

КИНЕМАТИКА ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ
С НЕВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ

А. Ф. Ревуженко, Е. И. Шемякин

(Новосибирск)

Рассматривается обобщение модели идеальнопластического тела на случай сыпучей среды с неортогональными линиями скольжения. Показано, что в рамках принятых гипотез некоторые свойства модели идеальной пластичности (совпадение характеристики поля скоростей и напряжений, независимость поля скоростей от возможного различия в сдвигах на площадках скольжения) основными для модели не являются и обобщаться не должны.

Строится замкнутая система уравнений, рассматриваются свойства разрывных решений и постановка краевых задач. Показано, что в задаче об устойчивости откоса линий потери устойчивости является дуга окружности (круглоцилиндрическая поверхность).

1. Рассмотрим плоскую деформацию сыпучей среды в предельном состоянии

$$(1.1) \quad \tau = \sin \varphi \sigma + k$$

где σ , τ — инварианты тензора напряжений, φ , k — постоянные материалы. На площадке α (α — угол между площадкой и наибольшим сжимающим напряжением σ_1) касательное и нормальное напряжения τ_α , σ_α связаны равенством

$$(1.2) \quad \tau_\alpha = c_1(\alpha) \sigma_\alpha + c_2(\alpha)$$

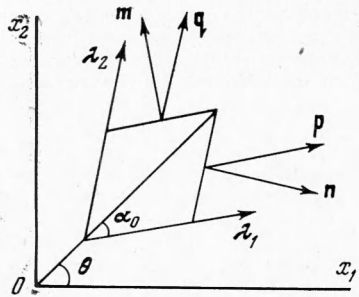
$$c_1 = \frac{\sin \varphi \sin 2\alpha}{1 - \sin \varphi \cos 2\alpha}, \quad c_2 = \frac{k \sin 2\alpha}{1 - \sin \varphi \cos 2\alpha}$$

Структура (1.2) отражает закон трения между частицами сыпучей среды: если τ_α , σ_α удовлетворяют (1.2) при некоторых критических коэффициентах $\pm c_1^\circ$, $\pm c_2^\circ$, то между частицами сыпучей среды возможно относительное скольжение, если $c_1(\alpha)$, $c_2(\alpha)$ не равно критическим, то контакты между частицами находятся в допредельном состоянии и на площадке сохраняется устойчивость деформирования. Пусть $c_1(\alpha) = c_1^\circ$, $c_2(\alpha) = c_2^\circ$ при $\alpha = \alpha_0 > 0$, где α_0 — известная постоянная величина. Величина угла α_0 может зависеть как от свойств материала, так и от условий его нагружения в допредельном состоянии [1,2].

Таким образом, в предельном состоянии (1.1) механизм деформирования среды анизотропный: на площадках, касательных к линиям $x_2'(x_1) = \operatorname{tg}(\theta \pm \alpha_0)$, между частицами среды возможны неограниченные относительные смещения, на всех остальных площадках смещения между частицами малы [3] (θ — угол наклона σ_1 у оси Ox_1 , Ox_1x_2 — декартова система координат). Подобный механизм деформирования можно интерпретировать следующим образом: в предельном состоянии среда разделяется линиями $x_2' = \operatorname{tg}(\theta \pm \alpha_0)$ на отдельные правильные элементы и ее дальнейшее деформирование происходит вследствие вращения, сжатия и скольжения элементов друг по другу. Для построения замкнутой системы уравнений, описывающей деформирование среды, необходимо сформулировать

требования, которым должна удовлетворять эта система. Согласно [4] необходимым в данном случае является только одно требование: система должна в инвариантной форме описывать процессы, которые происходят на площадках $x_2' = \operatorname{tg}(\theta \pm \alpha_0)$. Возможные дополнительные условия, в том числе и условие совпадения характеристик поля скоростей и напряжений, необходимыми не являются.

Кинематика деформирования среды зависит от закона трения между ее элементами. Возможны два принципиально различных режима трения: вязкий и нормальный [3], или невязкий. При вязком режиме трения скорость сдвига между элементами зависит как от нелокальных факторов — поведения окрестных элементов и граничных условий, так и от локальных факторов — напряжений, действующих на площадке скольжения. При невязком режиме трения от напряжений зависит только момент наступления скольжения. В дальнейшем скорость не зависит и может быть ограничена только нелокальными факторами. В упрочняющихся пластических телах реализуется первый режим трения, в идеально-пластических — второй. В дальнейшем ограничимся моделью сыпучей среды с невязким трением. Распределение ω , θ будем предполагать фиксированным и известным из решения краевой задачи для напряжений [5].



