

УДК 551.51+519.6

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В СИСТЕМЕ ОЗЕРО БАЙКАЛ — АТМОСФЕРА РЕГИОНА

В. В. Пененко, Е. А. Цветова

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,  
630090 Новосибирск

Представлена структура математических моделей для исследования процессов гидротермодинамики и переноса примесей в климатической системе атмосфера индустриального региона — озеро и решения на их основе задач климатоэкологического мониторинга и прогнозирования. Обсуждаются вопросы построения численных схем и методов моделирования. Приводится пример оценки влияния на регион озера Байкал загрязняющих примесей от источников, расположенных в Северном полушарии Земли.

**Введение.** В настоящее время математические модели стали многофункциональным инструментом для исследования процессов в атмосфере и водных объектах. В частности, для решения задач, связанных с оценками перспективы индустриальных регионов, в которых на естественные климатоэкологические факторы накладываются антропогенные воздействия, математическое моделирование является, пожалуй, единственным средством получения информации.

Непосредственное влияние антропогенных нагрузок сказывается в первую очередь в областях локального и мезорегионального масштабов, поэтому важно в каждом регионе исследовать возможные предпосылки возникновения экологически неблагоприятных ситуаций, которые обуславливаются главным образом его климатическими условиями. С позиций мониторинга и климатоэкологического прогнозирования промышленные регионы Сибири являются не только интересными, но и, учитывая преимущественно сырьевую направленность их хозяйственной деятельности, стратегически важными объектами исследований.

Байкальский регион играет особую роль в формировании климатических условий и экологической обстановки на юге Сибири. Принимая во внимание это обстоятельство, мы выбрали его в качестве базового объекта для разработки и применения эколого-климатических моделей. Специфика Байкальского региона состоит в том, что озеро Байкал является мощным климатообразующим фактором юга Сибири. Действие этого фактора усиливается тем, что регион находится в зоне влияния летнего Саяно-Алтайского циклогенеза и зимнего Азиатского антициклона. Взаимодействие фоновых и локальных атмосферных процессов формирует уникальные «байкальские» мезоклиматы, которые, в свою очередь, оказывают определяющее воздействие на формирование мезоклиматов и качество атмосферы в индустриальных районах региона. Постоянно действующий в период открытой воды контраст температуры вода — суша является источником неустойчивости в климатической системе и приводит к тому, что зона непосредственного влияния Байкала, которую мы предварительно оценили масштабами порядка 100–200 км от береговой

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 97-05-96511, 98-05-65318) и Интеграционного гранта СО РАН (ИГ СО РАН 97 № 30).

линии [1], становится потенциальным аккумулятором загрязнений не только с территории региона, но и с других территорий Северного полушария: Сибири, Китая, Монголии. Все эти процессы необходимо исследовать для понимания экологической перспективы региона и озера.

Таким образом, формируя концепцию исследования климатических изменений в системе озеро — атмосфера, мы не ограничиваемся масштабами непосредственного взаимодействия воды и атмосферы, а рассматриваем мезорегиональные процессы совместно с полусферными и гидротермодинамику системы не отделяем от процессов переноса загрязняющих примесей. Это необходимо для оценок роли трансграничных переносов и внешних по отношению к региону процессов и источников. Полусферные модели позволяют дать согласованное описание процессов в озере и атмосфере региона, имеющих соответствующие характерные временные масштабы.

Данная работа является развитием исследований, выполненных Временным научным коллективом по заданию Президиума СО АН СССР, по оценке антропогенного влияния на озеро и окружающий его регион [1] и в идейном плане продолжает цикл исследований [2–10].

Следует отметить, что первое принципиальное обсуждение вопросов математического моделирования применительно к проблемам изучения и охраны озера Байкал состоялось в августе 1967 г. на «байкальском» семинаре с участием ведущих ученых АН СССР, где Л. В. Овсянниковым впервые были сформулированы теоретические основы математической модели озера как модели динамической конвекции воды переменной плотности в ограниченных водоемах типа моря или глубокого озера [11].

**Структура областей и системы координат.** Сначала опишем области и системы координат для представления базовых моделей. По горизонтальным направлениям используем универсальную систему координат  $(x, y)$  с задаваемыми параметрически масштабными множителями  $m, n$ , чтобы в зависимости от целей исследований можно было получать сферические, полярные, декартовы координаты или координаты картографических проекций. Для атмосферных моделей рассмотрим два типа областей: Северное полушарие и ограниченные территории региона. Область, занимаемая озером в регионе, описывается параметрически в выбранной системе горизонтальных координат.

Для описания моделей по вертикали воспользуемся принципом декомпозиции по областям и условно разобьем атмосферу на два слоя:  $D_1$  — свободная атмосфера ( $p_T \leq p \leq p_B$ ) и  $D_2$  — пограничный слой ( $p_B \leq p \leq p_s$ ), где  $p$  — давление;  $p_s = p_s(x, t)$ ,  $p_T, p_B$  — давление на поверхности Земли, верхней границе атмосферы и границе раздела слоев;  $\mathbf{x} = (x, y)$ . Введем гибридную систему координат, позволяющую объединить преимущества реализации моделей в изобарических координатах в свободной атмосфере (в случае постоянных  $p_T$  и  $p_B$ ) с удобствами следящих за рельефом Земли  $\sigma$ -координат:

$$\text{в } D_1: \quad \sigma = (p - p_T)/\pi_1, \quad \text{в } D_2: \quad \sigma = (p - p_B)/\pi_2 + \epsilon, \quad 0 \leq \epsilon \leq 1; \quad (1)$$

$$\pi_1 = (p_B - p_T)/\epsilon, \quad \pi_2 = (p_s - p_B)/(1 - \epsilon). \quad (2)$$

