

ОБТЕКАНИЕ ПЛАСТИНКИ ПОТОКОМ НЕВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ¹

А. В. Кузнецов (Казань)

Получено решение задачи об установившемся движении плоской пластинки под поверхностью невесомой жидкости. Выведена формула для подъемной силы. Получены приближенные формулы для малых углов атаки и достаточно больших значений погружения. Метод решения иллюстрируется числовыми примерами.

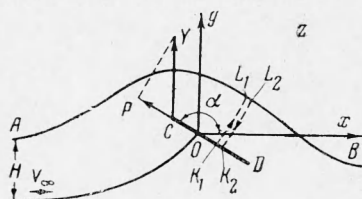
Рассмотрим плоскую задачу обтекания пластинки под поверхностью невесомой жидкости бесконечной глубины. Обозначим скорость жидкости на бесконечности и на свободной поверхности через V_∞ . Через l , α и H обозначим соответственно ширину пластинки, угол наклона ее к направлению набегающего потока на бесконечности и толщину слоя жидкости, расположенного над нулевой линией тока, на бесконечности перед пластинкой. За нулевую линию тока принимается линия тока, частью которой является контур обтекаемой пластинки (фиг. 1).

Решение задачи состоит в определении формы свободной поверхности жидкости, расчета распределения давления по пластинке и внутри жидкости и в определении гидродинамических сил, действующих на пластинку. На целесообразность решения поставленной задачи было указано М. И. Гуревичем [1].

1. Введем в рассмотрение комплексный потенциал течения и функцию

$$\chi = \ln \frac{1}{V_\infty} \frac{dw}{dz} \quad (w = \varphi + i\psi, z = x + iy)$$

Известно, что решение задачи можно свести к нахождению зависимости $\chi = \chi(w)$. Эту зависимость будем искать в параметрической форме следующим образом. В физической плоскости сделаем разрез, проходящий через некоторую точку K на пластинке и точку L на свободной поверхности жидкости. Разрезанную область отобразим на внутренность прямоугольника со сторонами $2\omega_1$, ω_2 на вспомогательной плоскости u таким



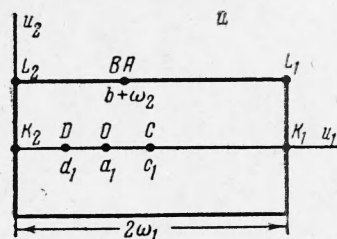
Фиг. 1

образом, чтобы берега разреза перешли в вертикальные стороны прямоугольника. Пусть при этом бесконечно удаленная точка в плоскости z переходит в точку $u = b_1 + i\omega_2$, точки D , O и C соответственно в точки $u = d_1$, $u = a_1$ и $u = c_1$. Соответственные точки в плоскостях z и u обозначим одинаковыми буквами (фиг. 2).

Определим функцию dw/du . Нетрудно обнаружить, что dw/du есть эллиптическая функция с периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$. Это следует из того, что dw/du — двоякопериодическая функция, голоморфная всюду внутри прямоугольника периодов, за исключением точки $u = b_1 + i\omega_2$, где она имеет полюс второго порядка. Согласно теории эллиптических функций, функция dw/du должна иметь два нуля в основном прямоугольнике периодов. Точка O в плоскости z будет критической точкой, в которой скорость потока обращается в нуль. Отсюда следует, что dw/du должна обращаться в нуль в точке $u = a_1$. Потребуем, чтобы задняя кромка D пластинки была точкой схода потока. Это означает, что dw/du должна иметь нуль в точке $u = d_1$. На основании общей теории эллиптических функций

$$\frac{dw}{du} = A [\wp(u - b_1 - i\omega_2) - \wp(a_1 - b_1 - i\omega_2)] \quad (1)$$

где A — некоторая вещественная постоянная. Легко видеть, что dw/du обращается в нуль при $u = d_1$, если d_1 удовлетворяет уравнению $d_1 + a_1 = 2b_1$. Так как разрез в физической плоскости проведен через произвольную точку на пластинке, то за эту