Фиг. 1

2. Пусть $v_1(x_1x_2)$, $v_2(x_1x_2)$ поле скоростей в декартовой системе координат. Обозначим через ∂ приращения скоростей и координат при переходе от элемента к элементу, а через δ — приращения внутри одного и того же элемента. Скорости сдвигов на площадках AB , BC (фиг. 1) можно характеризовать инвариантными величинами

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \gamma_{qp} &= \frac{\partial v_p}{\partial q} + \omega \sin 2\alpha_0 = \frac{\cos 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \\ &+ \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + \frac{\cos 2\alpha_0}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) - \\ &- \frac{\sin 2\alpha_0}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \omega \sin 2\alpha_0 \\ \delta_{pq} &= \frac{2v_q}{\partial p} - \omega \sin 2\alpha_0 = \frac{\cos 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\sin 2\theta}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + \frac{\cos 2\alpha_0}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\sin 2\alpha_0}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - \omega \sin 2\alpha_0 \end{aligned}$$

где $\omega = 1/2 (\delta v_2 / \delta x_1 - \delta v_1 / \delta x_2)$. Так как скольжение по неортогональным площадкам AB , BC не вызывает изменения объема, то, следовательно, с изменением должна быть связана сумма $\partial v_n / \partial p + \partial v_m / \partial q$. Последняя преобразуется к виду

$$(2.2) \quad \frac{\partial v_n}{\partial p} + \frac{\partial v_m}{\partial q} = \sin 2\alpha_0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right)$$

Если предположить непрерывность компонент скорости v_n , v_m и их производных, то можно получить оценку

$$(2.3) \quad \frac{\partial v_n}{\partial p} + \frac{\partial v_m}{\partial q} = \sin 2\alpha_0 \left(\frac{\delta v_1}{\delta x_1} + \frac{\delta v_2}{\delta x_2} \right) + o(l)_n$$

где l — расстояние между линиями скольжения. Для равенств (2.1) подобные оценки невозможны, так как разрывность на сторонах элементов касательных скоростей и возможная независимость скоростей сдвигов γ_{qp} , γ_{pq} связана с существом деформирования среды. Поэтому при $l \rightarrow 0$ ω необходимо оставить в качестве независимой функции. Приращения ∂ в этом случае можно рассматривать как дифференциалы, что позволяет описывать поведение несплошной среды при малых расстояниях между линиями несплошности методами механики сплошной среды.

Пусть (λ_1, λ_2) — натуральные параметры линий скольжения $x_2' = \text{tg}(\theta \pm \alpha_0)$, а w_1, w_2 — проекции скорости на орты к сторонам элемента. Так как трение среды предполагается невязким, то скорость элемента (λ_1, λ_2) может быть ограничена только скоростями элементов $(\lambda_1 \pm d\lambda_1, \lambda_2 \pm d\lambda_2)$. Из условия непрерывности v_n, v_m и условия возможного скольжения по сторонам элемента следует, что вдоль линии λ_1 может передаваться информация только о нормальной к стороне элемента скорости w_1

$$(2.4) \quad \bar{v}(\lambda_1 + d\lambda_1) \cdot \bar{n}(\lambda_1) = w_1(\lambda_1) - \omega(\lambda_1) \cos 2\alpha_0 - \varepsilon_1(\lambda_1) \\ \frac{\partial w_1}{\partial \lambda_1} - \frac{w_2 + \cos 2\alpha_0 w_1}{\sin 2\alpha_0} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_1} + w \cos 2\alpha_0 + \varepsilon_1 = 0$$

где ε_1 — скорость сжатия элемента вдоль линии λ_1 . Аналогично вдоль λ_2

$$(2.5) \quad \frac{\partial w_2}{\partial \lambda_2} + \frac{w_1 + \cos 2\alpha_0 w_2}{\sin 2\alpha_0} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda_2} - \omega \cos 2\alpha_0 + \varepsilon_2 = 0$$

Из уравнений (2.4), (2.5) следует, что в общем случае поле скоростей зависит от поля ω , которое отражает возможное различие в функционировании площадок скольжения. Исключением является идеальнопластическая (идеальносвязная [5]) среда, для которой $\alpha_0 = \pi/4$ и уравнения (2.4), (2.5) замкнуты независимо от уравнения для ω . Можно показать, что условие соосности тензоров напряжений и скоростей деформаций в идеальной пластичности эквивалентно условию симметрии сжимаемости: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Если при этом $\varepsilon \equiv \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \equiv 0$, то уравнения (2.4), (2.5) превращаются в уравнения для несжимаемой идеальнопластической среды [6].

