

фиг. 4 ( $m = 2$ , кривые 1—5 соответствуют  $t = 0; 1; 2; 10; \infty$ ). Следует отметить, что асимптотическое разложение для  $\varphi(x, t)$  (4.2), построенное при достаточно малом времени, стыкуется с соответствующим асимптотическим разложением (4.7), построенным для достаточно больших значений  $t$ , в случае  $m = 1,5$  при  $T \approx 8$ ,  $m = 2$  при  $T \approx 8,5$ . Кроме того, численный анализ поставленной задачи показал, что при  $m = 1,5$  и  $m = 2$  и одинаковых значениях  $x$  и  $t$  величины  $\varphi(x, t)$  отличаются друг от друга не более чем на 5—6%.

Для определения постоянной  $\gamma_0$  в формуле (4.6) воспользуемся, как было замечено выше, условием  $\gamma_+(T) = \gamma_-(T)$ . Будем иметь соответственно при  $m = 1,5$  и  $m = 2$   $\gamma_0 = 1,483$ ,  $\gamma_0 = 1,577$ . На фиг. 5 приведен закон распределения  $\gamma(t)$  в зависимости от  $t$  при  $m = 1,5$  и 2 (кривые 1, 2 соответственно). Заметим, что эта зависимость носит почти линейный характер. Кроме того, осадка под штампом будет тем больше при прочих равных факторах, чем меньше показатель нелинейности  $m$ .

Поступила 13 I 1982

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960.
2. Сумбатьян М. А. Плоская задача для тонкого слоя в условиях установившейся нелинейной ползучести. — Изв. АН АрмССР. Механика, 1980, т. 33, № 1.
3. Александров В. М., Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы механики ледяного покрова. — В кн.: Современные проблемы механики и авиации. М.: Машиностроение, 1981.
4. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974.
5. Коваленко Е. В. Об эффективном методе решения контактных задач для линейно-деформируемого основания с тонким усиливающим покрытием. — Изв. АН АрмССР. Механика, 1979, т. 32, № 2.
6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
7. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976.

УДК 539.3

### ЧИСЛЕННО-АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПРОЧНОСТИ И КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ I

С. В. Степаненко

(Новосибирск)

Для тонких оболочек вращения, срединная поверхность которых имеет неотрицательную гауссову кривизну, строится численно-аналитическое приближенное решение класса линейных краевых задач, допускающих разделение переменных.

Известно, что решение каждой такой задачи расщепляется на медленно меняющуюся часть и решения типа краевого эффекта. На основе этого в [1, 2] предложен способ построения приближенного решения задачи, причем медленно меняющуюся часть решения предлагается отыскивать численным методом, а краевые эффекты — асимптотическим. В данной работе на основе этого способа построен алгоритм, который за счет использования метода исключения в краевых условиях [3] может быть применен в более широком по сравнению с [1] классе задач. В качестве иллюстрации метода приведены решения ряда задач прочности и колебаний для оболочек различной геометрии.

1. Многие задачи прочности и колебаний упругих оболочек вращения сводятся к отысканию решений частного вида

$$(1.1) \quad \begin{aligned} u_{\sigma}^{mn} &= \exp(i\omega_m t + inx_2) U_{\sigma}^{mn}(x_1), \\ w^{mn} &= \exp(i\omega_m t + inx_2) W^{mn}(x_1). \end{aligned}$$

Здесь  $t$  — время;  $x_1, x_2$  — ортогональные координаты срединной поверхности оболочки;  $i = \sqrt{-1}$ ;  $\omega_m$  — действительное, а  $m$  и  $n$  — целые числа, индекс  $\sigma$  пробегает значения 1 и 2;  $u_1, u_2, w$  — перемещения в направ-

лениях  $x_1, x_2$  и по внешней нормали. Для описания решений вида (1.1) с  $n \geq 4$  можно применить разработанный аппарат теории пологих оболочек [4]. При отсутствии тангенциальных составляющих поверхностных сил вводится функция усилий  $\varphi(x_1, x_2, t)$ . В силу (1.1) будем иметь

$$(1.2) \quad \varphi^{mn}(x_1, x_2, t) = \exp(i\omega_m t + inx_2)\Phi^{mn}(x_1).$$

Система разрешающих уравнений теории пологих оболочек после обезразмеривания операторов системы и подстановки в нее функций из (1.1), (1.2) примет вид

