

5. Balsa T. F., Goldstein M. On the instabilities of supersonic mixing layers: a high Mach number asymptotic theory // J. Fluid Mech.— 1990.— V. 216.— P. 585.
6. Smith F. T., Brown S. N. The inviscid instability of a Blasius boundary layer at large values of the Mach number // J. Fluid Mech.— 1990.— V. 219.— P. 499.
7. Goldstein M. E., Wundrow D. W. Spatial evolution of nonlinear acoustic mode instabilities on hypersonic boundary layers // Ibid.— P. 585.
8. Петров Г. В. Влияние диссоциации на устойчивость пограничного слоя // Развитие возмущений в пограничном слое.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1979.
9. Петров Г. В. Устойчивость пограничного слоя каталитически рекомбинирующего газа // ПМТФ.— 1978.— № 1.
10. Malik M. B. Stability for chemically reacting flows // Laminar-Turbulent Transition: III IUTAM Symp., Toulouse, France, 1989.— Berlin etc.: Springer-Verlag, 1990.
11. Heyes W. D., Probst R. F. Hypersonic flow theory.— N. Y.: Acad. Press, 1959.
12. Нейланд В. Я. Распространение возмущений вверх по течению при взаимодействии гиперзвукового потока с пограничным слоем // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1970.— № 4.
13. Brown S. N., Stewartson K. A non-uniqueness of the hypersonic boundary layer // Quart. J. Mech. Appl. Math.— 1975.— V. 28, pt 1.
14. Mack L. M. Boundary-layer stability theory.— Pasadena, 1969.— (Techn. Rept./Jet Propulsion Lab.; 1990—277, pt II).
15. Гапонов С. А., Маслов А. А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках.— Новосибирск: Наука, 1980.
16. Жигулев В. Н., Тумин А. М. Возникновение турбулентности.— Новосибирск: Наука, 1987.
17. Grosh C. E., Orszag S. A. Numerical solution of problems in unbounded regions: coordinate transforms // J. Comp. Phys.— 1977.— N 25.

г. Жуковский

Поступила 9/VII 1991 г.

УДК 332.68

С. А. Чивилихин

## ДВУМЕРНОЕ СТОКСОВСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ

Рассмотрено плоское течение вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости, заполняющей цилиндрическую односвязную область со свободной гладкой границей произвольной формы, под действием сил поверхностного натяжения. Задача решается в рамках квазистационарного приближения Стокса [1], которое впервые предложено в [2] и использовано для описания процесса спекания пористых тел [3], течения тонких пленок [4, 5] и задач геофизики [6]. Релаксация малых возмущений кругового цилиндра изучена в [7]. Аналогия между уравнениями теории упругости и уравнениями гидродинамики в приближении Стокса [8] использована в [9]. Применительно к плоскому течению под действием капиллярных сил указанный подход развит в [10—12].

В настоящей работе развивается подход [13], близкий к [14, 15]. Получено выражение для давления в виде разложения по полной системе ортонормированных гармонических функций. Рассчитано поле скоростей на границе области. Выявлено качественное различие в поведении возмущений типа «ямы» в зависимости от соотношения между ее глубиной и шириной.

1. Рассмотрим в рамках квазистационарного приближения Стокса [1] плоское течение вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной области  $g$  со свободной границей  $\gamma$  под действием сил поверхностного натяжения. В этом случае уравнения движения, неразрывности и граничные условия имеют вид

$$(1.1) \quad \partial_\beta P_{\alpha\beta} = 0;$$

$$(1.2) \quad \partial_\beta v_\beta = 0 \quad (\mathbf{x} \in g);$$

$$(1.3) \quad P_{\alpha\beta} n_\beta = -\sigma n_\alpha \partial_\beta n_\beta \quad (\mathbf{x} \in \gamma);$$

