяющего задаче (2.11) при $i=1$. Найдем правые части $\boldsymbol{F}^1$ и $\boldsymbol{G}^1$ задачи (2.11), содержащиеся согласно [4, гл. 6] в указанных условиях:

$$\int\limits_{\Pi(s)}\boldsymbol{F}_k^1(s,\eta)\,d\eta+\int\limits_{\pi(s)}\boldsymbol{G}_k^1(s,\eta)\,ds_\eta=0,\qquad k=1,2. \tag{3.3}$$

Компоненты вектор-функции $\boldsymbol{F}^1$ принимают вид

$$\begin{gathered}\boldsymbol{F}^1=\partial_s\boldsymbol{\sigma}_{12}(\boldsymbol{w}^0)+\varkappa(\boldsymbol{\sigma}_{11}(\boldsymbol{w}^0)-\boldsymbol{\sigma}_{22}(\boldsymbol{w}^0))-\varkappa\eta_1\partial_{\eta_2}\boldsymbol{\sigma}_{12}(\boldsymbol{w}^0)+\partial_{\eta_1}\Sigma_{11}+\partial_{\eta_2}\Sigma_{12},\\ \boldsymbol{F}^2=\partial_s\boldsymbol{\sigma}_{22}(\boldsymbol{w}^0)+2\varkappa\boldsymbol{\sigma}_{12}(\boldsymbol{w}^0)-\varkappa\eta_1\partial_{\eta_2}\boldsymbol{\sigma}_{22}(\boldsymbol{w}^0)+\partial_{\eta_1}\Sigma_{21}+\partial_{\eta_2}\Sigma_{22}.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Первые члены в правых частях (3.4) появились в соответствии с правилом дифференцирования сложной функции

$$\frac{dz}{ds}\Big(s,\frac{s}{h}\Big)=\Big(\frac{\partial z}{\partial s}(s,\eta_2)+\frac{1}{h}\,\frac{\partial z}{\partial\eta_2}(s,\eta_2)\Big)\Big|_{\eta_2=h^{-1}s}, \tag{3.5}$$

вторые и третьи — вследствие присутствия в уравнениях равновесия (2.9) кривизны $\varkappa(s)$ и якобиана $J(n,s)^{-1} = 1-h\eta_1\varkappa(s)+O(h^2)$, а четвертые и пятые — в связи с необходимостью учитывать соотношения (2.8), (3.5) и разложение Тейлора

$$A(n,s) = A(0,s) + h\eta_1\partial_n A(0,s) + O(h^2) \tag{3.6}$$

при вычислении истинных напряжений $\sigma_{pq}(w^0)$. Явный вид выражений Σ_{jk} не требуется, так как в формуле (3.3) они сокращаются с аналогичными членами в компонентах вектор-функции $\boldsymbol{G}^1$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}_1^1 = -\boldsymbol{\nu}_1\Sigma_{11} - \boldsymbol{\nu}_2\Sigma_{12} - H(\boldsymbol{\nu}_1\,\partial_n\sigma_{nn}(v^0) + \boldsymbol{\nu}_2\,\partial_n\sigma_{sn}(v^0)) + {}\\ + Y(\boldsymbol{\sigma}_1^{(\nu)}(\boldsymbol{w}^0) + \boldsymbol{\sigma}_1^{(\nu)}(\boldsymbol{v}^0)) + (\boldsymbol{\nu}_2 H\varkappa + y\,\partial_s H)(\boldsymbol{\sigma}_{12}(\boldsymbol{w}^0) + \sigma_{sn}(v^0)),\\ \boldsymbol{G}_2^1 = -\boldsymbol{\nu}_1\Sigma_{21} - \boldsymbol{\nu}_2\Sigma_{22} - H(\boldsymbol{\nu}_1\,\partial_n\sigma_{ns}(v^0) + \boldsymbol{\nu}_2\partial_n\sigma_{ss}(v^0)) + {}\\ + Y(\boldsymbol{\sigma}_1^{(\nu)}(\boldsymbol{w}^0) + \boldsymbol{\sigma}_2^{(\nu)}(\boldsymbol{v}^0)) + (\boldsymbol{\nu}_2 H\varkappa + y\,\partial_s H)(\boldsymbol{\sigma}_{22}(\boldsymbol{w}^0) + \sigma_{ss}(v^0)). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Слагаемые с множителем H возникли из аналогичной (3.6) формулы Тейлора для напряжений $\sigma(v^0;n,s)$, а последние пары слагаемых в правых частях равенств (3.7) происходят от вторых членов разложений (2.10) компонент нормали ν. Все напряжения, порожденные полем смещений v^0, вычисляются на контуре, т. е. краевые условия (2.4) оставляют ненулевым только продольное напряжение $\sigma_{ss}(v^0;0,s)$. Множители при Y равны нулю в силу условий на торце $\pi(s)$ в задаче (2.11) для $\boldsymbol{w}^0$. Производные $\partial_n\sigma_{nn}(v^0;0,s)$ и $\partial_n\sigma_{ns}(v^0;0,s)$ могут быть найдены из уравнений равновесия (2.9). Наконец, формула Стокса