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta \Delta \Phi_*^{mn}(x) - \Delta_h W_*^{mn}(x) &= 0, \\ \varepsilon^2 \Delta \Delta W_*^{mn}(x) + \Delta_h \Phi_*^{mn}(x) &= Q_*^{mn}(x), \end{aligned}$$

$$\text{где } \Delta = \frac{1}{AB_*} \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{B_*}{A} \frac{d}{dx} \right) - n^2 \frac{A}{B_*} \right]; \quad \Delta_h = \frac{1}{AB_*} \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{B_* K_1^*}{A} \frac{d}{dx} \right) - n^2 \frac{AK_1^*}{B_*} \right];$$

$$x = x_1/l; \quad B_* = B/l; \quad K_1^* = K_1 l; \quad K_2^* = K_2 l; \quad W_*^{mn} = h^{-1} W^{mn};$$

$$\Phi_*^{mn} = [12(1 - \nu^2)]^{\frac{1}{2}} (Eh^3)^{-1} \Phi^{mn}; \quad Q_*^{mn} = l^3 [12(1 - \nu^2)]^{\frac{1}{2}} (Eh^3)^{-1} Q^{mn};$$

$\varepsilon^2 = (h/l)[12(1 - \nu^2)]^{-1/2}$  — малый параметр;  $x$  — продольная координата  $x \in [0, 1]$ ;  $l$  — длина оболочки;  $h = \text{const}$  — толщина;  $A(x), B(x)$  и  $K_1(x), K_2(x)$  — параметры Ламэ и главные кривизны срединной поверхности;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $E$  — модуль упругости. Вид функции  $Q^{mn}$  зависит от постановки задачи. Для задачи прочности  $Q^{mn} = Z^{mn}$ , причем  $z^{mn} = \exp(i\omega_m t + inx_2)Z^{mn}(x_1)$  — нормальная поверхностная нагрузка, а для задачи на собственные колебания  $Q^{mn} = \rho h \omega_m^2 W^{mn}$ , где  $\rho$  — плотность материала.

В корректной постановке краевая задача для системы (1.3) должна иметь восемь граничных условий, по четыре на каждом торце. В данной работе в качестве граничных условий считаются заданными на торцах оболочки  $w^{mn}$ ;  $\vartheta_1^{mn}$  или  $M_1^{mn}$ ;  $u_1^{mn}$  или  $N_1^{mn}$ ;  $u_2^{mn}$  или  $S^{mn}$ , что соответствует четырем вариантам заделки или четырем вариантам шарнира, здесь  $M_1$  — продольный изгибающий момент;  $\vartheta_1$  — угол поворота в меридиональной плоскости;  $N_1$  и  $S$  — нормальное и сдвигающее усилия. Без ограничения общности будут рассмотрены только однородные краевые условия.

Запишем систему (1.3) в операторном виде, с этой целью вводится вектор решения  $\mathbf{Y}(x) = (\Phi_*^{mn}(x), W_*^{mn}(x))$  и вектор правой части  $\mathbf{P}(x) = (0, Q_*^{mn}(x))$ :

$$(1.4) \quad \varepsilon^2 L(x)\mathbf{Y}(x) - M(x)\mathbf{Y}(x) + N(x)\mathbf{Y}(x) = \mathbf{P}(x),$$

где  $L(x), M(x), N(x)$  — матрицы  $2 \times 2$  с элементами

$$L_{11} = L_{22} = \frac{1}{AB_*} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{B_*}{A} \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{AB_*} \frac{d}{dx} \left( \frac{B_*}{A} \frac{d}{dx} \right) \right] \right\}; \quad L_{12} = L_{21} = 0;$$

$$M_{11} = M_{22} = \frac{\varepsilon^2 n^2}{AB_*} \left\{ \frac{d}{dx} \left[ \frac{B_*}{A} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{B_*^2} \right) \right] + \frac{1}{B_*^2} \frac{d}{dx} \left( \frac{B_*}{A} \frac{d}{dx} \right) \right\};$$

$$-M_{12} = M_{21} = \frac{1}{AB_*} \frac{d}{dx} \left( \frac{B_* K_2^*}{A} \frac{d}{dx} \right); \quad N_{11} = N_{22} = \frac{\varepsilon^2 n^4}{B_*^4};$$

$$-N_{21} = N_{12} = \frac{n^2 K_1^*}{B_*^2}.$$

Краевые условия после замены в них граничных величин через искомые функции могут быть записаны с учетом векторного представления решения в виде

$$(1.5) \quad D_{1j}(x)\mathbf{Y}(x)|_{x=x_j} = 0, \quad D_{2j}(x)\mathbf{Y}(x)|_{x=x_j} = 0 \quad (j = 0, 1),$$

