

**К УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТОЙ ПО ОСИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
ПРИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ**

Г. В. Иванов (*Новосибирск*)

Рассматривается осесимметричная форма потери устойчивости сжатой по оси цилиндрической оболочки. Критические напряжения определяются по критерию [1] с тем ограничением, что при переходе из основного состояния в соседнее не допускаются возмущения, вызывающие разгрузку. Материал предполагается несжимаемым, упрочнение — линейным. Критические напряжения, найденные по теории пластического течения, несколько меньше, но весьма близки к критическим и по критерию [1], и по критерию Шенли [2] напряжениям, найденным по теории малых упруго-пластических деформаций, т. е. в этой задаче, как и в ранее рассмотренных задачах об устойчивости пластин [1, 3], при использовании критерием [1] не возникает известного парадокса, встречающегося при пользовании критерием Шенли.

Указывается на ошибочность содержащегося в работе Ли [4] решения по теории пластического течения задачи о неосесимметричной форме потери устойчивости сжатой по оси цилиндрической оболочки с учетом начальных «неправильностей» формы оболочки и в связи с этим на необоснованность содержащегося в работе [4] вывода, что в этой задаче учет начальных «неправильностей» не позволяет избежать парадокса.

1. Предполагается, что при деформировании оболочки в основном состоянии имеет место одноосное сжатие

$$\sigma_x = -\sigma_0, \quad \varphi_0 = \frac{P}{2\pi Rh} > 0, \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь P — сжимающая оболочку осевая сила, R — радиус, h — толщина оболочки, ось координат x направлена по образующей, оси координат y, z — соответственно по касательной к срединной поверхности и по внутренней нормали к ней так, что образуют ортогональную систему координат.

Соответствующие силе P напряжения, деформации, смещения при отклонениях от основного состояния характеризуются разностями между этими напряжениями, деформациями, смещениями и, соответствующими той же величине силы P , напряжениями, деформациями, смещениями в основном состоянии. Эти разности называются дополнительными напряжениями, дополнительными деформациями, дополнительными смещениями.

Рассматриваются только сколь угодно малые осесимметричные отклонения от основного состояния. В этом случае

$$\sigma_x = -\sigma_0 + \sigma_x^\times, \quad \varphi_y = \sigma_y^\times, \quad \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_x^\times = e_1 - z\kappa_1, \quad \varepsilon_y^\times = e_2 = -\frac{w}{R}, \quad \kappa_1 = \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (1.3)$$

В (1.2), (1.3) косым крестом отмечены дополнительные напряжения, дополнительные деформации, w — дополнительные смещения по оси z , e_1, e_2 — дополнительные деформации срединной поверхности. Все эти величины при сколь угодно малых отклонениях от основного состояния сколь угодно малы. Это принимается за определение сколь угодно малых отклонений.

Если при отклонениях от основного состояния оболочка находится в равновесии только под действием осевой силы P , то из определения дополнительных напряжений и уравнений равновесия следует, что

$$N_x^\times = \int \sigma_x^\times dz = \text{const} = 0 \quad (1.4)$$

(интегрирование проводится в пределах от $-h/2$ до $+h/2$), усилие же N_y^\times и изгибающий момент M^\times

$$N_y^\times = \int \sigma_y^\times dz, \quad M^\times = \int \sigma_x^\times zdz \quad (1.5)$$

связаны уравнением

$$\frac{d^2}{dx^2} M^\times - \sigma_0 h \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{R} N_y^\times = 0 \quad (1.6)$$

Соседним равновесным состоянием называется отличное от основного состояния равновесие оболочки при действии только силы P . В постановке Шенли [2] (во всяком случае возможна такая ее интерпретация) и в постановке [1] допускается возможность перехода из основного состояния в соседнее равновесное состояние под действием возмущений типа поверхностных сил при изменении внешней сжимающей силы со значением $P - a, a \geq 0$, до значения P . В постановке Шенли a — нуль, либо сколь угодно малая величина, в постановке [1] величина a — любая из промежутка $[0, P]$. Ниже при решении в постановке [1] рассматриваются только такие переходы из основного

состояния в соседнее равновесное состояние, при которых нигде в оболочке разгрузки не происходит. При этом условии связь между дополнительными напряжениями и дополнительными деформациями описывается уравнениями теории пластичности, соответствующими только процессу активного нагружения, что существенно упрощает исследование.

