

УДК 532.516.5

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА, ОПИСЫВАЮЩЕГО ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Е. Н. Журавлева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: zhuravleva_e@mail.ru

Численно исследовано частично инвариантное решение уравнений Навье — Стокса для плоского случая, которое описывает неустановившееся движение в слое, ограниченном прямой твердой стенкой и параллельной ей свободной границей. Установлено, что при различных значениях начальной скорости течения возможен выход на стационарное состояние с уменьшением или увеличением начальной толщины слоя либо неограниченное увеличение толщины слоя за счет притока жидкости с бесконечности.

Ключевые слова: течение вязкой несжимаемой жидкости, уравнения Навье — Стокса, течения со свободными границами, инвариантные и частично инвариантные решения, численные решения.

DOI: 10.15372/PMTF20160302

Частично инвариантное решение. Исследованию точных решений уравнений Навье — Стокса, описывающих движение со свободными границами, посвящено большое количество работ. Классификация таких решений для плоского случая выполнена в [1]. В [2–7] получены некоторые инвариантные и частично инвариантные решения для двумерных и трехмерных задач. В работе [2] построены стационарные и автомодельные решения типа решения Кармана для уравнений Навье — Стокса, описывающие течение вязкой несжимаемой жидкости в слое между вращающейся твердой плоскостью и параллельной ей свободной поверхностью. В частности, рассмотрено течение в слое на неподвижной плоскости и показано существование автомодельного решения, соответствующего увеличению толщины слоя жидкости. Получена верхняя оценка возможной толщины слоя. В работе [7] для трехмерного осесимметричного случая доказано существование точного решения в области с двумя свободными границами.

В настоящей работе решаются двумерные уравнения Навье — Стокса в случае, когда одна компонента скорости является линейной функцией соответствующей координаты, а вторая компонента скорости и давление не зависят от этой координаты. Предложено частично инвариантное решение, описывающее неустановившееся течение в полосе, ограниченной с одной стороны твердой стенкой, с другой — параллельной ей свободной границей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-01-00526).

© Журавлева Е. Н., 2016

Рассмотрим область

$$\Omega = \{(x_1, x_2): -\infty < x_1 < \infty, 0 \leq x_2 \leq \eta(t)\},$$

где $\eta(t)$ — зависящая от времени толщина полосы.

Пусть продольная компонента вектора скорости v_1 является линейной функцией x_1 , поперечная компонента $v_2 = f(x_2, t)$ не зависит от x_1 , давление $p = h(x_2, t)$. Тогда уравнения Навье — Стокса для плоского случая имеют вид

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + f \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right); \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad (3)$$

где ρ — плотность жидкости; ν — кинематическая вязкость.

Дифференцируя (1) по x_1 и учитывая (3), получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x_2} - \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \nu \frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3}. \quad (4)$$

Из уравнений (2), (4) находим $f(x_2, t)$, $h(x_2, t)$. Функцию v_1 определим из (1), (3) по формуле

$$v_1 = -x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \varphi(x_2, t).$$

Полагая $\varphi \equiv 0$, рассмотрим решения, в которых f — нечетная функция x_2 , h — четная функция. Тогда продольная компонента скорости определяется из соотношения

$$v_1 = -x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2}. \quad (5)$$

На свободной границе $x_2 = \eta(t)$ должны выполняться кинематическое и динамическое условия

$$\frac{\partial \eta(t)}{\partial t} = f(\eta(t), t); \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0; \quad (7)$$

$$p_a - h + 2\rho\nu \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad (8)$$

где p_a — атмосферное давление.

На твердой стенке $x_2 = 0$ выполняется условие прилипания $v_1 = v_2 = 0$, с учетом (5) получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0; \quad (9)$$

$$f = 0. \quad (10)$$

В начальный момент времени имеем

$$\eta(0) = a, \quad f(x_2, 0) = f_0(x_2).$$

Кроме того, потребуем выполнения условий согласования

$$f_0(0) = 0, \quad \frac{\partial f_0}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_2^2} \Big|_{x_2=\eta(0)=a} = 0.$$

При стандартном обезразмеривании $\nu = a = 1$.