где  $D_{1j}$  и  $D_{2j}$  — матрицы  $2 \times 2$ , имеющие в общем случае в качестве элементов дифференциальные операторы. Считается, что матрица  $D_{2j}$  содержит операторы более высокого порядка (в некоторых вариантах краевых условий до третьего включительно). Здесь и в дальнейшем, если это особо не оговорено, считается  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ .

2. Для решения задачи (1.4), (1.5) можно формально применить теорию представления решения в виде ряда по малому параметру, развитую в [5, 6] для обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение задачи (1.4), (1.5) ищется в виде

$$(2.1) \quad Y = Y_0 + \varepsilon Y_1 + \dots + \varepsilon^p (Y_{0p} + \varepsilon Y_{01} + \dots) + \varepsilon^\sigma (Y_{10} + \varepsilon Y_{11} + \dots).$$

Первая группа слагаемых представляет асимптотический ряд медленно меняющейся части решения, вторая и третья — асимптотические ряды для краевых эффектов. Величины  $p$  и  $\sigma$  (порядки краевых эффектов) определяются видом краевых условий. При малом  $\varepsilon$  в полном решении достаточно удержать только главные члены рядов, поэтому можно остановиться после первого шага итерационного процесса, предложенного в [5]. Первый член ряда медленно меняющейся части решения ищется как решение уравнения

$$(2.2) \quad -M(x)Y_0(x) + N(x)Y_0(x) = P(x).$$

Главные члены краевых эффектов определяются из уравнений

$$(2.3) \quad \varepsilon^2 L(x_i)Y_{i0}(x) - M(x_i)Y_{i0}(x) = 0 \quad (i = 0, 1)$$

с дополнительным условием

$$(2.4) \quad Y_{00}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0, \quad Y_{10}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0.$$

Процесс замораживания коэффициентов уравнений (2.3) в граничных точках объясняется тем, что решения (2.3), удовлетворяющие условиям (2.4), существенно отличны от нуля только в окрестности граничной точки, соизмеримой с величиной малого параметра  $\varepsilon$ . Для оболочек со слабой изменчивостью образующей возле торцов можно пренебречь значениями производных от коэффициентов, умноженных на  $\varepsilon$ , по сравнению со значением самих коэффициентов. Решения уравнений (2.3), удовлетворяющие условиям (2.4), записываются в виде

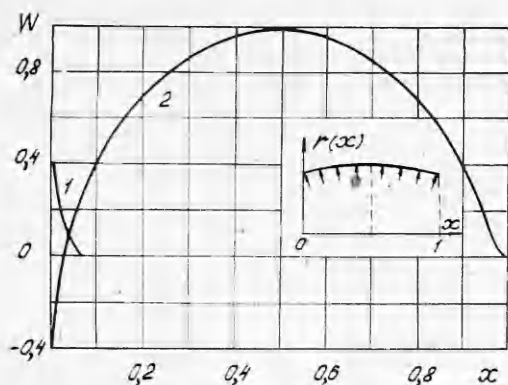
$$(2.5) \quad Y_{i0} = \exp [(-1)^{1-i} \alpha_i (x - x_i)] \times \\ \times \begin{pmatrix} \cos \beta_i (x - x_i) (-1)^{1-i} \sin \beta_i (x - x_i) \\ (-1)^i \sin \beta_i (x - x_i) \cos \beta_i (x - x_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{i1} \\ C_{i2} \end{pmatrix} \quad (i = 0, 1), \\ \alpha_i = [(a_i^2 + b_i^2)^{1/2} + b_i]^{1/2}, \quad \beta_i = [(a_i^2 + b_i^2)^{1/2} - b_i]^{1/2}, \\ a_i = \frac{A^2(x_i) K_2^*(x_i)}{2\varepsilon^2}, \quad b_i = \frac{n^2 A^2(x_i)}{B_*^2(x_i)}, \quad C_{ij} = \text{const} \quad (j = 1, 2).$$