Пусть величина ε известна как функция гидростатического давления, а величина $\Delta = \varepsilon_1 / \varepsilon_2$ либо известна из дополнительных соображений, либо равна единице. Соотношение (2.5) отражает факт возможного скольжения по линиям $x_2' = \text{tg}(\theta \pm \alpha_0)$. Однако линия $x_2' = \text{tg}(\theta + \alpha_0)$ будет характеристикой системы для $\omega_1, \omega_2, \omega$ только в том случае, если в уравнение для ω не войдут производные вдоль λ_1 . В противном случае слабые разрывы скорости будут распространяться по линии, отличной от линии скольжения. Из (2.5) следует, что «локально» линия слабого разрыва состоит из отрезков $x_2' = \text{tg}(\theta + \alpha_0)$, но за счет вращения элементов направление распространения слабых разрывов может отклониться от линии скольжения. Идеальнопластический материал в этом отношении является исключением. При $\alpha_0 = \pi/4$ $\omega \cos 2\alpha_0 \equiv 0$ и перенос линии скольжения за счет вращения происходит вдоль самой линии скольжения. Поэтому характеристики поля скоростей идеальнопластического материала совпадают с линиями скольжения (если их определить, как в п. 1) и характеристиками поля напряжений.

Рассмотрим уравнения для замыкания системы (2.4), (2.5). Если история нагружения материала в допредельном и граничные условия в предельном состояниях не выделяют ни одну из систем линий скольжения, то можно предположить что средние по некоторому промежутку времени скорости сдвигов γ_{qp}, γ_{pq} равны между собой. В этом случае $\omega =$

$= 1/2(\partial v_2 / \partial x_1 - \partial v_1 / \partial x_2)$ и характеристики поля скоростей совпадают с линиями наибольших касательных напряжений $x_2' = \operatorname{tg}(\theta \pm \pi/4)$. Если при этом $\Delta = 1$, то тензоры напряжений и скоростей деформаций будут соосными.

Рассмотрим другой крайний случай, когда скольжение происходит по одной из линий λ_1, λ_2 , например по линии λ_1 . В этом случае $\gamma_{pq} \equiv 0$ и полная система уравнений имеет вид

$$(2.6) \quad \begin{aligned} & \sin 2\theta \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) - \cos 2\theta \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - \cos 2\alpha_0 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \\ & + \sin 2\alpha_0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + 2\omega \cos 2\alpha_0 + 2\varepsilon_1 = 0 \\ & - \sin 2\theta \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \cos 2\theta \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \\ & + \cos 2\alpha_0 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \sin 2\alpha_0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) - 2\omega \cos 2\alpha_0 + 2\varepsilon_2 = 0 \end{aligned}$$

$$(2.7) \quad \begin{aligned} & \cos 2\theta \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \sin 2\theta \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + \\ & + \cos 2\alpha_0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \sin 2\alpha_0 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) - 2\omega \sin 2\alpha_0 = 0 \end{aligned}$$

Система (2.6), (2.7) гиперболического типа. Если μ_1, μ_2 — натуральные параметры характеристик $x_0' = \operatorname{tg}(\theta - \alpha_0)$, $x_2' = -\operatorname{ctg}(\theta - \alpha_0)$ системы, u_1, u_2 — проекции скорости на характеристики, а f_1, f_2 — проекции скорости на линию скольжения λ_2 и ортогональную к ней траекторию, то систему (2.6), (2.7) можно преобразовать к виду

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial \mu_1} - u_2 \frac{\partial \theta}{\partial \mu_1} &= -\varepsilon_1 \sin 2\alpha_0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial \mu_2} + u_1 \frac{\partial \theta}{\partial \mu_2} &= -\frac{\varepsilon_1 \cos^2 2\alpha_0 + \varepsilon_2}{\sin 2\alpha_0} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \mu_1} - f_2 \frac{\partial \theta}{\partial \mu_1} &= \omega \sin 2\alpha_0 \end{aligned}$$

Постановка краевых задач определяется типом системы (2.6), (2.7). Если вдоль границы $x_2 = x_2(x_1)$, $\nu = \operatorname{arctg} x_2'$ задаются обе компоненты скорости, то задача будет корректной при условии, что граница не имеет характеристических направлений μ_1, μ_2 . Вдоль характеристик граничные условия должны удовлетворять первым двум соотношениям (2.8). Пусть на границе задана величина ω . Дополнительно к этому условию на границе можно задать только некоторую комбинацию частных производных от скорости, например P_β

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} x_2' \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} x_2' \right) \sin \beta = \frac{1}{\cos \nu} P_\beta$$

Корректность такой задачи зависит не только от уравнений (2.6), (2.7), но и от вида граничного условия на скорость: задача будет корректной, если

$$x_2' \neq \frac{\cos(\theta + \alpha_0 - \beta)}{\cos(\theta - \alpha_0 - \beta)} \operatorname{tg}(\theta - \alpha_0)$$

при $x_2' = \operatorname{tg}(\theta - \alpha_0)$ граничные условия связаны соотношением