2. Из (1.1) и уравнений теории пластического течения с упрочнением [2] следует, что в основном состоянии

$$d\epsilon_x^{\circ} = -\frac{1}{E'} d\sigma_0, \quad d\epsilon_y^{\circ} = d\epsilon_z^{\circ} = \frac{1}{2} \left(-K + \frac{1}{E'} \right) d\sigma_0, \quad K = \frac{1-2\nu}{E} \quad (2.1)$$

Здесь E' — соответствующий напряжению σ_0 касательный модуль диаграммы одноосного сжатия, ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга.

Подставляя (1.2) в уравнения теории пластического течения с упрочнением [2], сохраняя в них сколь угодно малые величины только первого порядка и вычитая уравнения (2.1), находим уравнения связи между дополнительными напряжениями и дополнительными деформациями

$$\begin{aligned} d\epsilon_x^{\times} &= \frac{1}{E} (d\sigma_x^{\times} - \nu d\sigma_y^{\times}) + \frac{2}{3} d \left[F(T_0) T_0 \left(\sigma_x^{\times} - \frac{1}{2} \sigma_y^{\times} \right) \right] \\ d\epsilon_y^{\times} &= \frac{1}{E} (d\sigma_y^{\times} - \nu d\sigma_x^{\times}) - \frac{1}{3} d \left[F(T_0) T_0 \left(\sigma_x^{\times} - \frac{1}{2} \sigma_y^{\times} \right) \right] + \frac{1}{2} F(T_0) dT_0 \sigma_y^{\times} \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$F(T_0) = \frac{3}{2T_0} \left(\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} \right), \quad T_0 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}, \quad E' \neq 0$$

Уравнения (2.2) — дифференциальные. Поэтому связь дополнительных напряжений и дополнительных деформаций в соседнем равновесном состоянии при величине P осевой силы (чему соответствует некоторое значение T_0 , именно, $T_0 = P / 2\pi Rh \sqrt{3}$) существенно зависит от величины промежутка $[P - \alpha, P]$ (соответственно, промежутка $[T_0 - \alpha_1, T_0]$, $T_0 - \alpha_1 = (P - \alpha) / 2\pi Rh \sqrt{3}$) и пути перехода на этом промежутке из основного состояния в соседнее равновесное состояние. В связи с этим критические напряжения в постановке Шенли и в постановке [1] различны. Ниже величина осевой силы P характеризуется величиной T_0 — соответствующей этой силе P интенсивностью касательных напряжений в основном состоянии.

В постановке Шенли допускается возможность перехода из основного состояния в соседнее равновесное состояние под действием возмущений типа поверхностных сил только при бесконечно малом (в том числе нулевом) изменении осевой силы, т. е. на промежутке $[T_0 - \alpha_1, T_0]$, где α_1 — нуль, либо сколь угодно малая величина. В этом случае интеграл

$$\int_{T_0 - \alpha_1}^{T_0} F(T_0) \sigma_y^{\times} dT_0$$

сколь угодно малая величина второго порядка. Учитывая это и условие, что дополнительные напряжения и дополнительные деформации равны нулю (оболочка находится в основном состоянии) при интенсивности $T_0 - \alpha_1$, из уравнений (2.2) находим, что дополнительные напряжения и дополнительные деформации в соседнем равновесном состоянии, соответствующем интенсивности T_0 , связаны уравнениями

$$\begin{aligned} \epsilon_x^{\times} &= \frac{1}{E} (\sigma_x^{\times} - \nu \sigma_y^{\times}) + \frac{2}{3} F(T_0) T_0 \left(\sigma_x^{\times} - \frac{1}{2} \sigma_y^{\times} \right) \\ \epsilon_y^{\times} &= \frac{1}{E} (\sigma_y^{\times} - \nu \sigma_x^{\times}) - \frac{1}{3} F(T_0) T_0 \left(\sigma_x^{\times} - \frac{1}{2} \sigma_y^{\times} \right) \end{aligned}$$

т. е. уравнениями, обычно используемыми при решении в постановке Шенли.

