

УДК 532.526

## Устойчивость сверхзвукового пограничного слоя на поверхности с сублимирующим покрытием\*

С.А. Гапонов, Б.В. Смородский

*Институт теоретической и прикладной механики  
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*

E-mail: gaponov@itam.nsc.ru

Представлены результаты теоретического исследования характеристик сверхзвукового пограничного слоя на плоской пластине в потоке воздуха при числе Маха  $M = 2$  в условиях сублимации поверхности. В качестве материала сублимирующего покрытия был выбран нафталин ( $C_{10}H_8$ ). Расчеты показали, что с увеличением температуры поверхности массовый расход испарения нафталина также увеличивается. Это приводит к снижению температуры стенки по сравнению со случаем обтекания плоской пластины без сублимации. Большой молекулярный вес нафталина по сравнению с молекулярной массой воздуха и понижение температуры поверхности вследствие испарения материала стенки обуславливают увеличение плотности бинарной смеси, состоящей из воздуха и пара сублиманта, вблизи стенки. Такое изменение профилей пограничного слоя приводит к заметному уменьшению локальных скоростей роста неустойчивых возмущений, что подтверждается проведенными расчетами по линейной теории устойчивости. Обнаружено, что стабилизация пограничного слоя происходит при увеличении температуры сублимирующего покрытия и достигает максимума вблизи температуры тройной точки вещества покрытия. Проведены оценки чисел Рейнольдса перехода в соответствии с методом  $e^N$ , показавшие принципиальную возможность увеличения продольной протяженности ламинарного пограничного слоя на модели с сублимирующим покрытием поверхности.

**Ключевые слова:** сверхзвуковой пограничный слой, ламинарно-турбулентный переход, гидродинамическая устойчивость, бинарная газовая смесь, сублимация.

### Введение

Необходимость изучения пограничного слоя в условиях уноса массы с обтекаемой поверхности не вызывает сомнения. Она объясняется практической необходимостью теплозащиты летательных аппаратов (в частности, возвращаемых космических аппаратов) путём использования аэротермохимически разрушаемых покрытий. Важность таких исследований подчеркивалась в монографии [1], где упоминалось, что тепловая защита первых возвращаемых космических аппаратов была существенно преувеличена из-за недостатка знаний о некоторых важных аспектах аэротермодинамики в то время. Возникновение турбулентности в пограничном слое является одним из них.

Различные проблемы, так или иначе связанные с ламинарно-турбулентным переходом, широко исследуются во всем мире. Общепринято, что по крайней мере в условиях низкого внешнего шума ламинарно-турбулентный переход определяется неустойчивостью пограничного слоя. Основы теории устойчивости сжимаемых пограничных слоев были

\* Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013-2020 годы (проект АААА-А17-117030610125-7, № 0323-2018-0009), а также при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00070-а) и РНФ (проект № 17-19-01289).

заложены еще в начале 50-х годов прошлого века [2]. Последующее развитие исследования устойчивости сверхзвуковых пограничных слоев получили в работах [3–5]. Все они касались пограничных слоев однокомпонентного газа.

Устойчивость пограничных слоев с химическими реакциями впервые изучалась в работах [6, 7]. В них рассматривалась устойчивость пограничных слоев неравновесно диссоциирующего газа (кислорода и азота). Результаты этих исследований подробно изложены также в монографии [8]. Устойчивость гиперзвуковых пограничных слоев с химическими реакциями более общего вида изучалась в работах [9–14]. Устойчивость и ламинарно-турбулентный переход в условиях абляции материала поверхности практически не исследовались. В настоящее время известны только работы [15, 16] по устойчивости гиперзвуковых пограничных слоев на конусах в условиях уноса массы с обтекаемой поверхности. В этих работах рассматривались только двумерные возмущения при очень высоких числах Маха:  $M = 16$  и  $M = 20$ . Результаты этих расчетов никогда не были подтверждены экспериментами. Поэтому расширение теоретических исследований, начатых в этих работах, на развитие трехмерных возмущений при умеренных числах Маха представляется чрезвычайно важным, особенно с точки зрения возможностей экспериментальной проверки теории.

Многочисленные аналитические и численные исследования указывают на возможность качественного предсказания устойчивости и ламинарно-турбулентного перехода на основе простых свойств профилей средней скорости и температуры пограничного слоя. Поэтому в качестве первого шага в настоящей работе проводятся исследования влияния сублимации материала пластины на параметры сверхзвукового пограничного слоя. Полученные результаты затем используются для расчетов линейной устойчивости.