Параметр  $\epsilon$  вводится так, чтобы поверхность  $\sigma = \epsilon$  была выше уровня «модельного» рельефа поверхности Земли. В соответствии с определением (1), (2) запишем соотношения для вертикальных скоростей  $\omega = dp/dt$  и  $\dot{\sigma} = d\sigma/dt$  в областях  $D_{it}$  ( $i = 1, 2$ ) и условия для них на границах:

$$\omega = \frac{d_s \chi_i}{dt} + \pi_i \dot{\sigma}, \quad \frac{d_s}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + mu \frac{\partial}{\partial x} + nv \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{d_s}{dt} + \dot{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma}, \quad (3)$$

$$\chi_1 = \sigma \pi_1 + p_T, \quad \chi_2 = (\sigma - \epsilon) \pi_2 + p_B, \quad \dot{\sigma} = 0 \quad \text{при } \sigma = 0 \quad \text{и} \quad \sigma = 1; \quad (4)$$

$$\omega \Big|_{\epsilon^-} = \omega \Big|_{\epsilon^+}, \quad \pi_1 \dot{\sigma} \Big|_{\epsilon^-} = \pi_2 \dot{\sigma} \Big|_{\epsilon^+} \quad \text{при } \sigma = \epsilon. \quad (5)$$

Модели будем определять в пространственно-временной области  $D_t \equiv D \times [0, t_k]$ , где  $[0, t_k]$  — интервал изменения времени  $t$ ;  $D = \bigcup_{i=1}^4 D_i$  — область изменения пространственных координат:  $D_1 = S \times [0 \leq \sigma \leq \epsilon]$ ,  $D_2 = S \times [\epsilon \leq \sigma \leq 1]$ ,  $D_1 \cup D_2 = D_a$ ,  $D_3 = \{\mathbf{x} \subset S_c, 0 \leq z \leq h_c(\mathbf{x})\}$ ,  $D_4 = \{\mathbf{x} \subset S_b, 0 \leq z \leq h_w(\mathbf{x})\}$ ,  $S = \{0 \leq a \leq x \leq b \leq 2\pi, 0 \leq c \leq y \leq d \leq \pi\}$ . Здесь  $S$  — область на поверхности Земли;  $a, b, c, d$  — параметры, определяющие горизонтальные размеры области  $S$  ( $S = S_c \cup S_b$ , где  $S_c, S_b$  — части поверхности областей, занятых сушей и водой);  $h_c(\mathbf{x}), h_w(\mathbf{x})$  — функции, описывающие глубину деятельного слоя почвы и рельеф дна водного объекта соответственно. Ось  $z$  направлена вниз. Через  $\bar{l}_i$  обозначим боковые границы областей  $D_i$ , а через  $\bar{l}_i$  — их полные границы в трехмерном пространстве. Добавление индекса  $t$  везде означает добавление временной изменчивости.

Функции состояния обозначим через  $\varphi = \{\varphi_i, i = \overline{1, r}\} \in Q(D_t)$ , где  $Q(D_t)$  — соответствующее функциональное пространство на  $D_t$ ;  $\varphi_i$  — компоненты вектор-функции состояния;  $r$  — число компонент. Структура этих объектов и их свойства определяются функциональным содержанием базовых моделей. Аналогично конструируется пространство сопряженных функций  $\{\varphi^* \in Q^*(D_t)\}$ .

В области  $D_t$  введем скалярное произведение для функций состояния:

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{k=1}^4 \int_{D_{kt}} \left( \sum_{i=1}^r \varphi_{1i} \varphi_{2i} \bar{x}_i \right) \gamma_k dD_k dt, \quad (6)$$

где  $dD_k = dz_k dx dy / (mn)$ ,  $dz_1 = dz_2 \equiv d\sigma$ ,  $dz_3 = dz_4 \equiv dz$ ,  $\gamma_1 = \pi_1$ ,  $\gamma_2 = \pi_2$ ,  $\gamma_3 = \rho_n$ ,  $\gamma_4 = \rho_0$ ;  $\gamma_k$  — параметры метрики в декомпозированных областях;  $\rho_n$  и  $\rho_0$  — плотности почвы и воды соответственно. Размерные множители  $\bar{x}_i$  выбираются с учетом физического смысла соответствующих компонент, а  $\gamma_k$  ( $k = \overline{1, 4}$ ) — в зависимости от системы координат и способа декомпозиции области  $D_t$  на подобласти  $D_{kt}$ .

**Базовые модели атмосферы и озера.** В комплексе участвуют модели нескольких системных уровней. Первый базовый уровень составляют модели процессов в климатической системе и ее частях. Это модели гидротермодинамики и переноса примесей в атмосфере и воде, а также процессов непосредственного взаимодействия различных сред. Второй системный уровень составляют модели для решения оптимизационных задач управления, планирования и экологического проектирования с использованием моделей базового уровня. Для исследования процессов в атмосфере требуются модели трех типов, различающихся пространственно-временными масштабами процессов и размерами областей:

- А1 — модель с характерными горизонтальными масштабами порядка 100 км для исследования мезоклиматов промышленных районов и городов;

- А2 — мезорегиональная модель с характерными горизонтальными масштабами 100–1000 км;

- А3 — модель атмосферы для Северного полушария, предназначенная для изучения долговременных взаимодействий озера и атмосферы.

По вертикали модель А1 работает преимущественно в области  $D_{2t}$ , а модели А2 и А3 — в области  $D_{at} = D_{1t} \cup D_{2t}$  в режиме декомпозиции.