Фиг. 2

¹ Опубликование сообщения А. В. Кузнецова, поступившего в редакцию 4.I. 1963 г., по техническим причинам задержалось. За это время в журнале ПММ 1963, вып. 4, опубликованы заметки Г. П. Черепанова от 4.V.1963 и Л. А. Эпштейна 10.V.1963, в которых было также дано общее решение задачи, рассматриваемой А. В. Кузнецовым. Редакция помещает в несколько сокращенном виде работу А. В. Кузнецова, который помимо общего решения задачи (при этом несколько иным приемом) дал также и формулу для расчета подъемной силы пластинки и специально разобрал случай малых углов атаки. От редакции.

точку можно взять заднюю кромку D , т. е. можно положить $d_1 = 0$. Тогда

$$a_1 = 2b_1 \quad (2)$$

Принимая потенциал скорости в точке разветвления потока равным нулю и учитывая (2), получим

$$w = -A [\zeta(u - b_1 - \omega_2) - \zeta(b_1 - \omega_2)] - A\wp(b_1 - \omega_2)(u - 2b_1) \quad (3)$$

Циркуляция скорости по контуру, охватывающему пластинку, равна

$$\Gamma = w(2\omega_1) - w(0) = -2A [\eta_1' \wp(b_1 - \omega_2)\omega_1] \quad (\eta_1' = \zeta(\omega_1)) \quad (4)$$

Так как $\text{Im}[w(u_1 \mp \omega_2) - w(u_1)] = HV_\infty$, то, используя полученные формулы для w и Γ и известное соотношение $2\omega_2\eta_1' - 2\omega_1\eta_3' = \pi i$, где $\eta_3' = \zeta(\omega_2)$, получим

$$H = \frac{\pi A - i\omega_2\Gamma}{2\omega_1 V_\infty} \quad (5)$$

Перейдем к определению функции $\chi(u)$. На горизонтальных сторонах прямоугольника известно:

$$\begin{aligned} \text{Im } \chi(u) &= \pi - \alpha & (0 \leq u_1 < a_1, c_1 < u_1 \leq 2\omega_1) \\ \text{Im } \chi(u) &= -\alpha & (a_1 < u_1 < c_1) \quad \text{при } u = u_1 \\ \text{Re } \chi(u) &= 0 & \text{при } u = u_1 \mp \omega_2 \end{aligned}$$

Так как функция $\chi(u)$ удовлетворяет соотношению однозначности, т. е. $\chi(u \mp 2\omega_1) = \chi(u)$, то по формуле Вилла [2]

$$\chi(v) = \ln \frac{1 - \text{dn}(v - 2b)}{1 - \text{dn}(v - c)} \frac{\text{sn}(v - c)}{\text{sn}(v - 2b)} - i(\alpha - \pi) \quad \left(\begin{aligned} v &= \sqrt{e_1 - e_3} u \\ e_{1,3} &= \wp(\omega_{1,2}) \end{aligned} \right) \quad (6)$$

В этой формуле $\text{sn } v$ и $\text{dn } v$ — эллиптические функции Якоби.

При $u = b_1 + \omega_2$ ($v = b + K'i$), соответствующей бесконечно удаленной точке в физической плоскости, функция $\chi(v)$ должна обращаться в нуль. Это дает

$$\text{arc tg} \frac{\text{cn}(c - b)}{\text{sn}(c - b)} - \text{arc tg} \frac{\text{cn } b}{\text{sn } b} = \alpha - \pi \quad (7)$$

Используем связь эллиптической функции Вейерштрасса с функциями Якоби

$$\wp(u) = e_3 \mp \frac{e_1 - e_3}{\text{sn}^2 v}$$

Из формулы (1) найдем

$$\frac{dw}{dv} = A \sqrt{e_1 - e_3} k^2 [\text{sn}^2(v - b) - \text{sn}^2 b] \quad (8)$$

где k — модуль функций Якоби. Отсюда

$$w(v) = \frac{B}{k^2} \{ (1 - k^2 \text{sn}^2 b) v - E[\text{am}(v - b), k] \} \mp C \quad (A \sqrt{e_1 - e_3} k^2 = B)$$