где  $P_{\alpha\beta}n_\beta = -p\delta_{\alpha\beta} + \mu(\partial_\alpha v_\beta + \partial_\beta v_\alpha)$  — ньютоновский тензор напряжений;  $v_\alpha, p$  — скорость и давление жидкости;  $\mu, \sigma$  — коэффициенты динамической вязкости и поверхностного натяжения, предполагаемые постоянными;  $n_\alpha$  — вектор внешней нормали к границе. По дважды повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Закон эволюции границы определяется равенством нормальной скорости движения границы  $V$  и нормальной компоненты скорости жидкости на границе:

$$V = v_\beta n_\beta, \mathbf{x} \in \gamma.$$

Представляя тензор напряжений в виде

$$(1.4) \quad P_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}\partial_\gamma^2\varphi + \partial_{\alpha\beta}^2\varphi$$

(в теории упругости  $\varphi$  называется функцией Эри), тождественно удовлетворяем уравнению движения (1.1). Граничное условие (1.3) запишем как

$$(1.5) \quad D_{\alpha\beta}(\partial_\beta\varphi - \sigma n_\beta) = 0, \mathbf{x} \in \gamma$$

( $D_{\alpha\beta} = n_\alpha\partial_\beta - n_\beta\partial_\alpha$  — тензорный оператор дифференцирования в направлении, касательном к границе, дуальный оператору  $\mathbf{n} \times \nabla$ ). Интегрируя (1.5), получаем

$$(1.6) \quad \partial_\alpha\varphi = \sigma n_\alpha, \mathbf{x} \in \gamma.$$

Аддитивная постоянная, которая, вообще говоря, должна быть добавлена в правую часть (1.6), удаляется с помощью замены  $\varphi \rightarrow \varphi + C_\beta x_\beta$ , не меняющей вида (1.4).

Из (1.4) следует

$$(1.7) \quad \partial_{\beta\beta}^2\varphi = 2p.$$

Согласно (1.1), (1.2),  $p$  является гармонической, а следовательно,  $\varphi$  — бигармонической функцией.

2. Введем произвольную гармоническую в  $g$  функцию  $\Xi$ . Умножая (1.6) на  $n_\alpha\Xi$  сначала скалярно, а затем векторно и интегрируя по границе  $\gamma$ , с использованием (1.7) находим

$$(2.1) \quad \langle p\Xi \rangle_g = \frac{\sigma l}{2S} \langle \Xi \rangle_\gamma;$$

$$(2.2) \quad \langle \nabla\varphi \times \nabla\Xi \rangle_g = 0,$$

где  $\langle f \rangle_g = S^{-1} \int f dS$ ,  $\langle f \rangle_\gamma = l^{-1} \int f dl$  — средние значения по области и ее границе;  $S, l$  — площадь и периметр области. При  $\Xi = 1$  (2.1) дает  $\langle p \rangle_g = \sigma l / (2S)$ . Последний результат может быть получен из [8].

Полагая в (2.1)  $\Xi = x_1^2 - x_2^2$ , имеем

$$(2.3) \quad \langle x_1\partial_2\varphi - x_2\partial_1\varphi \rangle_g = 0.$$

Кроме того, из (1.6) вытекает

$$(2.4) \quad \langle \nabla\varphi \rangle_g = 0.$$

Вводя в  $g$  полную ортонормированную систему гармонических функций  $\{\Xi_k\}_k^\infty$  с условием ортогональности [16]  $\langle \Xi_k \Xi_n \rangle_g = \delta_{kn}$ , получаем на основании (2.1) выражение для давления в виде

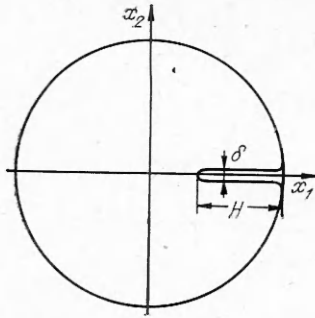
$$(2.5) \quad p = \langle p \rangle_g \sum_{k=0}^{\infty} \Xi_k \langle \Xi_k \rangle_\gamma.$$

Сходимость ряда обеспечивается полнотой системы функций [15].