$$\int\limits_{\Pi(s)} \eta_1\,\frac{\partial}{\partial\eta_2}\,\boldsymbol{\sigma}_{j2}(\boldsymbol{w}^0;s,\eta)\,d\eta = -\int\limits_{\pi(s)} \eta_1\boldsymbol{\nu}_2(s,\eta_2)\boldsymbol{\sigma}_{j2}(\boldsymbol{w}^0;s,\eta)\,ds_\eta$$

показывает, что еще ряд членов в (3.4) и (3.7), содержащие произведения подынтегральных выражений и кривизны $\varkappa$, не дают вклада в условия (3.3).

Для нахождения интегралов от остальных слагаемых в (3.4) и (3.7) используется несколько формул:

1) соотношения

$$\begin{gathered} \int\limits_{\pi(s)} \boldsymbol{\nu}_j(s,\eta_2)\,ds_\eta = \delta_{j,1}, \qquad \int\limits_{\pi(s)} \eta_1\boldsymbol{\nu}_j(s,\eta_2)\,ds_\eta = \overline{H}(s)\delta_{j,1},\\ \int\limits_{\pi(s)} y(s,\eta)\,\frac{\partial H}{\partial s}(s,\eta_2)\,ds_\eta = \int\limits_0^1 \frac{\partial H}{\partial s}(s,\eta_2)\,d\eta_2 = \frac{d\overline{H}}{ds}(s), \qquad \overline{H}(s) = \int\limits_0^1 H(s,\eta_2)\,d\eta_2, \end{gathered} \tag{3.8}$$

где $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера;

2) равенства

$$\begin{gathered} \int\limits_{\pi(s)} \boldsymbol{\nu}_2(s,\eta)\boldsymbol{W}_2(s,\eta)\,ds_\eta = \sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\pi(s)} \boldsymbol{\sigma}_j^{(\nu)}(\boldsymbol{W};s,\eta)\boldsymbol{W}_j(s,\eta)\,ds_\eta = 2m(s),\\ \sum_{j,k=1}^{2} \boldsymbol{A}_{jk}^{1i}(0,s)\int\limits_{\pi(s)} \boldsymbol{\nu}_k(s,\eta_2)\boldsymbol{W}_j(s,\eta_2)\,ds_\eta = 0 \qquad (i=1,2); \end{gathered} \tag{3.9}$$

3) равенство

$$\varepsilon_{ss}(v^0; 0, s) = b(0, s)\sigma_{ss}(v^0; 0, s), \tag{3.10}$$

справедливое в силу краевых условий (2.4) и содержащее элемент $b(0, s) = \boldsymbol{B}^{22}_{22}(0, s)$ тензора податливости $\boldsymbol{B}(0, s)$, обратного тензору жесткости $\boldsymbol{A}(0, s)$. В случае однородного изотропного материала $b(0, s) = (2\mu)^{-1}(1 - \nu)$. Здесь μ — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона. Для проверки двух последних равенств в (3.9) применим формулу Грина с полями $\boldsymbol{W}(s, \eta)$ и $\boldsymbol{\zeta}^1(\eta) = (\eta_1, 0)$ или $\boldsymbol{\zeta}^2(\eta) = (0, \eta_1)$:

$$0 = \sum_{j,k=1}^{2} \int\limits_{\Pi(s)} \zeta^i_j(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta_k} \boldsymbol{\sigma}_{jk}(\boldsymbol{W}; s, \eta)\, d\eta =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{2} \int\limits_{\pi(s)} \big(\boldsymbol{W}(s, \eta)\boldsymbol{\sigma}^{(\nu)}(\boldsymbol{\zeta}^i; \eta) - \boldsymbol{\zeta}^i_k(\eta)\boldsymbol{\sigma}^{(\nu)}_k(\boldsymbol{W}; s, \eta)\big)\, ds_\eta.$$