В постановке [1] допускается возможность перехода из основного состояния в соседнее равновесное состояние под действием возмущений типа поверхностных сил при любом изменении осевой силы, т. е. на промежутке $[T_0 - \alpha_1, T_0]$, где α_1 — любое из промежутка $[0, T_0]$. Если ограничиться случаем несжимаемого материала ($\nu = 1/2$), то уравнения (2.2) принимают вид

$$\begin{aligned} d\epsilon_x^{\times} &= d \left[\frac{1}{E'} \left(\sigma_x^{\times} - \frac{1}{2} \sigma_y^{\times} \right) \right] \\ 2G(d\epsilon_x^{\times} + 2d\epsilon_y^{\times}) &= d\sigma_y^{\times} + 2GF(T_0) dT_0 \sigma_y^{\times} \quad \left(G = \frac{1}{3} E \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

и легко интегрируются и на конечном промежутке $[T_0 - \alpha_1, T_0]$. При помощи (1.3) — (1.5) переходим в (2.3) к величинам $M^{\times}, N_y^{\times}, \alpha_1, \epsilon_2$. Интегрируя полученные уравнения на промежутке $[\tau_s, T_0]$, τ_s — предел текучести при сдвиге, находим, что

в случае линейного упрочнения ($E'(\xi) = \text{const}$, $\xi \in [\tau_s, T_0]$)

$$\begin{aligned} M^\times &= -\left(D^\times + \frac{1}{12} E'h^3\right)x_1, \quad D^\times = \frac{Eh^3}{36x_1(T_0)\varphi(T_0)} \left[x_1(\tau_s) + \int_{\tau_s}^{T_0} \varphi(\tau) \frac{dx_1}{d\tau} d\tau \right] \\ N_y^\times &= B^\times e_2, \quad B^\times = \frac{4E'h}{(1+3g)e_2(T_0)f(T_0)} \left[e_2(\tau_s) + \int_{\tau_s}^{T_0} f(\tau) \frac{de_2}{d\tau} d\tau \right] \\ \varphi(T_0) &= \exp \left(2G \int_{\tau_s}^{T_0} F(T_0) dT_0 \right) = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_s} \right)^{\frac{1-g}{g}} \quad \left(g = \frac{E'}{E}, \quad \sigma_s = \sqrt{3} \tau_s \right) \\ f(T_0) &= \exp \left[2 \left(\frac{1}{E'} + \frac{3}{E} \right)^{-1} \int_{\tau_s}^{T_0} F(T_0) dT_0 \right] = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_s} \right)^{\frac{3(1-g)}{1+3g}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Нетрудно доказать тем же способом, каким доказывается аналогичное утверждение в работе [1], что функционалы D^\times, B^\times в классе кусочно непрерывных с кусочно непрерывными производными функций

$$x_1(\xi), \quad e_2(\xi), \quad \xi \in [\tau_s, T_0]$$

удовлетворяющих при $\xi \in [\tau_s, T_0]$ какому-либо из неравенств

$$\begin{aligned} x_1(T_0) &> 0, & x_1(T_0) &\geq x_1(\xi), & x_1(T_0) &< 0, & x_1(T_0) &\leq x_1(\xi) \\ e_2(T_0) &> 0, & e_2(T_0) &\geq e_2(\xi), & e_2(T_0) &< 0, & e_2(T_0) &\leq e_2(\xi) \end{aligned} \quad (2.5)$$