где $E(\text{am } v, k)$ — эллиптический интеграл второго рода. Пользуясь соотношениями

$$\text{am}(v + 2K) = \text{am } v \mp \pi, E(\pi \mp \varphi) = 2E \mp E(\varphi, k), \Gamma = w(2K) - w(0)$$

найдем

$$\Gamma = \frac{2B}{k^2} [K - E - Kk^2 \text{sn}^2 b] \quad (9)$$

Формула (5) с учетом введенных преобразований примет вид

$$H = \frac{\pi B \mp K'\Gamma k^2}{2KV_\infty k^2} = \frac{B}{2KV_\infty k^2} [\pi \mp 2K'(K - E - Kk^2 \text{sn}^2 b)] \quad (10)$$

Из формул (6) и (8) находим

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dv} &= \frac{B}{V_\infty} e^{i(\alpha - \pi)} \frac{1 - \text{dn}(v - c)}{1 - \text{dn}(v - 2b)} \frac{\text{sn}(v - 2b)}{\text{sn}(v - c)} [\text{sn}^2(v - b) - \text{sn}^2 b] \\ z(v) &= \frac{B}{V_\infty} e^{i(\alpha - \pi)} \int \frac{1 - \text{dn}(v - c)}{1 - \text{dn}(v - 2b)} \frac{\text{sn}(v - 2b)}{\text{sn}(v - c)} [\text{sn}^2(v - b) - \text{sn}^2 b] dv \mp D \quad (11) \end{aligned}$$

Решение задачи содержит четыре параметра B, b, c, k , для определения которых имеем два уравнения (7) и (10). Недостающие уравнения для определения параметров получим, используя заданную длину пластинки и условие периодичности $z(v)$.

Легко обнаружить, что подынтегральная функция в формуле (11)

$$f(v) = \frac{1 - \operatorname{dn}(v-c)}{1 - \operatorname{dn}(v-2b)} \frac{\operatorname{sn}(v-2b)}{\operatorname{sn}(v-c)} [\operatorname{sn}^2(v-b) - \operatorname{sn}^2b] \quad (12)$$

есть эллиптическая функция с основными периодами $2K$ и $4K'i$, имеющая полюсы второго и первого порядка в точках $v = b \mp K'i$; $v = b - K'i$ и полюс первого порядка в точке $v = c \mp 2K'i$ с вычетами, соответственно равными

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{k^2} e^{-i(\alpha-\pi)}, & A_1 &= \frac{1}{k^2} e^{-i(\alpha-\pi)} i [\operatorname{dn} b - \operatorname{dn}(b-c)] \\ B_2 &= \frac{1}{k^2} e^{i(\alpha-\pi)}, & B_1 &= -\frac{1}{k^2} e^{+i(\alpha-\pi)} i [\operatorname{dn} b - \operatorname{dn}(b-c)] \\ C_1 &= \frac{2 \operatorname{sn}(c-2b)}{1 \mp \operatorname{dn}(c-2b)} [\operatorname{sn}^2(c-b) - \operatorname{sn}^2b] \end{aligned} \quad (13)$$

Тогда, согласно теории эллиптических функций, $f(v)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} f(v) &= A_2 \wp(v-b-K'i) \mp B_2 \wp(v-b \mp K'i) \mp A_1 \zeta(v-b-K'i) \mp \\ &\mp B_1 \zeta(v-b \mp K'i) \mp C_1 \zeta(v-c-2K'i) \mp Z \end{aligned} \quad (14)$$

где Z — постоянная величина, которую определим следующим образом. Из формулы (12) легко обнаружить, что $f(2b \mp 2K'i) = 0$.