Для озера вводятся модели двух типов:

- Б1 — модель общей циркуляции озера;

- Б2 — модели для частей озера и локальных зон.

Они имеют одинаковую структуру, но различаются краевыми условиями и пространственно-временным разрешением дискретных аппроксимаций. Модели непосредственного взаимодействия атмосферы и озера организуются на базе моделей А2 и Б1.

*Гидротермодинамика атмосферных процессов.* Основные уравнения модели записываются с учетом декомпозиции области  $D_{at}$  по вертикальной координате на  $D_{it}$  ( $i = 1, 2$ ):

$$\frac{du}{dt} - lv + m \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{\pi_i} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{\partial \chi_i}{\partial x} \right] - F_u = 0; \quad (7)$$

$$\frac{dv}{dt} + lu + n \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{1}{\pi_i} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{\partial \chi_i}{\partial y} \right] - F_v = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + \frac{RT\pi_i}{\chi_i} = 0; \quad (9)$$

$$\frac{dT}{dt} - \omega A_i - F_T = Q_T, \quad A_i = -\frac{1}{c_{pm}\pi_i} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = \frac{RT\pi_i}{\chi_i c_{pm}}; \quad (10)$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial t} + L(\pi_i) = 0. \quad (11)$$

Здесь  $u, v$  — компоненты вектора скорости  $\mathbf{u}$  в направлениях  $x, y$  соответственно;  $l$  — параметр Кориолиса;  $\Phi$  — геопотенциал;  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $T$  — виртуальная температура;  $Q_T$  — источники тепла;  $c_{pm}$  — удельная теплоемкость влажного воздуха при постоянном давлении. Оператор переноса субстанций  $\eta$  по траекториям частиц воздуха в дивергентной форме имеет вид

$$L(\pi_i \eta) = mn \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\pi_i \eta u}{n} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\pi_i \eta v}{m} \right) \right] + \frac{\partial \pi_i \eta \dot{\sigma}}{\partial \sigma}, \quad (12)$$

а операторы турбулентного обмена  $F_\eta \equiv F_\eta^s + F_\eta^v$ :

$$F_\eta^s = \frac{mn}{\gamma_i} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\gamma_i \mu_{\eta x}}{n} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\gamma_i \mu_{\eta y}}{m} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \right], \quad F_\eta^v = \frac{1}{\gamma_i} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \gamma_i \nu_\eta \frac{\partial \eta}{\partial \sigma} \right). \quad (13)$$

При  $\sigma = 1$   $\Phi = \bar{\Phi}_s \equiv gZ_s$ , где  $g$  — ускорение свободного падения;  $Z_s$  — функция, описывающая рельеф поверхности Земли. Для замыкания моделей, кроме условий (3), (4) на верхней границе, предполагается отсутствие турбулентных потоков субстанций. На нижней границе задаются параметрические значения потоков тепла, момента количества движения и уравнение баланса тепла на поверхности Земли. На боковых границах ограниченной территории задаются условия выхода на фоновые процессы, а на сфере — условия периодичности.

*Перенос и трансформация влаги в атмосфере.* Озеро служит для атмосферы мощным аккумулятором и источником влаги и тепла. В свою очередь, под влиянием сильных ветров происходят значительные пространственные перестройки в полях течений и температуры воды. В результате взаимодействия озера и атмосферы знаки температурных контрастов вода — воздух — суша подвержены сезонным и суточным изменениям, поэтому чрезвычайно важно изучить характер процессов энергообмена в системе атмосфера — озеро в различных ситуациях и проследить режимы обратной связи от атмосферы к озеру и релаксации последствий интенсивных воздействий. Для таких целей требуется достаточно полное воспроизведение гидрологического цикла в атмосфере. Влияние влажности необходимо также учитывать в уравнениях переноса тепла в атмосфере и баланса тепла на подстилающей поверхности, при расчетах радиационных потоков тепла и скорости удаления примесей из атмосферы.

Определим составляющие функции состояния  $\varphi$ , участвующие в моделях гидрологического цикла. Обозначим их через  $\mathbf{q} = \{q_k, k = \overline{1, 6}\} \equiv \{q_v, q_c, q_r, q_{ic}, q_s, q_g\}$ , где  $q_k$  — отношения смеси для водяного пара  $q_v$ , облачной воды  $q_c$ , дождевой воды  $q_r$ , облачного льда  $q_{ic}$ , снега  $q_s$ , ледовых кристаллов  $q_g$ .

В качестве базовой возьмем модель с первыми тремя составляющими гидрологического цикла  $q_v, q_c, q_r$ :

$$\frac{\partial \pi_i q_k}{\partial t} + \tilde{L}(\pi_i q_k) - R_{qk} - Q_{qk} = 0. \quad (14)$$

Здесь  $k = \overline{1, 3}$ ;  $i = 1, 2$ ;  $R_{qk}$  — скорости изменения  $q_k$  за счет микрофизических процессов трансформации влаги;  $Q_{qk}$  — функции, описывающие источники;  $\tilde{L}(\pi_i q_k)$  — адвективно-диффузионный оператор:

$$\tilde{L}(\pi_i q_k) = L(\pi_i q_k) - \pi_i F_{qk} + \pi_i DF_{qk}, \quad (15)$$

где  $DF_{qk} = g\partial(\rho\omega_T q_k q_3)/\pi_i \partial\sigma$  — диффузионный поток для компонентов влажного воздуха, обусловленный движением влажного воздуха относительно сухого;  $\omega_T$  — средняя скорость падения дождевых капель, а первые два выражения имеют вид (12) и (13).