достигают минимума при

$$x_1(\xi) = \text{const}, \quad e_2(\xi) = \text{const}, \quad \xi \in [\tau_s, T_0]$$

т. е. имеют место неравенства

$$D^\times \geq \frac{Eh^3}{36\varphi(T_0)} = D^{\times\times}(T_0), \quad B^\times \geq \frac{4E'h}{(1+3g)f(T_0)} = B^{\times\times}(T_0) \quad (2.6)$$

Умножая уравнение (1.6) на w , интегрируя по частям, находим

$$\sigma_0 h = - \left[\int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \right]^{-1} \int_0^L \left(M^\times \frac{d^2 w}{dx^2} + N_y^\times \frac{w}{R} \right) dx \quad (2.7)$$

где L — длина оболочки. Подставляем (2.4) в (2.7)

$$\sigma_0 h = \left[\int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \right]^{-1} \int_0^L \left[\left(D^\times + \frac{1}{12} E'h^3 \right) \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 + B^\times \left(\frac{w}{R} \right)^2 \right] dx$$

За критическое напряжение, обозначим его через σ_k , принимаем

$$\sigma_k h = \min \left[\int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \right]^{-1} \int_0^L \left[\left(D^\times + \frac{1}{12} E'h^3 \right) \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 + B^\times \left(\frac{w}{R} \right)^2 \right] dx$$

минимум ищется в классе функций w , удовлетворяющих соответствующим граничным условиям и неравенствам (2.5).

Ввиду неравенств (2.6) задача сводится к отысканию минимума функционала

$$\left[\int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \right]^{-1} \int_0^L \left[\left(D^{\times\times} + \frac{1}{12} E'h^3 \right) \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 + B^{\times\times} \left(\frac{w}{R} \right)^2 \right] dx$$

в классе функций w , удовлетворяющих соответствующим граничным условиям, либо, что эквивалентно, к отысканию наименьшего значения σ_0 , при котором уравнение

$$\left(D^{\times\times} + \frac{1}{12} E'h^3 \right) \frac{d^4 w}{dx^4} + \sigma_0 h \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{R^2} B^{\times\times} w = 0$$

имеет ненулевое решение при соответствующих граничных условиях.

Полагая, что $w = A \sin(\pi x / l)$, где l — длина полуволны в направлении обра-
зующей, находим

$$\sigma_k h = \min \left[(D^{\times \times} + \frac{1}{12} E' h^3) \frac{\pi^2}{l^2} + \frac{1}{R^2} B^{\times \times} \frac{1}{\pi^2 / l^2} \right] \quad (2.8)$$

Здесь \min означает минимум выражения в квадратной скобке как функции l при
условии, что $l \leq L$ и $\sigma_k \geq \sigma_s$, σ_s — предел текучести при сжатии. Из (2.8) следует:

1) если $\frac{2}{3} \sqrt{E'E} \frac{h}{R} \geq \sigma_s$, то

$$\sigma_k = \frac{2}{3} \sqrt{E'E} \frac{h}{R} \left(\frac{g [1 + 3g\varphi(T_k)]}{(1 + 3g)\varphi(T_k)f(T_k)} \right)^{1/2} \quad \left(T_k = \frac{\sigma_k}{\sqrt{3}} \right) \quad (2.9)$$

Здесь l определяется формулой

$$l = \pi \left(\frac{1}{144\varphi(T_k)g} (1 + 3g)(1 + 3g\varphi(T_k)) f(T_k) R^2 h^2 \right)^{1/4} \quad (2.10)$$

2) если же $\frac{2}{3} \sqrt{E'E} \frac{h}{R} < \sigma_s$, то

$$\sigma_k = \sigma_s$$

Здесь l определяется уравнением

$$\sigma_s h = \left[D^{\times \times}(\tau_s) + \frac{1}{12} E' h^3 \right] \frac{\pi^2}{l^2} + \frac{1}{R^2} B^{\times \times}(\tau_s) \frac{1}{\pi^2 / l^2}$$