Для построения ортонормированной системы функций применим процесс ортогонализации Грама — Шмита [17] к полной, но не ортогональной системе вещественных гармонических в  $g$  функций:

$$\{\chi_k\}_{k=0}^\infty = \{1, x_1, x_2; \dots; \operatorname{Re} z^k, \operatorname{Im} z^k; \dots\}, \quad z = x_1 + ix_2.$$





где

$$B_n = [(n+1)/2 + 1]^{-1} \langle \chi_{n+1} - \langle \chi_{n+1} \rangle_g - iz \operatorname{Im} \langle \chi_{n+1} \bar{z} \rangle_g / \langle \bar{z} z \rangle_g - i \langle \chi_n \rangle_g z.$$

Выделяя вещественную и мнимую части  $\Phi$  и используя (1.6), (2.8), получаем распределение скоростей на границе

$$v_\alpha = \frac{1}{2\mu} (\sigma n_\alpha - \Phi_\alpha), \quad \mathbf{x} \in \gamma.$$

Нормальная скорость границы определяет закон ее эволюции

$$(2.15) \quad V = \frac{1}{2\mu} (\sigma - n_\beta \Phi_\beta), \quad \mathbf{x} \in \gamma.$$

3. Задавая малое возмущение границы кругового цилиндра как  $r = R + h(\varphi, t)$ , из (2.14), (2.15) получаем

$$(3.1) \quad \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\sigma}{2\mu R} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| \exp(ik\varphi) h_k, \quad h_k = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \exp(-ik\varphi),$$

что совпадает с [7]. Согласно (3.1), малое возмущение границы с характерной шириной  $\delta \ll R$  и амплитудой  $H \ll \delta$  затухает за характерное время  $\tau \sim \mu\delta/\sigma$ .

Рассмотрим теперь возмущение большой амплитуды, имеющее форму «ямы» (см. рисунок). В силу симметрии области давление должно быть функцией, четной относительно  $x_2$ :  $p(x_1, -x_2) = p(x_1, x_2)$ . Вводя пространство гармонических функций двух переменных, четных относительно второго аргумента, выберем в нем полную систему функций в виде  $\chi_n = r^n \cos(n\varphi)$  ( $r, \varphi$  — полярные координаты на плоскости  $(x_1, x_2)$ ). Используя малость ширины  $\delta$ , получаем  $\langle \chi_m \chi_n \rangle_g = R^{2n} \delta_{mn} / 2(n+1)$ . Тогда полную в рассматриваемом пространстве ортонормированную систему гармонических функций представим как

$$(3.2) \quad \Xi_n = \sqrt{2(n+1)} (r/R)^n \cos(n\varphi).$$

Подставляя (3.2) в (2.5) и суммируя ряд, имеем

$$(3.3) \quad p = \sigma \left[ \frac{1}{R} - \frac{H}{\pi R^2} - \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{R-z} - \frac{R-H}{R^2 - (R-H)z} \right) \right],$$

откуда, согласно (2.12), находим

$$(3.4) \quad \Phi = \sigma \left[ \left( 1 - \frac{H}{\pi R} \right) \frac{z}{R} + \frac{2}{\pi} \ln \frac{R^2 - (R-H)z}{(R-H)R} \right].$$

Несмотря на наличие логарифма, (3.4) задает в  $g$  однозначную аналитическую функцию, так как естественным разрезом служит рассматриваемое возмущение границы. Подставляя (3.4) в (2.16), видим, что нормальная скорость берегов разреза  $V = \sigma/(2\mu)$  (в нулевом приближении по малому параметру  $\delta/H$ ). За время  $\tau = \mu\delta/\sigma$  берега смыкаются. Хотя обычно капиллярные силы приводят к выравниванию возмущений границы, в данном случае те же силы порождают противоположное явление. Стремясь уменьшить длину разреза, капиллярные силы вызывают течение в области с масштабом  $H$ . Скорости в направлении осей  $x_1$  и  $x_2$  имеют масштабы  $\dot{H}$  и  $\dot{\delta}$  соответственно. Приравнявая работу сил поверхностного натяжения и скорость диссипации энергии за счет вязких сил, имеем  $\sigma \dot{H} \simeq -\mu(\dot{H}/H)^2 H^2$  или  $\dot{H} \simeq \dot{\delta} \simeq -\sigma/\mu$ , что согласуется с полученным выше строгим результатом.