Для замыкания модели на верхней границе предполагается отсутствие потоков, а на нижней задается поток водяного пара в зависимости от «влажностной способности» различных участков поверхности Земли. Данная модель применима для исследования ситуаций, в которых реализуется гидрологический цикл с теплой дождевой водой. Для описания процессов с низкими температурами, связанных с образованием снега и льда, в состав базовой модели вводятся дополнительные уравнения для учета переноса и трансформации соответствующих компонентов [12].

*Перенос примесей в атмосфере.* В комплексе участвуют различные модификации моделей с учетом специфики объектов исследования. Основные уравнения формально имеют такую же структуру, как и модели переноса влаги (14), (15) [3, 9]:

$$\frac{\partial \pi_i c_k}{\partial t} + \tilde{L}(\pi_i c_k) - R_{ck} - Q_{ck} = 0, \quad (16)$$

где  $i = 1, 2$ ;  $c_k$  — концентрации примесей;  $k = \overline{1, n_a}$ ;  $n_a$  — число различных веществ;  $R_{ck}$  — скорости изменения концентраций  $c_k$  за счет химической трансформации примесей;  $Q_{ck}$  — источники примесей. Рассматриваются газообразные и аэрозольные субстанции. Адвективно-диффузионный оператор  $\tilde{L}$  определяется выражением вида (15), в котором в вертикальную скорость  $\sigma$  добавляется скорость гравитационного осаждения частиц. В отличие от [3, 9] здесь учитывается диффузионный поток примесей с дождевой водой. В качестве краевых условий на верхней границе предполагаются заданными потоки примесей, на боковых границах — выход на фоновые концентрации. На нижней границе используется уравнение баланса примесей для различных категорий землепользования с учетом сухого и влажного осаждения частиц, турбулентного потока, аэродинамического подъема частиц с поверхности Земли и источников примесей естественного и антропогенного происхождения.

*Гидротермодинамика и перенос примесей в озере Байкал.* Запишем основные уравнения моделей:

$$\frac{du}{dt} - lv + \frac{m}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} - F_u = 0; \quad (17)$$

$$\frac{dv}{dt} + lu + \frac{n}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} - F_v = 0; \quad (18)$$

$$\alpha \left( \frac{dw}{dt} - F_w \right) + \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial p}{\partial z} + g\rho \right) = 0; \quad (19)$$

$$\frac{\alpha}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{mn}{\rho_0} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho_0 u}{n} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho_0 v}{m} \right) \right] + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0; \quad (20)$$

$$\frac{d\eta_k}{dt} - F_{\eta k} - Q_{\eta k} = 0, \quad k = \overline{1, 2 + n_w}. \quad (21)$$

$$\rho = \rho(p, T, S_l). \quad (22)$$

Здесь  $\{\eta_k\} = \{T, S_l, c_i, i = \overline{1, n_w}\}$ ;  $T$  — температура;  $S_l$  — соленость;  $c_i$  — концентрации примесей в воде;  $n_w$  — их количество;  $u, v, w$  — компоненты вектора скорости  $\mathbf{u}$  в направлениях  $x, y, z$  соответственно;  $p$  — давление;  $\rho = \rho_0 + \rho'$  — плотность;  $\rho_0$  — заданное распределение относительной плотности;  $Q_{\eta k}$  — источники тепла, соли и примесей;  $\alpha$  — параметр, определяющий структуру модели (например, для гидростатической модели  $\alpha = 0$ ). Операторы переноса и турбулентного обмена определяются выражениями типа (12), (13) в системе координат, принятой в области  $D_{4t}$ . Функция  $w$  в уравнениях переноса примесей учитывает дополнительно скорости гравитационного осаждения или всплывания примесей. На свободной поверхности  $z = \zeta$ , представляющей собой границу раздела вода — воздух, задаются следующие условия:

$$\nu\rho_0 \frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x, \quad \nu\rho_0 \frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y, \quad \nu\eta\rho_0 c_p \frac{\partial \eta_k}{\partial z} = -H_{\eta k}^s; \quad (23)$$

$$w = \frac{d_s \zeta}{dt}, \quad p = p_s. \quad (24)$$

На дне при  $z = h_w(x, y)$   $u = 0, v = 0, w = 0, \partial \eta_k / \partial N = \bar{H}_{\eta k}^N$ ; на твердых боковых границах  $u = 0, v = 0, \partial \eta_k / \partial N = \bar{H}_{\eta k}^N$ ; в местах втока рек  $u = u_{riv}, v = v_{riv}, \partial \eta_k / \partial N = U_{riv}(\eta_k - (\eta_k \rho)_{riv} / \rho)$ ; в устьях вытекающих рек  $u = u_{riv}, v = v_{riv}, \partial \eta_k / \partial N = 0$ . Здесь  $\tau_x, \tau_y$  — компоненты напряжения ветра на поверхности;  $H_{\eta k}^s, H_{\eta k}^N$  — потоки тепла, соли и примесей на границе раздела и твердых границах;  $c_p$  — теплоемкость воды при постоянном давлении; индексом  $riv$  отмечены значения функций, относящиеся к рекам;  $\partial / \partial N$  — производная по конормали. При решении задач для частей озера формируются условия выхода функций состояния на их фоновые значения со стороны «открытой воды».

*Параметризация турбулентного обмена.* В базовых вариантах моделей атмосферы и воды вводятся операторы турбулентного обмена вида (13) с частными производными второго порядка. Коэффициенты турбулентного обмена по горизонтальным направлениям  $\mu_x, \mu_y$  рассчитываются по нелинейной параметризационной схеме, аналогичной [3], с учетом горизонтальной деформации поля скорости, стратификации атмосферы и воды и характеристик размеров ячеек сеточных областей.