Постановка задачи в лагранжевых координатах. Задачи с неизвестной границей целесообразно исследовать в лагранжевых координатах (ξ, τ) , которые введем следующим образом:

$$t = \tau, \quad x_2 = y(t, \xi), \tag{11}$$

где $y(t, \xi)$ — решение задачи Коши

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t), \quad y|_{t=0} = \xi.$$

В силу (6), (11) свободная граница $x_2 = \eta(t)$ преобразуется в прямую $\xi = \eta(0) = 1$ на плоскости (ξ, τ) . Таким образом, области

$$\{(x_2, t): 0 \leq x_2 \leq \eta(t), \quad 0 \leq t \leq T\}$$

соответствует прямоугольная область

$$\{(\xi, \tau): 0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \tau \leq T\}.$$

Введем функции

$$u(\xi, \tau) = -\frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \lambda(\xi, \tau) = \frac{\partial y}{\partial \xi}. \tag{12}$$

В новых переменных с учетом (12) уравнение (4) запишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - u^2, \tag{13}$$

граничные условия (7), (9) — в виде

$$u(0, \tau) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \xi}(1, \tau) = 0. \tag{14}$$

Из (11), (12) получаем

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} f(y, \tau) = \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial y}{\partial \xi} = -u\lambda.$$

Кроме того,

$$\lambda(\xi, 0) = \frac{\partial y}{\partial \xi}(\xi, 0) = 1.$$

Следовательно, функцию $\lambda(\xi, \tau)$ можно найти из решения задачи Коши:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \tau} = -u\lambda, \quad \lambda(\xi, 0) = 1. \tag{15}$$

Получаем явную формулу для $\lambda(\xi, \tau)$:

$$\lambda = \exp \left(- \int_0^\tau u(\xi, t) dt \right). \tag{16}$$

Таким образом, функции $u(\xi, \tau)$, $\lambda(\xi, \tau)$ можно найти, либо решив уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \exp \left(\int_0^\tau u dt \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\exp \left(\int_0^\tau u dt \right) \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - u^2$$

с условиями (14) и начальным условием для $u(\xi, \tau)$ и определив $\lambda(\xi, \tau)$ по формуле (16), либо решив систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - u^2, & \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} &= -u\lambda, \\ u(0, \tau) &= 0, & \frac{\partial u}{\partial \xi}(1, \tau) &= 0, & \lambda(\xi, 0) &= 1, & u(\xi, 0) &= u_0(\xi). \end{aligned} \quad (17)$$

Из (11), (12) получаем равенство, определяющее положение свободной границы:

$$x_2 = \eta(t) = y(t, 1) = \int_0^1 \lambda(\xi, \tau) d\xi.$$

Из (10), (12) можно однозначно восстановить функцию $f(x_2, t)$, затем из (2), (8) — функцию давления $h(x_2, t)$. Таким образом, решение задачи о деформации полосы со свободной границей сводится к решению начально-краевой задачи (17).

Результаты численного исследования. Точное решение, описывающее деформацию полосы, ограниченной твердой стенкой и свободной границей, аналитически исследовалось в работе [6]. Доказаны существование и единственность решения для любого момента времени при условии $u_0(\xi) \geq 0$, при $u_0(\xi) \leq 0$ найдено автомодельное решение

$$u(x_2, t) = \frac{q(x_2/\sqrt{t+c})}{t+c}, \quad \eta(t) = \sqrt{t/c+1}, \quad c = \text{const}, \quad (18)$$

где $q(\zeta)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению. Из (18) следует, что при $t \rightarrow \infty$ $\eta(t) \rightarrow \infty$, $v_2(t) \rightarrow 0$, т. е. с течением времени толщина слоя жидкости неограниченно увеличивается.

Заметим, что функцию $u = -\partial f / \partial x_2$ можно рассматривать в качестве величины, характеризующей скорость изменения вертикальной составляющей скорости жидкости v_2 вдоль оси x_2 . Таким образом, в случае $u_0(\xi) \geq 0$ при $x_2 \in [0, 1]$ компонента скорости v_2 уменьшается. Следовательно, с учетом (10) $v_2(x_2) \leq 0$ при $x_2 \in [0, 1]$, т. е. вертикальная составляющая скорости направлена к твердой стенке $x_2 = 0$, горизонтальная составляющая v_1 направлена от оси x_2 (слой растекается). В случае $u_0(\xi) \leq 0$ вертикальная составляющая скорости при приближении к свободной границе, наоборот, увеличивается, горизонтальная составляющая направлена к оси x_2 , т. е. толщина слоя увеличивается за счет притока с бесконечности.

В настоящей работе система (17) решается численно с использованием неявной схемы и итерационного метода Ньютона для квазилинейного уравнения параболического типа (13). Данная схема аппроксимирует исходное уравнение с точностью $O(\Delta t + (\Delta x)^2)$ и является устойчивой и монотонной при любых шагах по времени Δt и пространству Δx [8]. Вторая неизвестная функция $\lambda(\xi, \tau)$ определяется из точного решения (16).

Для контроля точности решения проводился независимый расчет с помощью пакета “Wolfram Mathematica 9.0” Информационно-вычислительного центра Новосибирского государственного университета. Результаты проведенных исследований хорошо согласуются, что свидетельствует о точности расчетов.