В пределе  $\delta \rightarrow 0$  кривизна границы в точке  $x_1 = R - H$ ,  $x_2 = 0$  обращается в бесконечность. Однако, согласно (3.3), это не приводит к возникновению в этой точке сингулярности поля давления. Так же как и в случае схлопывания кругового капилляра [20], с ростом кривизны границы увеличиваются капиллярные и вязкие напряжения, компенсируя друг друга, давление же остается ограниченным.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хашпель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса.— М.: Мир, 1976.
2. Френкель Я. И. Вязкое течение в кристаллических телах // ЖЭТФ.— 1946.— Т. 16, № 1.
3. Scherer G. W. Sintering of low-density glasses // J. Amer. Ceram. Soc.— 1984.— V. 60, N 5.
4. Воинов О. В. Асимптотика свободной поверхности вязкой жидкости при ползущем движении и зависимость краевого угла смачивания от скорости // ДАН СССР.— 1978.— Т. 243, № 6.
5. Зацепин А. Г., Костяной А. Г., Шапиро Г. И. Медленное растекание вязкой жидкости по горизонтальной поверхности // ДАН СССР.— 1982.— Т. 265, № 1.
6. Прахт У. Неявный метод расчета ползущего течения в приложении к задаче о континентальном дрейфе // Численные методы в механике жидкостей.— М.: Мир, 1973.
7. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика.— М.: Физматгиз, 1959.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости.— М.: Наука, 1978.
9. Ионеску Д. Г. Теория аналитических функций и гидродинамика // Приложения теории функций в механике сплошной среды. Т. 2. Механика жидкости и газа.— М.: Наука, 1965.
10. Антановский Л. К. Динамика межфазной границы под действием капиллярных сил. Квазистационарное плоскопараллельное движение // ПМТФ.— 1988.— № 3.
11. Антановский Л. К. Комплексное представление решений уравнений Навье — Стокса // ДАН СССР.— 1981.— Т. 261, № 4.
12. Porrer R. W. Plane Stokes flow driven by capillarity on free surface // J. Fluid Mech.— 1990.— V. 213.— P. 349.
13. Чивилихин С. А. Динамика свободной многосвязной поверхности вязкой жидкости // ДАН СССР.— 1990.— Т. 315, № 3.
14. Гринберг Г. Ф. О решении плоской задачи теории упругости и задачи об изгибе тонкой плиты с закрепленным контуром // ДАН СССР.— 1951.— Т. 76, № 5.
15. Векуа И. Н. Об одном методе решения основной бигармонической краевой задачи и задачи Дирихле // Некоторые проблемы математики и механики.— Л.: Наука, 1970.
16. Chivilikhin S. A., Tarakanow S. W., Tselowalnikova L. M. et al. Viscous flow of silica glass in lightguides fabrication // The first international soviet fibre optics conference, March 25—29, 1991.— Boston: Information Gatekeepers, Inc., 1991.— V. 1.
17. Суетин П. К. Ортогональные многочлены по двум переменным.— М.: Наука, 1988.
18. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.— М.: Наука, 1984.
19. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Наука, 1966.
20. Гегузин Я. Е. О спекании аморфных тел // ДАН СССР.— 1953.— Т. 92, № 92.

г. Санкт-Петербург

Поступила 11/XII 1989 г.,

в окончательном варианте — 28/VIII 1991 г.

УДК 532.516+541.24

*С. В. Долгушев, М. И. Мучная*

### О РАСЧЕТЕ ВЯЗКОГО ТЕЧЕНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНОЙ СМЕСИ ГАЗОВ В ГИПЕРЗВУКОВОМ СОПЛЕ

Течение в двумерном сопле заданной геометрии моделируется с помощью упрощенных уравнений Навье — Стокса. В отличие от [1], где исследовалось течение однокомпонентного газа, рассматривается смесь  $N_2$ — $CO$ — $Ar$ — $He$ . Учитываются колебательно-поступательная релакса-