Высокотемпературную абляцию, характерную для условий реального полета спускаемого аппарата в атмосфере, довольно сложно и затратно воспроизводить в лабораторных условиях. Однако сублимация в условиях умеренных температур, которая может быть реализована в современных аэродинамических трубах, позволяет изучать физические процессы абляции в упрощенных условиях, в частности, в отсутствие химических реакций и иных высокотемпературных газодинамических явлений. Поэтому в представленной работе расчеты ламинарного пограничного слоя и его линейной устойчивости выполняются для нафталина ( $C_{10}H_8$ ), сублимация которого может происходить при умеренных температурах. В качестве примера использования нафталина в аэрофизическом эксперименте с абляцией поверхности модели можно привести работу [17]. Как показано в исследовании [18], визуализация ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое скользящего крыла с помощью сублимации нафталинового покрытия является вполне надежным экспериментальным методом. Визуализация потока с помощью лазерно-индуцированной флуоресценции сублимировавших паров нафталина применялась для турбулентного пограничного слоя с числом Маха 5 [19], было получено двумерное распределение концентрации паров нафталина в пограничном слое.

Благодаря сублимации поверхности происходит инжекция в пограничный слой стороннего газа (паров сублимировавшего вещества). В силу этого пограничный слой модели не является более однокомпонентным, а рассматривается далее как течение бинарной смеси газов. В более ранних работах авторов по устойчивости сверхзвуковых пограничных слоев бинарной смеси [20–24] было показано, что инжекция тяжелого инородного газа (с молекулярной массой больше, чем у воздуха) в пристенный подслой пограничного слоя через проницаемую (пористую) поверхность модели оказывает благоприятное влияние на устойчивость пограничного слоя. Теоретические результаты этих работ были позднее подтверждены экспериментами по устойчивости и переходу, выполненными в сверхзвуковой аэродинамической трубе Т-325 ИТПМ СО РАН [25, 26]. К сожалению, неотъемлемым свойством пористых проницаемых покрытий поверхности модели является естественная шероховатость [27], которая в некоторой степени

уменьшает полезное влияние инъекции тяжелого газа, поскольку шероховатость обычно способствует дестабилизации пограничного слоя. Поэтому дальнейшее развитие теоретического подхода [20–24] для изучения возможности и целесообразности применения сублимирующих покрытий с низкой величиной шероховатости для управления устойчивостью и, следовательно, переходом пограничного слоя, представляется логичным и выглядит многообещающим. В настоящей статье представлены первые результаты теоретического исследования устойчивости сверхзвукового пограничного слоя на плоской пластине в условиях сублимации поверхности.

### 1. Уравнения пограничного слоя

Рассматривается модель плоской пластины в потоке сжимаемого газа (воздуха). Предполагается, что поверхность модели покрыта веществом, способным сублимировать при умеренных температурах, т.е. осуществлять фазовый переход из твердого в газообразное состояние, минуя стадию плавления. В этом случае пары сублимирующего материала с молекулярным весом  $m_2$ , являющиеся примесью по отношению к основному газу с молекулярным весом  $m_1$ , проникают с поверхности модели в пограничный слой основного газа. Предположим, что процесс сублимации протекает достаточно медленно, и, следовательно, форму поверхности модели будем считать неизменной. Течение в пограничном слое не может в этом случае считаться однокомпонентным, а будет рассматриваться как пограничный слой бинарной смеси газов. Зависящая от времени динамика такой бинарной смеси вязких теплопроводных газов описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных, которую можно найти, например, в работе [8]. Из этих общих уравнений в исследовании [20] в приближении локальной автомодельности была выведена система для описания стационарного двумерного сверхзвукового пограничного слоя бинарной газовой смеси в отсутствие каких-либо химических реакций (см. также [23]). Указанные уравнения учитывают диффузию паров сублиманта поперек пограничного слоя и записываются следующим образом:

$$\frac{d}{dy} \left( \mu \frac{dU}{dy} \right) + F \frac{dU}{dy} = 0, \quad \frac{dq}{dy} = F \frac{dh}{dy} + (\gamma - 1) M_e^2 \mu \left( \frac{dU}{dy} \right)^2, \quad (1)$$

$$\frac{dj_1}{dy} = F \frac{dc_1}{dy}, \quad q = -\lambda \frac{dT}{dy} + (h_1 - h_2) j_1, \quad j_1 = -\rho D_{12} \frac{dc_1}{dy},$$

здесь  $y = y^* / \delta$  — координата по нормали к стенке,  $\delta = \sqrt{x \mu_e / U_e \rho_e}$  — масштаб длины Блазиуса, характеризующий толщину пограничного слоя плоской пластины,  $x$  — продольная координата (начало системы координат находится на передней кромке пластины),  $q(y) = \frac{\sqrt{x \mu_e / U_e \rho_e}}{\mu_e h_e} q^*$  — полный тепловой поток поперек пограничного слоя,  $c_1$  —

концентрация паров примеси,  $j = j^* \frac{\sqrt{x \mu_e / U_e \rho_e}}{\mu_e}$  — диффузионный массовый поток при-

меси поперек слоя,  $U = \frac{2}{\rho} \cdot \frac{dF}{dy}$  — продольная скорость (в направлении набегающего по-