Выявлены следующие режимы течений: 1) растекание слоя; 2) увеличение толщины слоя.

Растеканию слоя жидкости соответствует случай положительной начальной функции $u_0(\xi) \geq 0$, что подтверждают результаты численных исследований. Расчеты, проведенные при различных значениях функции $u_0(\xi) \geq 0$, показали, что толщина слоя жидкости

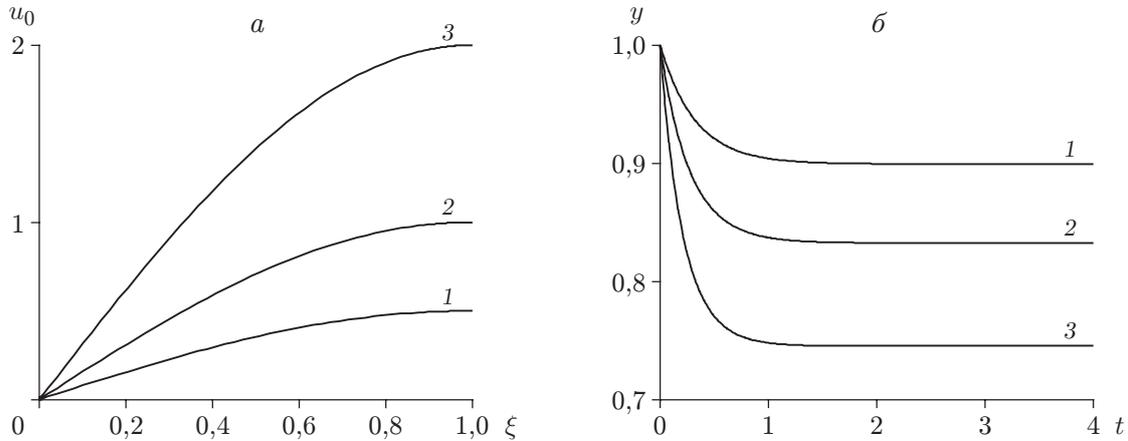


Рис. 1. Профили начальной скорости $u_0(\xi)$ (а) и зависимость толщины слоя от времени при различных начальных функциях (б):

1 — $u_0(\xi) = (1/2) \sin(\pi\xi/2)$, 2 — $u_0(\xi) = \sin(\pi\xi/2)$, 3 — $u_0(\xi) = 2 \sin(\pi\xi/2)$

уменьшается и достаточно быстро выходит на постоянное значение. Решение слабо зависит от профиля начальной функции: при $t \rightarrow \infty$ значения толщины слоя жидкости, полученные при

$$u_0(\xi) = (e - 1) \sin(\pi\xi/2), \quad u_0(\xi) = e^{(\xi-1)^2} - e,$$

различаются всего на 1 %.

Более существенной является зависимость толщины слоя от максимума начальной функции (рис. 1). На рис. 1 видно, что при увеличении максимума начальной функции толщина слоя уменьшается, при этом время выхода на состояние покоя практически одно и то же.

В случае увеличения толщины слоя за счет притока с бесконечности при $u_0(\xi) \leq 0$ картина течения более сложная. Автомодельное решение (18) включает два режима. В случае если максимум $|u_0(\xi)|$ меньше максимума соответствующей функции из автомодельного решения, толщина слоя, увеличиваясь, стремится к постоянному значению, т. е. наличие твердой стенки приводит к постепенному замедлению течения (кривые 4, 5 на рис. 2). В случае если $\max |u_0(\xi)|$ больше максимума соответствующей функции из автомодельного решения, толщина слоя неограниченно возрастает (кривые 1, 2 на рис. 2). Линия 3 на рис. 2 соответствует автомодельному решению (18).

Все кривые, приведенные на рис. 2, кроме линии 3, получены для начальной функции вида $u_0(\xi) = c \sin(\pi\xi/2)$ при незначительно различающихся значениях константы c .

Режим неограниченного увеличения толщины слоя возникает при достижении такой толщины, когда твердая стенка уже не может оказывать значительного влияния. При этом характер течения изменяется. Нетрудно показать, что при отсутствии условий прилипания система (17) имеет решение

$$u = -\frac{1}{t^* - t}, \quad \lambda = \frac{c}{t^* - t},$$

где t^* — время существования решения.

Сравним зависимость толщины слоя от времени $y(t)$, полученную в численных расчетах, с теоретической зависимостью $\lambda = c/(t^* - t)$. На рис. 3 видно, что с течением времени величина $(1/y)'$ стремится к постоянному значению, но, поскольку $(1/\lambda)' = \text{const}$, толщина слоя $y(t)$ при таком режиме течения изменяется по закону $c/(t^* - t)$.