Для расчета вертикальных коэффициентов турбулентности в зависимости от ситуации используется одна из двух схем. Первая упрощенная: коэффициент рассчитывается как функция локального числа Ричардсона и характерного масштаба вихрей по вертикали. Такая схема удобна и эффективна в реализации, но не обладает «памятью» при переходах от одной пространственно-временной ячейки области к другой. Этот недостаток становится существенным при резких перестройках полей.

Вторая схема основана на решении двух уравнений для кинетической энергии турбулентности  $E$  и диссипации  $\epsilon$  в атмосфере и воде [13, 14]. Состыковка  $(E - \epsilon)$ -уравнений для атмосферы и воды осуществляется в предположении непрерывности потоков энергии и диссипации на границе раздела сред.

*Баланс тепла на поверхности.* Для замыкания и объединения моделей для различных сред на границах раздела атмосфера — вода — суша запишем уравнение теплового баланса

$$c_{pm} \rho_a \frac{\partial T}{\partial t} = R_n - H_m - H_s - L_v E_s, \quad (25)$$

где  $R_n$  — радиационный баланс на поверхности;  $H_m$  — молекулярный поток тепла в почву или турбулентный поток тепла в воде;  $H_s, L_v E_s$  — потоки явного и скрытого

тепла в атмосферу;  $L_v$  — скрытая теплота испарения;  $H_s = \rho_a c_{pm} C_u C_\Theta (T_s - T_\Theta) V$ ;  $E_s = \rho_a C_u C_\Theta M (q_{vs}(T_s) - q_{va}) V$ ;  $C_u, C_\Theta$  — коэффициенты обмена;  $T_s$  — температура поверхности;  $V = (v_a^2 + v_c^2)^{1/2}$  ( $v_c$  — конвективная скорость);  $\rho_a, v_a, T_a, q_{va}$  — значения метеозадающих элементов на первом расчетном уровне;  $q_{vs}(T_s)$  — насыщающее отношение смеси для водяного пара на поверхности при температуре  $T_s$ . Коэффициенты обмена и потоки в условиях (23) рассчитываются с помощью параметризационных моделей приземного слоя с учетом стратификации атмосферы и свойств подстилающей поверхности. Радиационный баланс тепла представляет сумму длинноволновой и коротковолновой радиации. Исходя из требований эффективности реализации модели величина  $R_n$  вычисляется в зависимости от состояния атмосферы в двух вариантах: для «ясного неба» без учета облачности и для облачного неба. В обоих вариантах предусматривается учет влияния загрязняющих примесей на радиационный баланс поверхности.

Вертикальное распределение притока тепла в атмосфере моделируется с учетом солнечной радиации и реализации скрытого тепла за счет фазовых превращений влаги. Модель для расчета радиационных потоков тепла основана на системе уравнений переноса излучения в двухпоточковом приближении Эддингтона [15]. Структура радиационного блока подробно описана в [10].

**Вариационная формулировка моделей.** Определим функционал основного тождества, представляющий вариационную формулировку модели атмосферы (7)–(16):

$$\begin{aligned}
 I_a(\varphi, \varphi^*) = & \sum_{i=1}^2 \left\{ \int_{D_{it}} \left[ \left( \frac{du}{dt} - F_u \right) u^* + \left( \frac{dv}{dt} - F_v \right) v^* + c_{pm} \left( \frac{dT}{dt} - F_T \right) T^* + l(u^*v - v^*u) + \right. \right. \\
 & + (u^* \text{grad} \Phi - u \text{grad} \Phi^*) - \frac{1}{\gamma_i} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \left( \frac{d_s^* \chi_i}{dt} - T^* \frac{d_s \chi_i}{dt} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} (T^* \dot{\sigma} - \dot{\sigma}^*) - c_p Q_T T^* + \\
 & + \frac{1}{\pi_i} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + \Phi^* \right) \frac{\partial \pi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{s+n_a} \frac{1}{\gamma_i} \left( \frac{\partial \pi_i \phi_j}{\partial t} + \tilde{L}(\pi_i \phi_j) - R_{\phi_j} - Q_{\phi_j} \right) \phi_j^* \varepsilon_j \left. \right\} \gamma_i dD_i dt + \\
 & + \int_{\Omega_{it}} u_n \Phi^* d\Omega_i dt \left. \right\} + \int_{D_{1t}} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{\partial p_T}{\partial t} dD_1 dt + \int_{D_{2t}} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial t} (p_B - \epsilon \pi_2) dD_2 dt = 0, \quad (26)
 \end{aligned}$$

где  $\varphi = (u, v, \dot{\sigma}, T, \Phi, \phi_j)$ ;  $\varphi^* = (u^*, v^*, \dot{\sigma}^*, T^*, \Phi^*, \phi_j^*)$ ;  $\{\phi_j\} \equiv \{q_k, k = \overline{1, 3}, c_i, i = \overline{1, n_a}\}$ ;  $u_n$  — нормальная составляющая вектора скорости  $u$  к границам области;

$$\frac{d_s^* \chi}{dt} \equiv \frac{\partial \chi}{\partial t} + m u^x \frac{\partial \chi}{\partial x} + n v^y \frac{\partial \chi}{\partial y};$$

$\varphi^*$  — вектор-функции с произвольными достаточно гладкими компонентами, принадлежащими пространству  $Q^*(D_t)$ .