Полагая в формуле (14) $v = 2b \mp 2K'i$ и используя известные соотношения

$$\begin{aligned} \wp(b \mp 3K'i) &= \wp(b \mp K'i), & \zeta(b \mp 3K'i) &= \zeta(b - K'i) \mp 2\eta_2 \\ (\zeta(K) &= \eta_1, & \zeta(2K'i) &= \eta_2) \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} Z &= -A_2 \wp(b \mp K'i) - B_2 \wp(b - K'i) - A_1 \zeta(b \mp K'i) - B_1 \zeta(b - K'i) - \\ &- C_1 \zeta(2b - c) - 2\eta_2 B_1 \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь, используя (14), можно вычислить интеграл, входящий в формулу (11). Получим

$$\begin{aligned} F(v) &= \int f(v) dv = -A_2 \zeta(v-b-K'i) - B_2 \zeta(v-b \mp K'i) \mp \\ &\mp A_1 \ln \sigma(v-b-K'i) \mp B_1 \ln \sigma(v-b \mp K'i) \mp C_1 \ln \sigma(v-c-2K'i) \mp \\ &\mp Zv \mp D_1 \end{aligned} \quad (16)$$

Запишем условия однозначности функции $z(v)$

$$F(v \mp 2K) - F(v) = 0$$

Для правильного определения приращения функции $F(v)$ при изменении аргумента на $2K$ нужно учесть, что в точках $v = b \pm K'i$ и $v = c \mp 2K'i$ эта функция имеет логарифмические полюсы. Проведем разрезы, соединяющие эти точки. Тогда очевидно, что значение разности $F(v \mp 2K) - F(v)$, полученное при движении по кривой L , охватывающей точку $v = b - K'i$, отличается от ее значения при движении по линии MN (пунктирная линия на фиг. 3) на величину $2\pi i B_1$. Следовательно, вычисляя приращение функции $F(v)$ при движении по линии L и учитывая сделанное замечание, получим

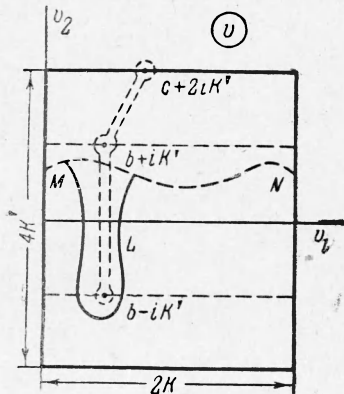
$$\begin{aligned} F(v \mp 2K) - F(v) &= 2\eta_1 [- (A_2 \mp B_2) \mp C_1 \\ &(b-c) \mp (2B_1 - C_1) K'i] - 2\pi i B_1 \mp 2ZK = 0 \end{aligned}$$

Подставляя в это уравнение значение Z из (15) и используя соотношение Лежандра

$$4K'i\eta_1 - 2K\eta_2 = \pi i$$

после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} (A_2 \mp B_2) \eta_1 \mp [A_2 \wp(b \mp K'i) \mp B_2 \wp(b - K'i)] K \mp [A_1 \zeta(b \mp K'i) \mp \\ \mp B_1 \zeta(b - K'i) \mp C_1 \zeta(2b - c)] K \mp [C_1(b - c) - (2B_1 \mp C_1) K'i] \eta_1 = 0 \end{aligned} \quad (17)$$



Фиг. 3

Вычислим ширину пластинки l . Так как

$$z(c) - z(0) = le^{i\alpha}$$

то, пользуясь формулами (11) и (16), легко находим

$$l = \frac{B}{V_\infty} \left\{ A_2 [\zeta(c - b - K'i) + \zeta(b + K'i)] + B_2 [\zeta(c - b + K'i) + \zeta(b - K'i)] + \right. \\ \left. + A_1 \ln \frac{\sigma(b + K'i)}{\sigma(c - b - K'i)} + B_1 \ln \frac{\sigma(b - K'i)}{\sigma(c - b + K'i)} + C_1 \ln \frac{\sigma(c + 2K'i)}{\sigma(2K'i)} - \right. \\ \left. - Zc + (A_1 + B_1)\pi i \right\} \quad (18)$$