Выражение в правой части этой формулы совпадает с выражением (3.9) при $i = 1, 2$ в силу соотношений (3.8) и (2.12), (2.13), а также равенств (2.7) для векторных полиномов $\boldsymbol{\zeta}^i(\eta)$.

В итоге получаем формулы

$$\int\limits_{\Pi(s)} \frac{\partial}{\partial s} \boldsymbol{\sigma}_{p2}(\boldsymbol{W}; s, \eta)\, d\eta - \int\limits_{\pi(s)} y(s, \eta) \frac{\partial H}{\partial s}(s, \eta)\, \boldsymbol{\sigma}_{p2}(\boldsymbol{W}; s, \eta)\, ds_\eta = \frac{\partial}{\partial s} \int\limits_{\Pi(s)} \boldsymbol{\sigma}_{p2}(\boldsymbol{W}; s, \eta)\, d\eta,$$

$$\int\limits_{\Pi(s)} \boldsymbol{\sigma}_{1i}(\boldsymbol{W}; s, \eta)\, d\eta = \sum_{j,k=1}^{2} \boldsymbol{A}^{1i}_{jk}(0, s) \int\limits_{\Pi(s)} \boldsymbol{\varepsilon}_{jk}(\boldsymbol{W}; s, \eta)\, d\eta =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{2} \boldsymbol{A}^{1i}_{jk}(0, s) \int\limits_{\pi(s)} \boldsymbol{\nu}_k(s, \eta_2)\boldsymbol{W}_j(s, \eta)\, ds_\eta = 0, \tag{3.11}$$

$$\int\limits_{\Pi(s)} \boldsymbol{\sigma}_{22}(\boldsymbol{W}; s, \eta)\, d\eta = b(0, s)^{-1} \int\limits_{\Pi(s)} \boldsymbol{\varepsilon}_{22}(\boldsymbol{W}; s, \eta)\, d\eta - \sum_{i=1}^{2} \beta_i(s) \int\limits_{\Pi(s)} \boldsymbol{\sigma}_{1i}(\boldsymbol{W}; s, \eta)\, d\eta =$$

$$= b(0, s)^{-1} \int\limits_{\pi(s)} \boldsymbol{\nu}_2(s, \eta)\boldsymbol{W}_2(s, \eta)\, ds_\eta = 2b(0, s)^{-1} m(s).$$

В последних выкладках напряжение $\boldsymbol{\sigma}_{22}$ выражено через деформацию $\boldsymbol{\varepsilon}_{22}$ и напряжения $\boldsymbol{\sigma}_{11}$ и $\boldsymbol{\sigma}_{12}$ с некоторыми коэффициентами β_1 и β_2 (ср. с формулой (3.10)), а также равенства (3.9). В соотношении (3.11) использована формула дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом; при этом $y(s, \eta)\, ds_\eta = d\eta_2$ согласно определению (2.10) множителя $y(s, \eta)$.

Громоздкие, но несложные вычисления, основанные на полученных формулах, приводят к следующим выражениям для правых частей краевых условий (3.2):

$$\begin{gathered} g^1_n(s) = -\varkappa(s)\alpha(s)\varepsilon_{ss}(v^0; 0, s) + \lambda_0 \overline{H}(s)\rho(0, s)v^0_n(0, s), \\ g^1_s(s) = \partial_s(\alpha(s)\varepsilon_{ss}(v^0; 0, s)) + \lambda_0 \overline{H}(s)\rho(0, s)v^0_s(0, s); \end{gathered} \tag{3.12}$$

$$\alpha(s) = b(0, s)^{-1}\overline{H}(s) - 2b(0, s)^{-2} m(s). \tag{3.13}$$

4. Замечания об оправданности асимптотики. Пусть $\lambda_0 = \lambda^{(n)}$ — элемент последовательности собственных чисел предельной задачи (2.3), (2.4)

$$0 = \lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)} < \lambda^{(4)} \leqslant \lambda^{(5)} \leqslant \ldots \leqslant \lambda^{(n)} \leqslant \ldots \to +\infty. \tag{4.1}$$