Интегральное тождество для моделей озера (17)–(24) имеет вид

$$\begin{aligned}
 I_w(\varphi, \varphi^*) = & \int_{D_{4t}} \left\{ \left( \frac{du}{dt} - F_u \right) u^* + \left( \frac{dv}{dt} - F_v \right) v^* + \alpha \left( \frac{dw}{dt} - F_w \right) w^* + \frac{\alpha}{\gamma_4} \frac{\partial p}{\partial t} p^* + \right. \\
 & + l(u^*v - v^*u) + \frac{1}{\gamma_4} [(u^* \text{grad} p - u \text{grad} p^*) + g \rho w^*] + \\
 & + \sum_{j=1}^{2+n_w} \left( \frac{d\phi_j}{dt} - F_{\phi_j} - Q_{\phi_j} \right) \phi_j^* \varepsilon_j \left. \right\} \gamma_4 dD_4 dt + \int_{\Omega_{4t}} \rho u_n p^* d\Omega_4 dt = 0, \quad (27)
 \end{aligned}$$

где  $\varphi = (u, v, w, p, \phi_j)$ ;  $\varphi^* = (u^*, v^*, w^*, p^*, \phi_j^*)$ ;  $\{\phi_j\} \equiv \{T, S, c_i, i = \overline{1, n_w}\}$ ;  $u_n$  — нормальная составляющая вектора скорости к границе  $\bar{\Omega}$  области  $D_{4t}$ ;  $d\bar{\Omega}_i = \{dx dy/(mn), dy dz_i/n, dx dz_i/m\}$ ,  $i = \overline{1, 4}$ .

Интегральное тождество для модели теплообмена в почве запишем в виде

$$I_n(T, T^*) = \int_{D_{3t}} \left( \frac{\partial T}{\partial t} - F_T^n \right) T^* \varkappa \gamma_3 dD_3 dt. \quad (28)$$

Оператор  $F_T^n$  описывает процессы теплообмена в почве и имеет структуру, аналогичную (13), с масштабным множителем  $\gamma_3$ . Структура функционалов в (26)–(28) выбрана в соответствии с определением скалярного произведения (6) и уравнения баланса полной энергии системы.

Для системы в целом получаем

$$I(\varphi, \varphi^*) = I_a(\varphi, \varphi^*) + I_w(\varphi, \varphi^*) + I_n(\varphi, \varphi^*) = 0. \quad (29)$$

Все условия замыкания учитываются и контролируются через интегралы по границам соответствующих областей. Модели непосредственного взаимодействия сред входят в состав тождества (29) через интегралы по внутренним границам раздела. Их конкретные представления получают после преобразования с помощью интегрирования по частям выражений, содержащих операторы переноса и турбулентного обмена в предположении непрерывности соответствующих компонент функции  $\varphi^*$  и потоков функций состояния на границах раздела. Собирая все интегралы по поверхности  $S_t$  при  $\sigma = 1$  с учетом уравнений баланса тепла (25) и примесей на этой поверхности, получаем соотношения на потоки на границах атмосфера — вода и атмосфера — почва. Аналогичным образом из интегралов по границе  $\Omega_3$  между областями  $D_3$  и  $D_4$  получаем условия взаимодействия озера и континента.

*Функционалы для задач планирования и управления.* Исходя из целей исследований к тождествам (26)–(29) добавляется совокупность дифференцируемых по  $\varphi$  функционалов на  $Q(D_t)$  и для них формулируется ряд сопряженных и оптимизационных задач [4, 6].

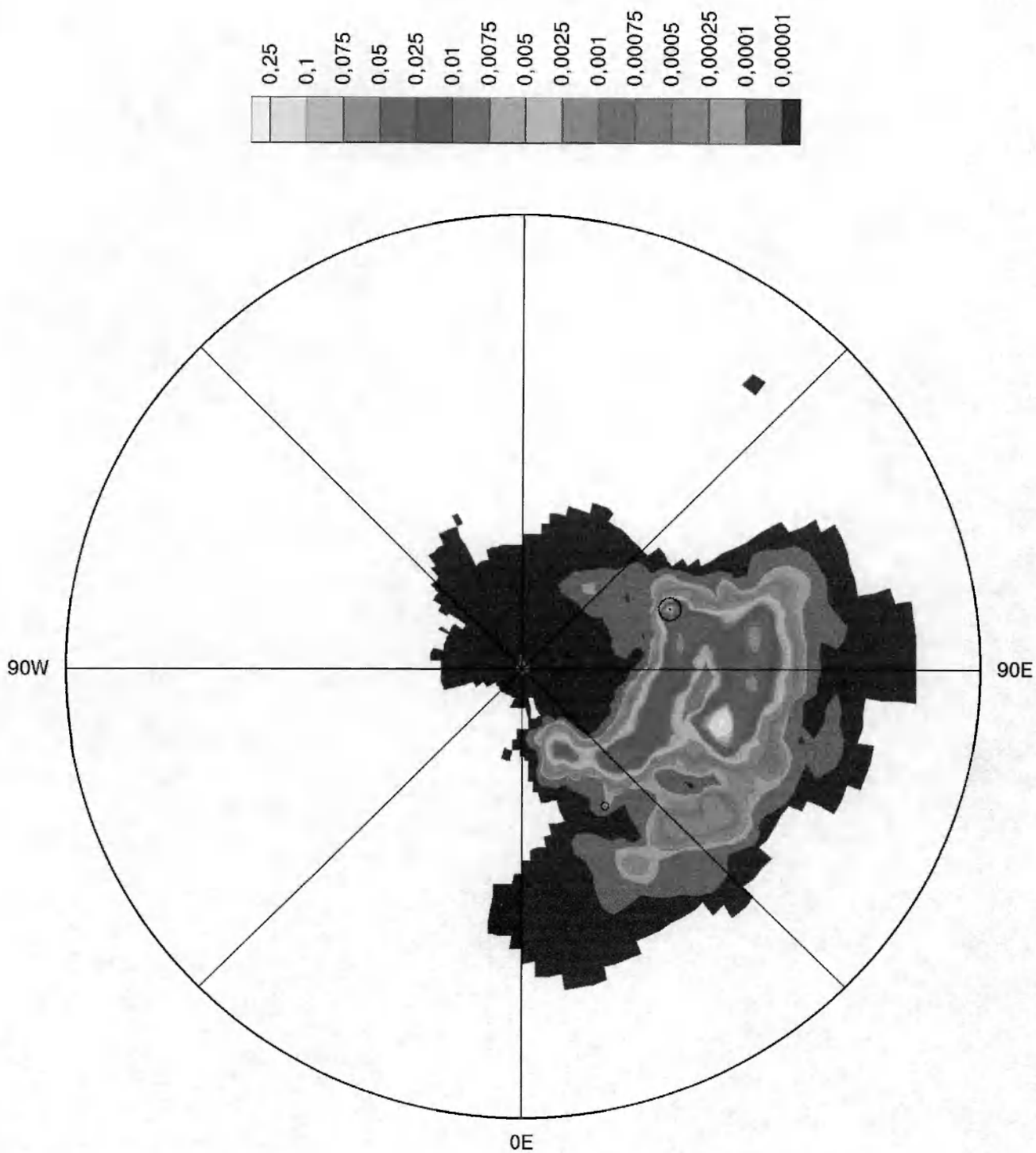
Функционалы определяются следующим образом:

$$\Phi_k(\varphi) = \int_{D_t} F_k(\varphi) \chi_k(\mathbf{x}, t) dD dt, \quad (30)$$

где  $F_k(\varphi)$  — некоторые заданные дифференцируемые функции от  $\varphi$ ;  $\chi_k(\mathbf{x}, t)$  — неотрицательные весовые функции, определенные в  $D_t$  или на дискретном множестве точек  $D_t^m \subset D_t$ , содержащем по крайней мере одну точку;  $\chi_k(\mathbf{x}, t) dD dt$  — соответствующие меры Радона или Дирака в  $D_t$ . Выделим функционалы следующих типов: обобщенного описания поведения системы; качества (характеризующие отклонения между вычисленными и измеренными значениями функций состояния); наблюдений; ограничений на функции состояния; целевые (для постановок оптимизационных задач планирования, управления и экологического проектирования). Формальная структура всех этих функционалов описывается выражениями вида (30) с заданием соответствующих функций  $F_k$ ,  $\chi_k$  и мер в области  $D_t$ . С помощью тождеств строятся дискретные аналоги основных и сопряженных уравнений в виде схем расщепления, а также формулы для расчета функций чувствительности к вариациям входных параметров и внешних воздействий и соотношений теории чувствительности для функционалов (30) с использованием базовых моделей по отдельности и для системы в целом. Техника таких построений и организация на их основе вычислительных алгоритмов прямого и обратного моделирования хорошо отработаны [1–9]. Ключевым элементом в них является основное соотношение теории чувствительности для функционалов вида (30)

$$\delta \Phi_k(\varphi) = (\text{grad}_{\mathbf{Y}} \Phi_k(\varphi), \delta \mathbf{Y}) \quad (31)$$





Функция относительного вклада загрязнений от источников, расположенных на поверхности Земли в Северном полушарии, в значение функционала наблюдений; период наблюдений 3-13/V 1986 г.; время действия источников 26/IV-5/V 1986 г.

и алгоритмы для их конструктивной реализации. Здесь  $\mathbf{Y}$  — вектор входных параметров модели и внешних воздействий;  $\delta\mathbf{Y}$  — вектор вариаций этих величин;  $\text{grad}_{\mathbf{Y}}\Phi_k$  — совокупность функций чувствительности.

*Численный эксперимент по оценке опасности загрязнения региона.* Комплекс моделей представляет собой открытую развиваемую систему для обеспечения исследований по климатозоологическому мониторингу и прогнозированию. По функциональному содержанию он имеет широкий спектр применений. В данной работе ограничимся одним примером расчета с помощью полусферной атмосферной модели, входящей в состав комплекса. Следуя выбранной концепции, рассматриваем проблему опасности загрязнения региона и озера от антропогенных источников Северного полушария Земли. В XX в. одним из наиболее опасных с точки зрения интенсивности и масштабов загрязнения природной среды событий в Северном полушарии является Чернобыльская катастрофа, приведшая к выбросу в атмосферу значительных количеств радиоактивных примесей. С помощью разработанной модели распространения и трансформации примесей в полусферном варианте здесь демонстрируется возможность оценки поступления загрязнений от удаленных источников на территорию Байкальского региона, а следовательно, и в озеро.

На рисунке приведена функция опасности загрязнения региона от источников примесей, работавших с 26 апреля по 5 мая 1986 г., т. е. в период интенсивного выброса радионуклидов от Чернобыльской АЭС (шкала дана в относительных единицах с нормировкой на максимальное значение функции в трехмерной области  $D$ ). Опишем информационное содержание этой функции в терминах (30), (31). Она представляет собой функцию чувствительности функционала наблюдений типа (30) к вариациям мощности источников при следующих условиях: функция  $F_k = \varphi$ , весовая функция  $\chi_k(\mathbf{x}, t)$  отлична от нуля только в узлах сеточной области, попадающих на акваторию Байкала, и в интервале времени, соответствующем периоду наблюдений с 3 по 13 мая 1986 г., т. е. функционал представляет собой оценку суммарного загрязнения, поступившего в выделенный район за указанное время. В силу линейности функционала наблюдений значения функции опасности в каждой точке области дают величину относительного вклада выброса от источника, расположенного в этой точке, в суммарное количество загрязнений, представленное значением функционала наблюдений при описанных выше условиях.