т. е. уравнением

$$\sigma_s = \frac{1}{36} E (1 + 3g) h^2 \frac{\pi^2}{l^2} + \frac{4E'}{(1 + 3g) R^2} \frac{1}{\pi^2 / l^2} \quad (2.11)$$

В случае, когда l из (2.10) или (2.11) больше L — длины оболочки, σ_k находится из уравнения

$$\sigma_k h = \left[D^{\times \times}(T_k) + \frac{1}{12} E' h^3 \right] \frac{\pi^2}{L^2} + \frac{1}{R^2} B^{\times \times}(T_k) \frac{1}{\pi^2 / L^2} \quad (2.12)$$

При отсутствии упрочнения (на площадке текучести) условие устойчивости оболочки в смысле сохранения ею цилиндрической формы можно получить из (2.11), (2.12) предельным переходом при $E' \rightarrow 0$. Именно, оболочка сохраняет цилиндрическую форму, если

$$\sigma_s < \frac{1}{36} E \left(\frac{\pi h}{L} \right)^2 \quad (2.13)$$

Если неравенство (2.13) не выполнено, цилиндрическая форма неустойчива, об разуются выпучины, при этом l определяется равенством $\sigma_s = 1/36 E (\pi h / L)^2$.

Заметим, что условие (2.13) то же, что и в случае цилиндрической формы потери устойчивости пластиинки на площадке текучести.

3. По теории малых упруго-пластических деформаций связь между дополнительными напряжениями и дополнительными деформациями одна и та же независимо от промежутка $[P - \alpha, P]$ и пути перехода на этом промежутке из основного состояния в соседнее равновесное состояние при условии, что разгрузки в процессе перехода не возникает. Поэтому и в постановке Шенли и в постановке [1] критические напряжения по теории малых упруго-пластических деформаций одни и те же. Эти критические напряжения в случае сжатой по оси достаточно толстой цилиндрической оболочки удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными [4, 5].

При линейном упрочнении и условии несжимаемости материала критическое напряжение по теории малых упруго-пластических деформаций σ_* , критическое в постановке Шенли напряжение по теории пластического течения σ^* , а также соответствующие им длины полуволн — l определяются уравнениями [6-8]

$$\sigma_* = \frac{2}{3} \sqrt{E'E_c(\sigma_*)} \frac{h}{R}, \quad \sigma^* = \frac{2}{3} \sqrt{E'E} \frac{h}{R} \quad (3.1)$$

$$l = \pi \left(\frac{1 + 3E'/E_c(\sigma_*)}{12 \sqrt{E'E_c(\sigma_*)}} Rh \right)^{1/2}, \quad l = \pi \left(\frac{1 + 3g}{12 \sqrt{g}} Rh \right)^{1/2} \quad (3.2)$$

где $E_c(\sigma_*)$ — соответствующий напряжению σ_* секущий модуль диаграммы одноосного сжатия. По-прежнему, если $\frac{2}{3} \sqrt{E'E} h/R < \sigma_s$, то $\sigma_* = \sigma^* = \sigma_s$, а l находится

из уравнения (2.11). Если l из (3.2) или (2.11) больше L , то σ_* и σ^* определяются уравнениями

$$\begin{aligned}\sigma_* &= \frac{1}{36} \left(1 + 3 \frac{E'}{E_c(\sigma_*)} \right) E_c(\sigma_*) h^2 \frac{\pi^2}{L^2} + \frac{4E'}{[1 + 3E'/E_c(\sigma_*)] R^2} \frac{1}{\pi^2/L^2} \\ \sigma^* &= \frac{1}{36} (1+3g) \frac{Eh^2\pi^2}{L^2} + \frac{4E'}{(1+3g) R^2} \frac{1}{\pi^2/L^2}\end{aligned}$$