Нулевому собственному числу соответствуют жесткие смещения. Предположим, что кратность собственного числа $\lambda^{(n)} = \varkappa \geqslant 1$, т. е.

$$\lambda^{(n-1)} < \lambda^{(n)} = \ldots = \lambda^{(n+\varkappa-1)} < \lambda^{(n+\varkappa)},$$

и обозначим через $v^{(n)}, \ldots, v^{(n+\varkappa-1)}$ соответствующие собственные вектор-функции, подчиненные условиям ортогональности и нормировки:

$$\sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \rho(x) v_j^{(p)}(x) v_j^{(q)}(x)\, dx = \delta_{p,q}. \tag{4.2}$$

В качестве начальных членов анзацев (2.1) и (2.2) возьмем следующие:

$$\lambda_0 = \lambda^{(n)}, \qquad v^0 = a_1 v^{(n)} + \ldots + a_\varkappa V^{(n+\varkappa-1)}.$$

Число λ_1 и столбец $a = (a_1, \ldots, a_\varkappa)$ найдем из условий разрешимости задачи (3.1), (3.2) для поля v^1, которые в силу соотношений (3.12), (2.8) и (4.2) принимают вид

$$a_p \lambda_1 = -\sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\Gamma} g_j^1(s) v^{(n+p)}(0,s)\, ds = \sum_{p=0}^{\varkappa-1} M_{pq}^{(n)} a_q,$$

$$M_{pq}^{(n)} = \int\limits_{\Gamma} \Big(\alpha(s) \varepsilon_{ss}(v^{(n+p)}; 0, s) \varepsilon_{ss}(v^{(n+q)}; 0, s) - \\ - \lambda^{(n)} \rho(0,s) \overline{H}(s) \sum_{j=1}^{2} v_j^{(n+p)}(0,s) v_j^{(n+q)}(0,s) \Big)\, ds_x. \tag{4.3}$$

Ясно, что матрица $M^{(n)}$ с элементами (4.3) симметричная, т. е. имеет вещественные числа $\lambda_1^{n0}, \ldots, \lambda_1^{(n\varkappa-1)}$ и собственные ортонормированные столбцы $a^{n0}, \ldots, a^{(n\varkappa-1)}$, которые конкретизируют члены λ_0, λ_1 и v^0, w^0 анзацев (2.1) и (2.2); при этом из задач (3.1), (3.2) и (2.11), где $i = 1$, можно найти очередные асимптотические члены $v^1(x)$ и $w^1(s,\eta)$ (заметим, что они определяются с точностью до слагаемых $\tilde{v}(x) = \tilde{a}_0 v^{(n)}(x) + \ldots + \tilde{a}_\varkappa v^{(n+\varkappa-1)}(x)$ и $-\boldsymbol{W}(s,\eta)\sigma_{ss}(\tilde{v}; 0, s)$).

Несмотря на осцилляцию границы (1.1) области Ω_h, справедливо неравенство Корна [6, гл. 3]

$$\|u; H^1(\Omega_h)\|^2 \leqslant c \sum_{j,k=1}^{2} \|\varepsilon_{jk}(u); L_2(\Omega_h)\|^2 \tag{4.4}$$

с постоянной c, не зависящей от параметра $h \in (0, h_0]$, $h_0 > 0$ и вектор-функции u, принадлежащей пространству Соболева $H^1(\Omega_h)$ и подчиненной условиям ортогональности

$$\int\limits_{\omega} u_1(x)\, dx = \int\limits_{\omega} u_2(x)\, dx = \int\limits_{\omega} (x_2 u_1(x) - x_1 u_2(x))\, dx = 0,$$

где ω — непустая подобласть в Ω, например, $\omega = \Omega \setminus \overline{O_\Gamma}$. Неравенство (4.4) позволяет частично обосновать построенную асимптотику с помощью стандартного подхода (см.,