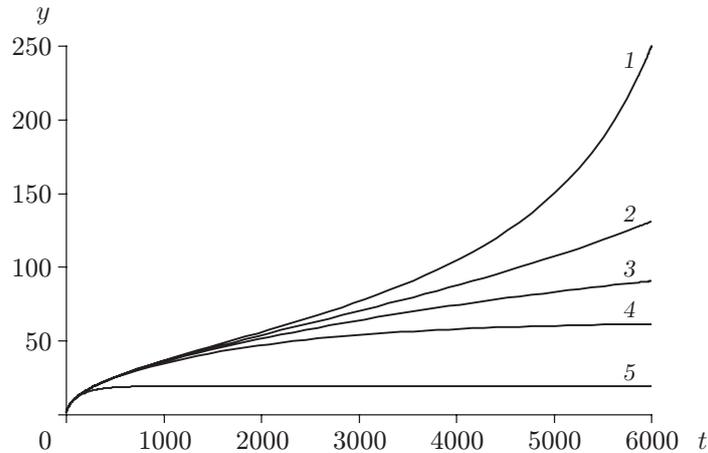


Рис. 2. Зависимость толщины слоя от времени при различных значениях начальной скорости:

1 — $u_0(\xi) = -1,107\,031 \sin(\pi\xi/2)$, 2 — $u_0(\xi) = -1,107\,030\,8 \sin(\pi\xi/2)$, 3 — $\max |u_0(\xi)| = 1,107\,030\,56$,
 4 — $u_0(\xi) = -1,107\,03 \sin(\pi\xi/2)$, 5 — $u_0(\xi) = -1,107 \sin(\pi\xi/2)$

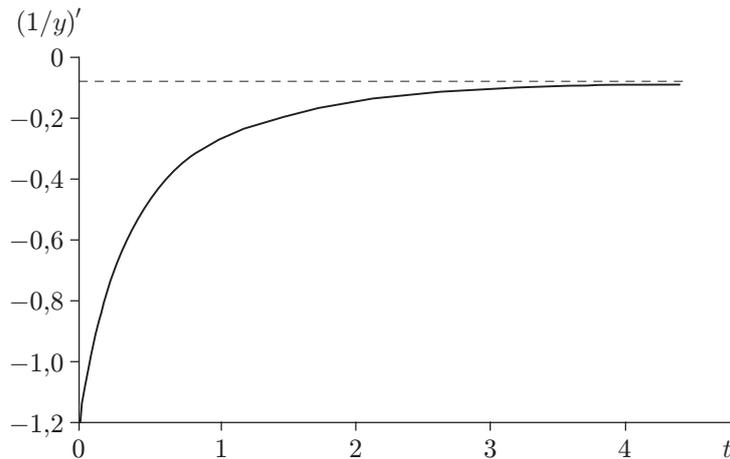


Рис. 3. Зависимость величины $(1/y)'$ от времени

Заключение. Проведено численное исследование точного решения системы Навье — Стокса для плоского случая, описывающее течение вязкой несжимаемой жидкости в слое, ограниченном твердой стенкой и параллельной ей свободной границей. Показано определяющее влияние функции, характеризующей изменения вертикальной составляющей скорости жидкости v_2 вдоль оси x_2 в начальный момент времени. Определены условия выхода на состояние покоя, а также условия неограниченного увеличения толщины слоя жидкости с течением времени.

Автор выражает благодарность В. В. Пухначеву и О. А. Фроловской за плодотворное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пухначев В. В. Задачи со свободной границей для уравнений Навье — Стокса: Дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 1974.

2. **Лаврентьева О. М.** Течение вязкой жидкости в слое на вращающейся плоскости // ПМТФ. 1989. № 5. С. 41–48.
3. **Лаврентьева О. М., Волкова Г. Б.** Предельные режимы растекания слоя на вращающейся плоскости // Динамика сплошной среды / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1996. Вып. 111. С. 68–77.
4. **Журавлева Е. Н., Пухначев В. В.** Численное исследование бифуркаций при спиральном течении жидкости со свободными границами // Вычисл. механика сплошных сред. 2014. Т. 7, № 1. С. 82–90.
5. **Андреев В. К.** Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике / В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1994.
6. **Pukchnachov V. V.** On a problem of viscous strip deformation with a free boundary // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. 1999. V. 328. P. 357–362.
7. **Pukchnachov V. V.** Model of viscous layer deformation by thermocapillary forces // Europ. J. Appl. Math. 2002. V. 13, N 2. P. 205–224.
8. **Калиткин Н. Н.** Численные методы. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 5/III 2015 г.