Для формулировки граничных условий на решение уравнения (2.2) следует поступить следующим образом: подставить в (1.5) представление решения в виде (2.1) с конкретным видом  $Y_{i0}$  (2.5), при больших  $\alpha_i$  решения типа пограничного слоя можно считать нулевым в противоположных граничных точках. Полученную систему разрешим относительно  $C_{ij}$  и получим две группы равенств:

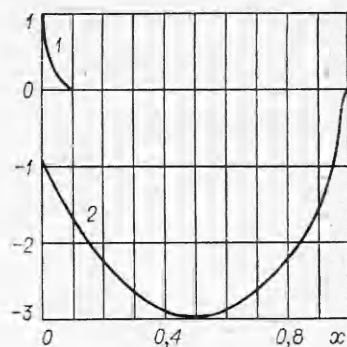
$$(2.6) \quad \begin{pmatrix} C_{i1} \\ C_{i2} \end{pmatrix} = D_{3i}(x) Y_0(x) |_{x=x_i} \quad (i = 0, 1);$$

$$(2.7) \quad D_{4i}(x) Y_0(x) |_{x=x_i} = 0 \quad (i = 0, 1).$$

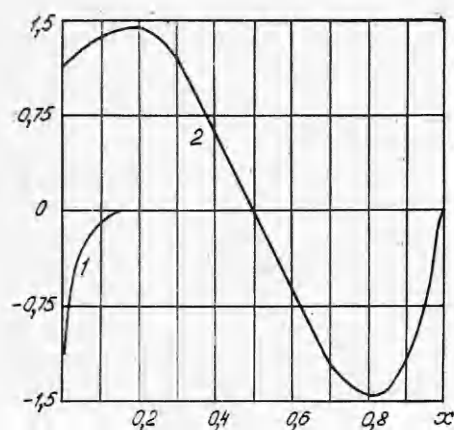
Здесь  $D_{3i}$ ,  $D_{4i}$  — матрицы  $2 \times 2$  с дифференциальными операторами (в общем случае) в качестве элементов. Конкретный вид матриц  $D_{3i}$  и  $D_{4i}$  опре-



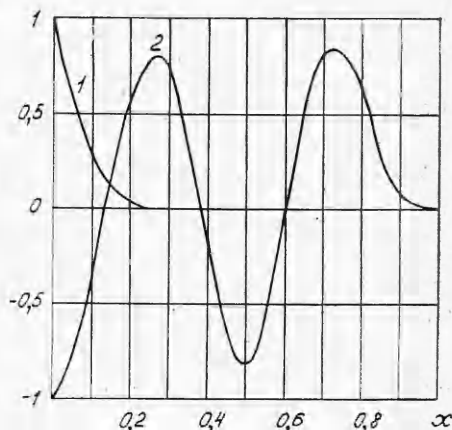
Ф и г. 1



Ф и г. 2



Ф и г. 3



Ф и г. 4

деляется видом матриц  $D_{1i}$  и  $D_{2i}$ . При практических расчетах удобнее матрицу  $D_{3i}$  строить из матрицы  $D_{1i}$ . Равенства (2.7) имеют смысл граничных условий для уравнения (2.2), а из (2.6) после решения задачи (2.2), (2.7) определяются константы решений (2.5).

3. Для численного интегрирования предельной задачи (2.2), (2.7), порядок которой вдвое ниже по сравнению с исходной, можно применить какой-либо стандартный метод [7]. Однако среди решений задачи (2.2), (2.7), как показано в [8], сохраняются экспоненциально затухающие составляющие, которые в задачах с большим  $n$  или  $lK_2^*$  имеют ярко выраженный характер краевого эффекта. В связи с этим в данной работе использован метод дискретной ортогонализации Годунова [9], который хорошо зарекомендовал себя и широко используется в задачах теории оболочек. После численного интегрирования предельной задачи (2.2), (2.7) из равенств (2.6) определяются константы решений (2.5). Суммарное решение является приближением решения исходной задачи, и, по оценкам [5], погрешность построенного решения имеет порядок  $O(\epsilon)$ . Для того чтобы улучшить приближение, следует проделать еще несколько шагов итерационного процесса [5], что фактически сводится к решению тех же задач для уравнений (2.2), (2.3) с правыми частями, являющимися функциями от уже построенного решения. Поскольку в реальных тонкостенных оболочках параметр  $\epsilon$  имеет порядок  $O(10^{-2})$ , а проведение следующих итераций не вызывает существенных трудностей по сравнению с изложенным выше, процедура построения следующих приближений рассматриваться не будет.