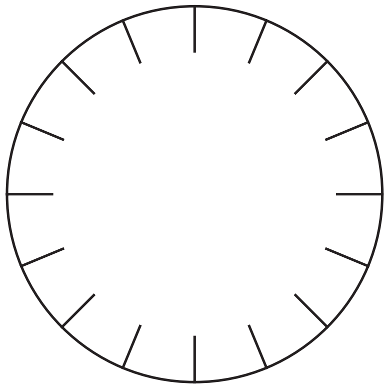

Рис. 2. Тело с периодическим семейством краевых трещин

например, [7]), а именно: с помощью леммы "о почти собственных значениях и векторах" [8] нетрудно убедиться в том, что аналогичная (4.1) последовательность собственных чисел задачи (1.2), (1.3)

$$0 = \Lambda^{(1)} = \Lambda^{(2)} = \Lambda^{(3)} < \Lambda^{(4)} \leqslant \Lambda^{(5)} \ldots \leqslant \Lambda^{(n)} \leqslant \ldots \to +\infty \tag{4.5}$$

содержит по крайней мере $\varkappa$ элементов $\Lambda^{(p)}, \ldots, \Lambda^{(p+\varkappa-1)}$, для которых верны оценки

$$|\Lambda^{(p)} - \lambda^{(n)} - h\lambda_1^{(nq)}| \leqslant c_{nq} h^{3/2} \qquad (q = 0, \ldots, \varkappa - 1). \tag{4.6}$$

Более сложны для проверки следующие выводы: упомянутых элементов имеется не более $\varkappa$ и справедливо равенство $p = n$. Обычно эти выводы проверяются на основании теоремы о "сходимости", согласно которой $\Lambda_q(h) \to \lambda_q$ при $h \to +0$ (см. [9, 7] и др.). В [6] (см. также [9–12]) предложены процедуры прямого и обратного сведений, с помощью которых, во-первых, устанавливаются два указанных выше факта и, во-вторых, выявляется зависимость множителей c_{nq} в соотношениях (4.6) от характеристик предельного спектра: собственного числа $\lambda^{(n)}$, его кратности $\varkappa = \varkappa^{(n)}$ и относительного расстояния $d_n = \min\{1 - \lambda^{(n-1)}/\lambda^{(n)}, 1 - \lambda^{(n)}/\lambda^{(n+\varkappa)}\}$ до соседних точек спектра. Даже формулировка последнего результата весьма громоздка, поэтому ограничимся констатацией типового и проверяемого по известной схеме заключения: в неравенствах (4.6) содержатся собственные числа $\Lambda^{(n)}, \ldots, \Lambda^{(n+\varkappa-1)}$, а остальные члены последовательности (4.5) этим неравенствам не удовлетворяют.

Полученные результаты остаются в силе и при более общих видах возмущения границы. Примером может служить периодическое семейство краевых трещин (рис. 2). В этом случае $\overline{H}(s) = 0$ и $m(s) > 0$, а значит, коэффициент (3.13) отрицателен.

5. Моделирование с помощью условий Вентцеля. В работах [13, 14], посвященных изучению пограничного слоя в теории тонких упругих пластин, и в работе [1] для скалярных спектральных сингулярно возмущенных краевых задач предложен способ объединения предельных задач вида (2.3), (2.4) и (3.1), (3.2) в общую, так называемую результирующую краевую задачу, решение которой является приближением повышенной точности к решению исходной задачи (1.2), (1.3). В рассматриваемом случае такая задача имеет вид

$$\begin{gathered}
-\partial_{x_1}\sigma_{1k}(u^w; h, x) - \partial_{x_2}\sigma_{2k}(u^w; h, x) = \Lambda^w(h)\rho(x)u_k^w(h, x), \qquad x \in \Omega, \\
\sigma_{nn}(u^w; h, 0, s) + h\varkappa(s)\varepsilon_{ss}(u^w; h, 0, s) = \Lambda^w(h)\rho(0, s)\overline{H}(s)u_n^w(h, 0, s), \\
\sigma_{ns}(u^w; h, 0, s) - h\,\partial_s(\alpha(s)\varepsilon_{ss}(u^w; h, 0, s)) = \Lambda^w(h)\rho(0, s)\overline{H}(s)u_s^w(h, 0, s), \qquad s \in \Gamma.
\end{gathered} \tag{5.1}$$

Поскольку последнее из краевых условий содержит дифференциальный оператор $-h\alpha(s)\,\partial_s^2$ второго порядка, краевые условия следует интерпретировать как упругий аналог скалярного условия Вентцеля (см. работу [15] и библиографию к ней). В работах [16–18] и др. сходные краевые условия названы “пристеночными” (wall-law).