При отсутствии упрочнения (на площадке текучести) условие сохранения цилиндрической формы оболочки по теории малых упруго-пластических деформаций будет

$$\sigma_s < \frac{1}{36} E_c \left(\frac{\pi h}{L} \right)^2$$

а по теории пластического течения — условие (2.13). Сравнивая критические напряжения σ_k , σ_* , σ^* , удобно представить уравнения (2.9), (3.1) в виде

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_g}{\sigma_s} &= \left(\frac{\sigma_k}{\sigma_s} \right)^{\frac{5+3g}{2(1+3g)}} \left\{ \left(3 + \frac{1}{g} \right) \left[3g + \left(\frac{\sigma_k}{\sigma_s} \right)^{\frac{g-1}{g}} \right]^{-1} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\sigma_g}{\sigma_s} &= \frac{1}{g} \left[\frac{\sigma_*}{\sigma_s} \left(\frac{\sigma_*}{\sigma_s} - 1 + g \right) \right], \quad \frac{\sigma_g}{\sigma_s} = \frac{1}{V^g} \frac{\sigma^*}{\sigma_s}\end{aligned}\quad (3.3)$$

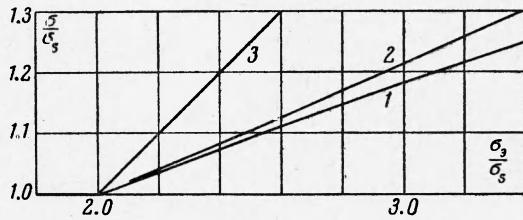
Здесь σ_g — критическое напряжение при упругих деформациях, $\sigma_g = \sqrt[3]{3} Eh/R$. Сравнение условий (3.3) для случая $g = 1/4$ приведено на фигуре. Кривые 1, 2 соответствуют первым двум из этих условий (3.3), прямая 3 — последнему условию. Из фигуры видно, что критические в смысле критерия [1] напряжения по теории пластического течения несколько меньше, но весьма близки к критическим напряжениям по теории малых упруго-пластических деформаций (на фигуре кривые 1 и 2 соответственно), т. е. при использовании критерием [1] не возникает парадокса, встречающегося при использовании критерием Шенли [2].

4. Постановка [1] представляет собой не более чем схему реального явления, имеющую

целью более полно, чем в схеме, принятой в постановке Шенли, отразить влияние на деформирование пластин и оболочек начальных «неправильностей» формы пластин и оболочек. Поэтому отсутствие парадокса при решении в постановке [1] позволяет надеяться, что при решении с учетом непосредственно начальных «неправильностей» формы пластин и оболочек парадокса не возникает не только в задаче о крутильной потере устойчивости пластины, что показано Е. Онатом и Д. Дракером [9], но и в других задачах устойчивости пластин и оболочек.

Решения по теории пластического течения задач с учетом начальных «неправильностей» формы очень трудны. Трудность состоит в необходимости использовать полные (нелинейаризованные) уравнения теории пластического течения (см. уравнения (2), (3) в работе [9]), вообще говоря, интегрировать их на промежутке, соответствующем промежутку изменения нагрузки от значения, когда возникают пластические деформации, до критического значения. Линеаризация уравнений теории пластического течения (использование уравнений типа уравнений (2.2)), по-видимому, недопустима, так как, например, в задаче о крутильной потере устойчивости пластинки она приводит к некоторому «выпрямлению» кривой нагрузки — угол закручивания, из-за чего теряется определяющий критическую нагрузку максимум этой кривой.

В работе [4] была предпринята попытка решить с учетом начальных «неправильностей» формы оболочки задачу о неосесимметричной форме потери устойчивости сжатой по оси цилиндрической оболочки. При решении по теории пластического течения зависимость между моментами, кривизнами и кручением, а также между усилиями и деформациями срединной поверхности определялась не интегрированием уравнений теории пластического течения на промежутке, соответствующем промежутку изменения нагрузки от значения, когда возникают пластические деформации, до критического значения, а принималась такой же, как при решении в постановке Шенли, что, конечно, недопустимо. Именно поэтому полученное в [4] решение по теории пластического течения оказалось близким к решению по теории пластического течения этой же задачи



Фиг. 1

в постановке Шенли. Таким образом, вывод в работе [4], что учет начальных «неправильностей» не позволяет избежать парадокса в задаче о неосимметричной форме потери устойчивости сжатой по оси цилиндрической оболочки, основан на ошибочном решении.