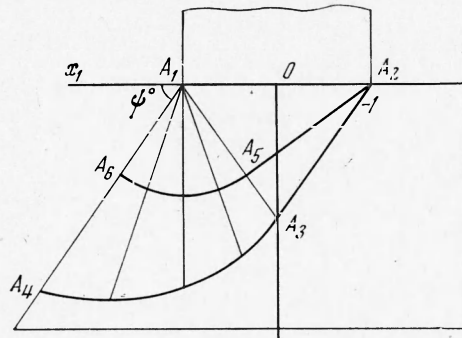
$$\omega \sin(\theta - \alpha_0 - \beta) + \varepsilon_1 \sin(\theta + \alpha_0 - \beta) = -P_\beta$$

Если $\beta = \theta - \alpha_0 + \pi / 2$, то при любом положении границы должно выполняться равенство

$$\omega \cos (\theta - \alpha_0 - \nu) \sin 2\alpha_0 + \varepsilon_1 \cos 2\alpha_0 \sin (\theta + \alpha_0 - \nu) + \varepsilon_2 \sin (\theta - \alpha_0 - \nu) = \sin 2\alpha_0 P_\beta$$

Таким образом, для системы (2.6), (2.7) корректными будут задачи Коши, Гурса, различные смешанные задачи и т. д.

Так как скорости входят в систему (2.6), (2.7) дифференциально, а ω алгебраически, то при анализе разрывных решений необходимо рассматривать совместно слабые разрывы скоростей и сильный разрыв ω . Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \theta$ непрерывны. Слабые разрывы скоростей возможны только на характеристиках $x_2' = \operatorname{tg} (\theta - \alpha_0), x_2' = -\operatorname{ctg} (\theta - \alpha_0)$. Роли характеристик при этом будут различными: на линии скольжения слабый разрыв скорости реализуется при сохранении непрерывности величины ω , на линии, ортогональной к линии скольжения, слабый разрыв скорости влечет за собой сильный разрыв ω . Аналогичные выводы справедливы и для сильных разрывов скоростей и интеграла от бесконечного разрыва ω . Если на некоторой кривой напряжения разрывны, то скорости будут также разрывными. Разрывы удовлетворяют (2.6), (2.7) в смысле обобщенных решений [7].



Фиг. 2

Случай скольжения по λ_2 сводится к предыдущему заменой α_0 на $-\alpha_0$.

3. Рассмотрим в качестве иллюстрации задачу об устойчивости откоса, нагруженного гладким штампом A_1A_2 (фиг. 2). Пусть на A_1A_2, A_1A_4 приложены нагрузки так, что $\sigma = \sigma^0 = \text{const}$ на $A_1A_2, \sigma = \sigma^0 \exp 2\operatorname{tg} \varphi \times (\psi^0 - \alpha_0 - \pi / 2)$ на A_1A_4 , где $\alpha_0 = \pi / 4 - \varphi / 2, \alpha_0 < \psi^0 < \pi / 2$. В этом случае в области $A_1A_2A_3A_4$ можно построить непрерывное поле напряжений [5]: $\sigma \equiv \sigma^0, \theta \equiv \pi / 2$ в $A_1A_2A_3, \sigma = \sigma^0 \exp 2\operatorname{tg} \varphi (\psi - \alpha_0 - \pi / 2), \theta = \psi - \alpha_0$ в области $A_1A_3A_4$, где (r, ψ) — полярная система координат. Предположим, что в результате потери устойчивости штамп опрокидывается с некоторой угловой скоростью $\Omega > 0: v_2 = \Omega (1 - x_1), x_2 = 0, |x_1| \leq 1$. Предположим также, что в области $A_1A_2A_3A_4$ к скольжению подготовлены только площадки семейства $x_2' = \operatorname{tg} (\theta + \alpha_0)$ и на границе $A_2A_3A_4$ выполняются условия прилипания. Так как линия $A_2A_3A_4$ не является характеристикой поля скоростей, то из условий на $A_2A_3A_4$ следует, что область $A_2A_3A_4A_6A_5$ будет оставаться неподвижной. На линии $A_2A_5A_6$ выполняется условие непрерывности нормальной скорости. Решение в области $A_1A_2A_5, A_1A_5A_6$ имеет вид ($\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2 \equiv 0$)

$$(3.1) \quad \begin{aligned} v_1 &= \Omega \operatorname{ctg} \alpha_0 (1 - x_1 + \operatorname{ctg} \alpha_0 x_2) \\ v_2 &= \Omega (1 - x_1 + \operatorname{ctg} \alpha_0 x_2) \\ v_r &\equiv 0 \\ v_\psi &\equiv \frac{\Omega}{\sin^2 \alpha_0} r \end{aligned}$$

Из (3.1) следует, что сильный разрыв касательной скорости может реализоваться только на круглоцилиндрической поверхности A_5A_6 и плоскости A_2A_5 .