Вариационная формулировка [19, 20] задачи (5.1) следующая: найти число $\Lambda^w = \Lambda^w(h)$ и нетривиальную вектор-функцию u^w, которая принадлежит пространству $H^1(\Omega)$, имеет след на границе Γ из пространства Соболева $H^1(\Gamma)$ и при любой пробной функции v^w с аналогичными свойствами удовлетворяет интегральному тождеству

$$2E(u^w, v^w; \Omega) + 2S(u^w, v^w; \Gamma) = \Lambda^w \sum_{j=1}^{2} \Big(\int\limits_{\Omega} \rho u_j^w v_j^w \, dx + \int\limits_{\Gamma} \overline{H} \rho u_j^w v_j^w \, ds_x \Big). \tag{5.2}$$

Здесь E, S — упругая и поверхностная энергии:

$$E(u^w, v^w; \Omega) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{2} \int\limits_{\Omega} \sigma_{jk}(u^w) \varepsilon_{jk}(u^w) \, dx, \qquad S(u^w, v^w; \Gamma) = \frac{h}{2} \int\limits_{\Gamma} \alpha \varepsilon_{ss}(u^w) \varepsilon_{ss}(v^w) \, ds_x.$$

Если выполнены условия

$$\alpha(s) > 0, \qquad \overline{H}(s) \geqslant 0 \tag{5.3}$$

(см. формулы (3.13) и (3.8)), то левая часть тождества (5.2) определяет скалярное произведение в описанном выше энергетическом классе, а множитель при Λ^w в правой части — положительный компактный оператор. Следовательно, задача (5.2) или, что то же, задача (5.1) обладает последовательностью собственных чисел $\Lambda^w(n)$ вида (4.5).

Если на участке контура Γ положительной длины справедливо неравенство $\overline{H}(s) < 0$, то среди собственных чисел $\{\Lambda^w(n)\}$ окажется бесконечный набор отрицательных чисел. В случае отрицательной функции α (см. комментарии к рис. 2 в конце п. **4**) лишь несколько собственных чисел неотрицательны, а остальные образуют бесконечно большую отрицательную последовательность. Наконец, при вырождении функции α в точке или на участке контура Γ спектр задачи (5.1) становится непрерывным. В перечисленных ситуациях задача (5.1) не может служить моделью задачи (1.2), (1.3), т. е. неравенства (5.3) являются условиями, необходимыми при моделировании.

Второе ограничение (5.3) чисто геометрическое, в то время как согласно представлению (3.13) в первом присутствуют как геометрическая, так и энергетическая характеристики быстроосциллирующей границы Γ_h. Более того, лишь в заведомо неприемлемом случае $\overline{H}(s) < 0$ величина $\alpha(s)$ гарантированно имеет знак “минус”, что также неприемлемо. Если $\overline{H}(s) \geqslant 0$, то величина $\alpha(s)$ может оказаться как положительной, так и отрицательной. Поскольку замена

$$H(s, \eta_2) \mapsto H(s, \eta_2) + H_0 \tag{5.4}$$

не влияет на энергетическую характеристику (2.14), можно сделать вывод, что при достаточно большой положительной постоянной H_0 в формуле (5.4) оба условия (5.3) выполнены для нового контура $\{x \in O_\Gamma\colon n = hH(s, h^{-1}s) + hH_0\}$.