Полагая

$$z(2b) = 0, \quad v = v_1 + K'i$$

при помощи формул (11) и (16) найдем уравнение свободной поверхности жидкости. Получим

$$z(v) = \frac{B}{V_\infty} e^{i(\alpha - \pi)} \left\{ A_2 [\zeta(b - K'i) - \zeta(v_1 - b)] + \right. \quad (19) \\ \left. + B_2 [\zeta(b + K'i) - \zeta(v_1 - b + 2K'i)] + A_1 \ln \frac{\sigma(v_1 - b)}{\sigma(b - K'i)} + \right. \\ \left. + B_1 \ln \frac{\sigma(v_1 - b + 2K'i)}{\sigma(b + K'i)} + C_1 \ln \frac{\sigma(v_1 - c - K'i)}{\sigma(2b - c - 2K'i)} + Z(v_1 - 2b + K'i) \right\}$$

Если подставить в эту формулу значения коэффициентов из (13), то можно обнаружить, что в точке $v = b + K'i$ мнимая часть функции $z(v)$ обращается в $\pm\infty$ в зависимости от знака коэффициента

$$B [\operatorname{dn} b - \operatorname{dn}(b - c)]$$

Это означает, что свободная поверхность жидкости на бесконечности опускается (при положительном коэффициенте) или поднимается (при отрицательном коэффициенте) бесконечно высоко. Иными словами, в зависимости от знака этого коэффициента при обтекании пластинки под поверхностью невесомой жидкости она или бесконечно высоко поднимается над невозмущенным уровнем свободной поверхности или бесконечно низко опускается.

Чтобы сделать вполне определенный вывод, рассмотрим поведение угла наклона касательной к свободной поверхности жидкости. Из уравнения (6) получим

$$\beta(v_1 + iK') = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{cn}(v_1 - c)}{\operatorname{sn}(v_1 - c)} - \operatorname{arg} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{cn}(v_1 - 2b)}{\operatorname{sn}(v_1 - 2b)} + \alpha - \pi \\ \beta'(v_1 + K'i) = \operatorname{dn}(v_1 - 2b) - \operatorname{dn}(v_1 - c)$$

В точке $v = b + K'i$, $\beta = 0$. Исследуем знак

$$\beta'(b + K'i) = \operatorname{dn} b - \operatorname{dn}(b - c)$$

Если точка разветвления потока O лежит на нижней стороне пластинки, то имеем

$$0 < a = 2b < c < 2K, \quad \text{или} \quad b < c - b < 2K - b$$

Рассматривая график функции $\operatorname{dn} v$, легко обнаружить, что

$$\operatorname{dn} b - \operatorname{dn}(b - c) > 0$$

Отсюда следует, что для достаточно малой величины ε $\beta(b + \varepsilon, K'i) > 0$ и $\beta(b - \varepsilon, K'i) < 0$, т. е. в окрестности точки A угол наклона касательной к кривой AB положительный и возрастает при движении от A к B , а в окрестности точки B он отрицательный и также возрастает. Рассматривая еще уравнение

$$\operatorname{dn}(v - 2b) - \operatorname{dn}(b - c) = 0$$

можно определить, что производная $\beta'(v)$ на отрезке $[0, 2K]$ обращается в нуль дважды, в точках $v = b + \frac{1}{2}c$ и $v = K + b + \frac{1}{2}c$. Это позволяет сделать вывод о характере поведения кривой AB и заключить, что свободная поверхность жидкости опускается бесконечно низко на бесконечно большом расстоянии от пластинки.

Если точка разветвления потока находится на верхней стороне пластинки, то аналогичными рассуждениями можно убедиться, что свободная поверхность жидкости поднимается бесконечно высоко на бесконечно большом расстоянии от пластинки.

2. Зная из (6) распределение скорости, с помощью интеграла Бернулли можно рассчитать поле давлений на пластинке и внутри жидкости.

Для вычисления гидродинамической силы $R = X + iY$, действующей на пластинку, используем известный прием, основанный на понятии подсосывающей силы.