Для повышения достоверности оценок в расчетах использовалась не модельная, а фактическая информация об атмосферной циркуляции по данным Reanalysis NCEP/NCAR (США) [16] за апрель–май 1986 г. Для работы с этой информацией был создан специальный комплекс программ, включающий алгоритмы усвоения данных и «гидродинамической» интерполяции в заданных соответствующей базовой моделью режимах. В данном случае сеточная область содержала  $144 \times 39$  точек по горизонтальным координатам с размерами ячеек  $2,5 \times 2,5^\circ$  и 10 уровней по вертикали ( $p_T = 10$  мбар,  $p_B = 500$  мбар,  $\epsilon = 0,45$ ), из них 6 изобарических уровней в  $D_{1t}$  и 4  $\sigma$ -уровня в области  $D_{2t}$ . Районы размещения наблюдений и Чернобыля на рисунке обозначены кружками. При решении прямых и сопряженных задач переноса примесей шаги по времени выбирались автоматически из условий аппроксимации схем расщепления.

Анализ рассчитанной функции опасности приводит к выводу, что зона повышенной опасности (выделенная красным цветом) имеет достаточно сложную структуру. На Байкал поступают загрязнения не только с территории СНГ, но и с территорий Китая и Монголии. Заметно, что в мае еще достаточно сильно работает западно-восточный перенос, и в то же время начинает усиливаться влияние летнего Восточно-Азиатского циклогенеза, что приводит к увеличению опасности загрязнения озера трансграничными переносами из стран Азии. Рисунок наглядно демонстрирует также масштабы взаимодействий в климатической системе и возможности районирования территорий по уровням опасности

антропогенного влияния. Даже через относительно короткий промежуток времени можно получить отклик на события, происшедшие за тысячи километров от места наблюдений. Функция опасности показывает, что в период 3–13 мая следы Чернобыльской катастрофы могли быть найдены в регионе озера Байкал. Таким образом, расчеты подтверждают одно из основных положений концепции: для описания взаимодействия озера Байкал с атмосферой региона необходимо использовать глобальную систему информации или модель глобального масштаба.

**Заключение.** По совокупности естественных и антропогенных факторов климатическая система атмосфера региона — озеро Байкал уникальна, и для описания происходящих в ней процессов строится специальный комплекс моделей различных пространственно-временных масштабов с переменной развиваемой структурой. Предлагаемые нами концепция и методология моделирования для решения исследовательских и прикладных задач климатозоологического направления основаны на идеях совместного использования результатов натуральных исследований и математических моделей. Конструктивно она реализуется методами прямого и обратного моделирования, которые организуются на базе вариационного принципа и оптимизации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пененко В. В., Алоян А. Е., Бажин Н. М. и др. Оценка антропогенного влияния на регион озера Байкал с помощью численного моделирования // Метеорология и гидрология. 1989. № 7. С. 78–84.
2. Пененко В. В. Методы численного моделирования атмосферных процессов. Л.: Гидрометеоиздат, 1981.
3. Пененко В. В., Алоян А. Е. Модели и методы для задач охраны окружающей среды. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
4. Penenko V. V., Tsvetova E. A. The adjoint problem and sensitivity algorithms for modeling of atmospheric hydrodynamics in sigma-coordinates // Bull. NCC. Num. Model. Atmosph. 1995. Iss. 2. P. 53–74.
5. Penenko V. V. Numerical methods of model quality estimations and assimilation of observations // Bull. NCC. Num. Model. Atmosph. 1993. Iss. 1. P. 69–90.
6. Penenko V. V. Some aspects of mathematical modeling using the models together with observational data // Bull. NCC. Num. Model. Atmosph. 1996. Iss. 4. P. 32–51.
7. Цветова Е. А. Математическое моделирование циркуляции вод озера Байкал. Течения в Байкале. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1977.
8. Цветова Е. А. Численная модель динамики и термического режима озера Байкал // Математические модели циркуляции в океане / Под ред. Г. И. Марчука, А. С. Саркисяна. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980. С. 256–272.
9. Пененко В. В., Цветова Е. А., Скубневская Г. И. и др. Численное моделирование химической кинетики и переноса загрязняющих примесей в атмосфере промышленных регионов // Химия в интересах устойчивого развития. 1997. Т. 5, № 5. С. 505–510.
10. Пененко В. В., Курбацкая Л. И. Исследование динамики «острова тепла» с учетом взаимодействия радиационных процессов с аэрозолями // Оптика атмосферы и океана. 1998. № 6. С. 581–585.
11. Овсянников Л. В. Уравнения динамической конвекции моря / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. Препр. Новосибирск, 1967.
12. Pielke R. A. Mesoscale Meteorological Modeling. N. Y.: Acad. Press, 1984.
13. Методы расчета турбулентных течений / Под ред. В. Кольмана. М.: Мир, 1984.

14. **Langland R. H., Liou C.** Implementation of an ( $E - \epsilon$ )-parameterization of vertical sugrid-scale mixing in a regional model // *Month. Weather Review*. 1996. V. 124, N 5. P. 905–918.
15. **Geleyn J. F., Hollingworth A.** An economical analytical method for the computation of the interaction between scattering and line absorbtion of radiation // *Beitr. Phys. Atmosph.* 1979. V. 52, N 1. P. 1–16.
16. **Kalnay E., Kanamitsu M., Kisler R., et al.** The NCEP/NCAR 40-year reanalysis project // *Bull. Amer. Meteorol. Soc.* 1996. V. 77. P. 437–471.

*Поступила в редакцию 29/VI 1998 г.*

---