Процедура построения асимптотики решений задачи (5.1) весьма проста: из соответствующих анзацев

$$\Lambda^w(h) = \lambda_0 + h\lambda_1 + \ldots, \qquad u^w(h, x) = v^0(x) + hv^1(x) + \ldots \tag{5.5}$$

исчезает пограничный слой, а их члены удовлетворяют задачам (2.3), (2.4) и (3.1), (3.2). Обоснование асимптотических разложений (5.5) в целом следует схеме, описанной в п. **4** (см. также [1]). Сходство формул (2.1), (2.2) и (5.5) показывает, что при ограничениях (5.3) задача (5.1) с краевыми условиями Вентцеля представляет собой модель задачи (1.2), (1.3) в области Ω_h с быстроосциллирующей границей. Из соотношений (4.6) для собственных чисел $\Lambda^{(n)}(h)$ и $\Lambda^{w(n)}(h)$ следуют неравенства

$$|\Lambda^{(n)}(h) - \Lambda^{w(n)}(h)| \leqslant C_n^w h^{3/2}. \tag{5.6}$$

Сравнение собственных вектор-функций $u^{(n)}$ и $u^w(n)$ можно провести в L_2-метрике, так как энергетическая норма слагаемого $h\chi w^1$ из анзаца (2.2) равна $O(h^{1/2})$, т. е. пограничный слой превалирует над поправкой hv^1 регулярного типа.

6. Гладкое изображение быстроосциллирующей границы. В работе [1] предложен подход, отличающийся от описанного в п. **5**. Этот подход основан на следующем наблюдении: если в определении (1.1) вместо $H(s, h^{-1}s)$ взять величину $H^s(s)$, не зависящую от быстрой переменной, то все полученные выше результаты останутся в силе, так как постоянная функция — частный случай периодической. Вместе с тем в соотношениях (2.13), (2.14) и (3.13), (3.12) $\boldsymbol{W} = 0$, $m = 0$ и $\overline{H^s}(s) = H^s(s)$, $\alpha^s(s) = b(0,s)^{-1}H^s(s)$.

Положим

$$H^s(s) = \overline{H}(s) - 2b(0,s)^{-1}m(s), \tag{6.1}$$

введем регулярно возмущенную область Ω_h^s, ограниченную контуром $\Gamma_h^s = \{x \in O_\Gamma\colon n = hH^s(s)\}$, и рассмотрим в ней спектральную задачу

$$-\partial_{x_1}\sigma_{1k}(u^s; h, x) - \partial_{x_1}\sigma_{2k}(u^s; h, x) = \Lambda^s(h)\rho(x)u_k^s(h, x), \qquad x \in \Omega_h^s; \tag{6.2}$$

$$\sigma_k^{(n^s)}(u^s; h, x) = \Lambda^s(h)h(\overline{H}(s) - H^s(s))\rho(0,s)u_k^s(h, x), \qquad x \in \Gamma_h^s, \tag{6.3}$$

где n^s — единичный вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega_h^s = \Gamma_h^s$. Для решений задачи (6.2) сохраняются асимптотические анзацы (5.5), в которых верхний индекс w заменен индексом s. В силу того что в правую часть краевого условия (6.3) входит выражение с малым множителем h, и согласно формуле (6.1) члены указанных анзацев удовлетворяют тем же задачам (2.3), (2.4) и (3.1), (3.2), что и члены анзацев (2.1), (2.2). Таким образом, задача (6.2), (6.3) служит моделью повышенной точности для задачи (1.2), (1.3) в области с быстроосциллирующей границей. Поскольку область Ω_h^s возмущена регулярно, обоснование асимптотики обеспечено общими результатами функционального анализа (см., например, [21]).

Приведем вариационную формулировку задачи (6.2), (6.3). Требуется найти число Λ^s и нетривиальную вектор-функцию $u^s \in H^1(\Omega_h^s)$, для которых при любой пробной функции $v^s \in H^1(\Omega_h^s)$ выполнено интегральное тождество

$$2E(u^s, v^s; \Omega_h^s) = \Lambda^s \sum_{j=1}^{2} \Big(\int\limits_{\Omega_h^s} \rho u_j^s v_j^s \, dx + \int\limits_{\Gamma_h^s} h(\overline{H} - H^s)\rho u_j^s v_j^s \, ds_x \Big). \tag{6.4}$$

Поскольку $H^s \geqslant \overline{H}$ в силу соотношений (6.1) и (2.14), множитель при Λ^s в тождестве (6.4) определяет положительный компактный оператор в пространстве $H^1(\Omega_h^s)$, а значит, вариационная задача (6.4) и краевая задача (6.2), (6.3) обладают последовательностью собственных чисел $\Lambda^s(n)$ вида (4.5). Более того, применяя неравенства (4.6) к двум задачам (в области Ω_h и в области Ω_h^s), можно показать, что их собственные числа связаны соотношением (5.6), где индекс w заменен индексом s.