В качестве приложения рассмотрена оболочка с образующей  $r(x) = 0,45 + 0,2x - 0,2x^2$ ,  $l/h = 200$ , с граничными условиями  $w = 0$ ,

$\Phi_1 = 0$ ,  $N_1 = 0$ ,  $S = 0$  на обоих торцах. Характеристики материала:  $\nu = 0,3$ ,  $E = 2 \cdot 10^{10} \cdot 9,81$  Н/м<sup>2</sup>. На фиг. 1 изображен нормальный прогиб, возникающий в оболочке под действием нормального внутреннего давления с показателем осцилляции  $n = 15$ . Прогиб симметричен относительно середины отрезка  $[0,1]$ , поэтому в левой части фиг. 1 изображены составляющие решения (1 — краевой эффект, 2 — результат численного решения), а справа — полное решение. На фиг. 2—4 изображены собственные формы колебаний этой же оболочки с теми же краевыми условиями при  $n = 4$  для значений частотного параметра  $\lambda = \rho l^2 \omega_m^2 / E \varepsilon^2$ , равных 221,22; 510,05; 1007,04 соответственно. В левой части фиг. 2—4 формы разложены на составляющие, а в правой — приведены суммарные решения. Цифрами 1 и 2 обозначены краевой эффект и численный результат.

Достоинством данного способа приближенного решения задачи является то, что численно решается задача, порядок дифференциального оператора которой вдвое ниже по сравнению с исходной, а среди решений этой задачи уже нет краевых эффектов, порожденных тонкостенностью конструкции. Метод тем более эффективен, чем выше тонкостенность рассматриваемой оболочки.

(Поступила 19 I 1982)

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Корнев В. М., Шкутин Л. И. О сочетании асимптотических и численных методов при решении задач прочности, устойчивости и колебаний упругих оболочек вращения. — В кн.: Теория оболочек и пластин. М.: Наука, 1973.
2. Корнев В. М., Шкутин Л. И. Асимптотика задачи о собственных несимметричных колебаниях круговых конических оболочек. — ПМТФ, 1973, № 2.
3. Вахрамеев Ю. М., Корнев В. М. О краевых задачах с малым параметром для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. — Дифференциальные уравнения, 1977, т. 13, № 7.
4. Власов В. З. Избранные труды. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
5. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. — УМН, 1960, т. 15, вып. 3.
6. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.
7. Везин Н. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1, 2. М.: Физматгиз, 1962.
8. Степаненко С. В. Определение напряженно-деформированного состояния тонких защемленных оболочек вращения. — В кн.: Материалы XVIII Всесоюз. науч. студ. конф. Математика. Новосибирск: изд. НГУ, 1980.
9. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — УМН, 1961, т. 16, вып. 3.

УДК 539.31

### ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

В. М. Ермоленко, В. М. Корнев

(Новосибирск)

Плотность собственных чисел в задачах устойчивости оболочек положительной гауссовой кривизны рассмотрена в работах [1—3]. Была предложена интерпретация полученных результатов, позволяющая связать плотность начального участка спектра с чувствительностью оболочек к малым возмущениям в процессе эксперимента, а также к неправильностям геометрической формы оболочки. Естественным представляется исследование спектра в менее изученных задачах — задачах устойчивости оболочек отрицательной гауссовой кривизны. Наибольший интерес представляют оболочки отрицательной гауссовой кривизны, близкие к цилиндрическим.

Система уравнений устойчивости пологих оболочек, радиусы которых близки к постоянным, имеет вид [4]

$$(Eh)^{-1} \nabla^2 \nabla^2 \varphi - \Delta_k^2 w = 0, \quad D \nabla^2 \nabla^2 w + \Delta_k^2 \varphi = \sigma \nabla^2 \nabla^2 (\alpha_1 w_{,xx} + \alpha_2 w_{,yy}),$$

$$\sigma \alpha_1 = -T_1, \quad \sigma \alpha_2 = -T_2, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta_k^2 = \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$