Рассмотрим временно более общую задачу о силах, действующих на подводное крыло при наличии горизонтального дна. Применяя теорему об изменении количества движения жидкости в проекции на ось x , убедимся в том, что $X = 0$. Так как это заключение справедливо для жидкости с произвольной глубиной, то оно остается верным и для жидкости с бесконечной глубиной. Обозначим через P подсосывающую силу, действующую на переднюю кромку C пластинки и направленную вдоль пластинки.

Подъемную силу Y можно вычислить через подсосывающую силу P при помощи формулы (фиг. 1)

$$Y = \frac{|P|}{\sin \alpha}, \quad P = \frac{i\rho}{2} \int_k \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 \frac{dz}{dv} dv \quad (20)$$

Здесь k — полуокружность бесконечно малого радиуса с центром в точке $v = c$, обходящая против часовой стрелки [2]. Обозначим через c_{-1} вычет функции

$$f(v) = \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 \frac{dz}{dv}$$

в точке $v = c$, равный

$$c_{-1} = 2Be^{-i(\alpha-\pi)} i V_\infty \frac{\operatorname{sn}(c-2b)}{1 + \operatorname{dn}(c-2b)} [\operatorname{sn}^2(c-b) - \operatorname{sn}^2 b]$$

Тогда

$$P = -\frac{\pi\rho}{2} c_{-1}, \quad Y = \frac{B\rho V_\infty}{\sin \alpha} \frac{\operatorname{sn}(c-2b)}{1 + \operatorname{dn}(c-2b)} [\operatorname{sn}^2(c-b) - \operatorname{sn}^2 b] \quad (21)$$

Пользуясь формулами (21) и (18), можно вычислить коэффициент подъемной силы пластинки C_y .

3. Если в полученных формулах перейти к пределу, устремляя k к нулю (при этом $K \rightarrow 1/2\pi$, $K' \rightarrow \infty$), то они будут давать решение задачи обтекания пластинки безграничным потоком. Действительно, полагая в уравнении (7) $k = 0$, легко найдем

$$c = 2b + \pi - \alpha$$

Используя известные разложения

$$\begin{aligned} \psi(v) &= -\frac{\eta_1}{K^2} + \left(\frac{\pi}{2K} \right)^2 \operatorname{csc}^2 \frac{\pi v}{2K} - \frac{\pi^2}{K^2} \sum_1^\infty \left[\frac{q^{4m} E(-v)}{(1 - q^{4m} E(-v))^2} + \frac{q^{4m} E(v)}{(1 - q^{4m} E(v))^2} \right] \\ \zeta(v) &= \frac{\eta_1}{K} v + \frac{\pi}{2K} \left[\operatorname{sig} \frac{\pi v}{2K} + i \sum_1^\infty \left(\frac{2q^{4m} E(-v)}{1 - q^{4m} E(-v)} - \frac{2q^{4m} E(v)}{1 - q^{4m} E(v)} \right) \right] \\ \left(q = \exp \frac{-\pi K'}{K}, E(v) = \exp \frac{\pi i v}{K}, k = 4 \sqrt{q} \prod_1^\infty \left[\frac{1 + q^{2n}}{1 + q^{2n+1}} \right]^4 \right) \end{aligned}$$

из условия периодичности (17) функции $z(v)$ при $k \rightarrow 0$ после некоторых преобразований получим $c = 1/2\pi$. При этих условиях из формулы (18) следует

$$l = 1/2 B / V_\infty$$

Легко обнаружить, что знаменатель дроби в формуле (10) при $k \rightarrow 0$ обращается в нуль, в то время как числитель отличен от нуля, если отличен от нуля коэффициент B . Это означает, что «глубина погружения» H при $k \rightarrow 0$ безгранично возрастает, а отношение l/H стремится к нулю. Наконец, из формулы (21) в пределе получим

$$Y = 1/2 B \pi \rho V_\infty \sin(\pi - \alpha)$$

Отсюда следует известная формула для коэффициента подъемной силы пластинки при обтекании безграничным потоком жидкости

$$C_y = 2\pi \sin(\pi - \alpha)$$

Система уравнений для определения неизвестных параметров может быть упрощена, если рассматривать обтекание пластинки при малых углах атаки $\delta = \pi - \alpha$.