С точки зрения вычислений решение задачи (6.2), (6.3) значительно проще решения задач (1.2), (1.3) и (5.1) с быстроосциллирующей границей и малым параметром при старших производных соответственно. Поэтому принцип гладкого изображения сингулярно возмущенной границы, предложенный в [1], более удобен для моделирования, чем пристеночные краевые условия Вентцеля. Однако удалить спектральный параметр из краевого условия (6.3) не удается: величина $b(0,s)(\overline{H}(s) - H^s(s))/2 \geqslant 0$ — энергетическая характеристика (2.14) осцилляции контура (1.1), исчезающая только в случае регулярного возмущения тела, т. е. при отсутствии осцилляции его поверхности. Это наблюдение еще раз подтверждает, что построение модели мелкозернистой границы на основе лишь геометрических измерений невозможно.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Назаров С. А.** Двучленная асимптотика решений спектральных задач с сингулярными возмущениями // Мат. сб. 1990. Т. 181, № 3. С. 291–320.
2. **Санчес-Паленсия Э.** Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
3. **Mazja W. G., Nazarov S. A., Plamenewski B. A.** Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. Berlin: Akademie-Verlag, 1991. Bd 2.
4. **Назаров С. А.** Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей / С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский. М.: Наука, 1991.
5. **Назаров С. А.** Упругие емкость и поляризация дефекта в упругом слое // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1990. № 5. С. 57–65.
6. **Назаров С. А.** Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Науч. кн., 2001.
7. **Олейник О. А.** Математические задачи теории сильно неоднородных сред / О. А. Олейник, Г. А. Иосифиан, А. С. Шамаев. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.
8. **Вишик М. И., Люстерник Л. А.** Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 5. С. 3–122.
9. **Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia E.** Vibration and coupling of continuous systems. Asymptotic methods. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1989.
10. **Nazarov S. A.** Estimating the convergence rate for eigenfrequencies of anisotropic plates with variable thickness // C. R. Mecanique. 2002. V. 330. P. 603–607.
11. **Назаров С. А.** Равномерные оценки остатков в асимптотических разложениях решений задачи о собственных колебаниях пьезоэлектрической пластины // Проблемы математического анализа. Новосибирск: Науч. кн., 2003. Вып. 25. С. 99–188.
12. **Lobo M., Nazarov S. A., Perez E.** Eigen-oscillations of contrasting non-homogeneous bodies: asymptotic and uniform estimates for eigenvalues // IMA J. Appl. Math. 2005. V. 70. P. 419–458.
13. **Зорин И. С., Назаров С. А.** Краевой эффект при изгибе тонкой трехмерной пластины // Прикл. математика и механика. 1989. Т. 53, № 4. С. 642–650.
14. **Назаров С. А.** Пограничные слои и условия шарнирного опирания для тонких пластин // Зап. науч. семинаров Петерб. отд-ния Мат. ин-та РАН. 1999. Т. 257. С. 228–287.
15. **Лукьянов В. В., Назаров А. И.** Решение задачи Вентцеля для уравнений Лапласа и Гельмгольца с помощью итерированных потенциалов // Зап. науч. семинаров Петерб. отд-ния Мат. ин-та РАН. 1998. Т. 250. С. 203–218.
16. **Achdou Y., Pironneau O.** Domain decomposition and wall-laws // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1995. V. 320. P. 541–547.
17. **Mohammadi B., Pironneau O., Vallentin F.** Rough boundaries and wall-laws // Intern. J. Numer. Methods Fluids. 1998. V. 27. P. 169–177.

18. **Jäger W., Micelič A., Neuss N.** Asymptotic analysis of the laminar viscous flow over a porous bed // SIAM J. Sci. Comput. 2001. V. 22, N 6. P. 2006–2028.
19. **Ладыженская О. А.** Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
20. **Фикера Г.** Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
21. **Като Т.** Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.

Поступила в редакцию 20/XII 2006 г.