Поступила 9 II 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов Г. В. Об устойчивости равновесия при неупругих деформациях. ПМТФ, 1961, № 1.
2. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. Гостехиздат, 1956.
3. Иванов Г. В. К устойчивости равновесия пластин по теории пластического течения. ПМТФ, 1963, № 2.
4. Lee L. H. N. Inelastic Buckling of Initially Imperfect Cylindrical Shells Subject to Axial Compression. Journal of the Aerospace Sciences, 1962, vol. 29, No. 1.
5. Божинский А. Н., Вольмир А. С. Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических оболочек за пределом упругости. ДАН СССР, 1962, т. 142, № 2.
6. Gergard G. Plastic Stability Theory of Thin Shells. Journal of the Aeronaut. Sciences, 1957, vol. 24, No. 4.
7. Григорюк Э. И. Об учете сжимаемости при определении нижних критических нагрузок (по поводу статьи Джерарда). Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 5.
8. Григорюк Э. И. Чисто пластическая потеря устойчивости тонких оболочек. ПММ, 1957, вып. 6.
9. Онат Е., Дракер Д. Неупругая потеря устойчивости и теории течения. Сб. пер. «Механика», 1955, № 3.

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ДИАГРАММЫ СЖАТИЯ МАЛОУГЛЕРОДИСТОЙ СТАЛИ В ОБЛАСТИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Ю. С. Степанов (Москва)

Рассматривается упрощенная схема расчета диаграммы сжатия твердых тел выше их динамического предела упругости на примере малоуглеродистой стали. Расчет проверен прямым измерением кинематических параметров в проходящей волне сжатия.

Обозначения

v — скорость удара,	μ — модуль сдвига,
w — скорость свободной поверхности,	ρ — плотность среды,
σ — напряжение,	T — температура,
ε — деформация,	p — давление,
x — ось удара,	V — объем,
u — массовая скорость,	c_V — теплопемкость при постоянном объеме,
a — волновая скорость,	E — кинетическая энергия,
L_0 — первоначальная длина бойка,	U — энергия деформации,
l_0 — первоначальная длина пластины,	m — масса,
d — первоначальный диаметр бойка	α, β, γ — коэффициенты в уравнении (1.7) ($\gamma = 1.4$ в уравнении (2.1) и $\beta = 8.4$ в уравнении (3.1)),
и пластины,	A — коэффициент в уравнении (3.1).
S — первоначальная площадь поперечного сечения бойка и пластины,	
K — модуль всестороннего сжатия,	

§ 1. Рассмотрим плоское соосное соударение цилиндрических бойка и пластины одного и того же диаметра d из одинакового материала, причем пластина до удара находится в покое, а $L_0 > d \gg l_0$, где L_0 и l_0 — первоначальные длины бойка и пластины.

Предположим, что нарастание напряжений и деформаций после соударения можно заменить одной волной с постоянными параметрами за фронтом, а общую зону нагружения в бойке и пластины можно представить состоящей из зоны упругих и зоны упруго-пластических деформаций, отделенных от ненагруженной части среды и друг от друга поверхностью сильного разрыва. Будем пренебречь боковой разгрузкой и поперечными деформациями, считая нагружение одноосным (ось x — ось удара).

Рассмотрим систему боек — пластина в момент времени, когда передний фронт упругой волны сжатия в пластине вышел на ее тыльную поверхность. Учитывая сделанные предположения, получим распределение напряжений σ и массовых скоростей u по направлению удара x в бойке и пластины, изображенное на фиг. 1. Индекс 0 в дальнейшем будем относить к параметрам в ненагруженной зоне, 1 — к параметрам в зоне упругого сжатия, 2 — пластического.