тока),  $F$  — функция тока,  $h = h^* / (C_{p2} T_e)$  — энтальпия бинарной смеси,  $T = T^* / T_e$  — температура,  $C_{p2}, C_{p1}$  — теплоемкости основного газа (воздуха) и паров примеси соответственно,  $\mu = \mu^* / \mu_e$  — коэффициент вязкости бинарной смеси,  $\lambda = \lambda^* / (\mu_e C_{p2})$  — коэффициент

теплопроводности,  $D_{12} = \rho_e D_{12}^* / \mu_e$  — коэффициент бинарной диффузии; звездочка в верхнем индексе обозначает размерные переменные, а переменные без нее полагаются безразмерными; нижний индекс “e” отвечает (размерным) значениям, взятым на внешней границе пограничного слоя.

Граничные условия на сублимирующей поверхности записываются следующим образом:

$$U(0) = 0, \quad F(0) = -f_w, \quad f_w = \frac{G_w}{\rho_e U_e} \text{Re} = \frac{\rho_w V_w}{\rho_e U_e} \text{Re},$$

$$Q + G_w (h - h_1)_w + \left[ -\lambda \left( \frac{dT}{dy} \right) + (h_1 - h_2) j_1 \right]_w = 0, \quad (2)$$

$$f_w (1 - c_{1,w}) = -\rho_w D_{12,w} \left( \frac{\partial c}{\partial y} \right)_w,$$

где  $G_w$  — массовый поток паров сублимирующего вещества с поверхности,  $Q = H_{sg} G_w$  — энергия, расходуемая на испарение материала покрытия,  $H_{sg}$  — энтальпия сублимации (solid→gas),  $\text{Re} = \rho_e U_e \delta / \mu_e = \sqrt{\text{Re}_1 x}$  — число Рейнольдса, определяемое по масштабу Блазиуса. Нижний индекс “w” соответствует значениям, взятым на твердой поверхности.

Граничные условия на внешней границе пограничного слоя имеют вид

$$(U, T) \rightarrow 1, \quad c_1 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Массовый расход паров с поверхности можно определить с помощью уравнения Кнудсена–Ленгмюра [28]:

$$G_w = a_1 \frac{P_1^{\text{sat}} - P_1}{\sqrt{2\pi R T_w / m_1}}. \quad (4)$$

Видно, что  $G_w$  определяется разностью давления насыщенных паров сублиманта  $P_1^{\text{sat}}$  при температуре стенки  $T_w$  и  $P_1$  — парциального давления паров вещества непосредственно над поверхностью ( $y \rightarrow +0$ ). Здесь  $a_1$  — коэффициент аккомодации.

Давление насыщенных паров как функция температуры сублимирующего покрытия определяется уравнением Клапейрона–Клаузиуса [28]

$$\ln \left( \frac{P_1^{\text{sat}}}{P_{\text{TP},1}} \right) = \frac{H_{sg} m_1}{R} \left( \frac{1}{T_{\text{TP},1}} - \frac{1}{T_w} \right), \quad (5)$$

где  $P_{\text{TP},1}$ ,  $T_{\text{TP},1}$  — давление и температура паров сублиманта в тройной точке. Парциальное давление паров сублиманта определяется по формуле  $P_1 = \frac{c_1 m_2}{m_1 + (m_2 - m_1) c_1} P$ .

В работах [21–24] было показано, что наиболее важным параметром, влияющим на свойства пограничного слоя бинарной смеси, является безразмерный коэффициент инжекции  $f_w$  (2). Для автономности краевой задачи (1)–(3) необходимо выполнение постоянства коэффициента инжекции по продольной координате:  $f_w = \text{const}(x)$ . В случае медленной зависимости  $f_w = f_w(x)$  в рамках локально автономного приближения система (1)–(3) применяется локально на каждом шаге по продольной координате  $x$ . Для того чтобы управляющий коэффициент  $f_w$  в (2) был достаточно большим, необходимо,

согласно (4) и (5), поддерживать температуру сублимирующего покрытия близкой к температуре тройной точки. В настоящей работе такой нагрев поверхности был получен путем повышения температуры торможения потока  $T_0$ .

Расчеты коэффициентов вязкости и теплопроводности компонентов смеси, а также коэффициента диффузии паров примеси были выполнены с использованием модели потенциала Леннарда–Джонса в рамках кинетической теории [29]:

$$\mu_i = 2,6693 \cdot 10^{-6} \frac{\sqrt{T m_i}}{d_i^2 \Omega^{(2,2)}}, \quad \lambda_i = 0,0833 \frac{\sqrt{T/m_i}}{d_i^2 \Omega^{(2,2)}},$$

$$D_{12} = 1,858 \cdot 10^{-7} \frac{\sqrt{T^3 (1/m_1 + 1/m_2)}}{P d_{12}^2 \Omega^{(1,1)}},$$

где  $d_i$  — диаметры столкновений молекул,  $i = 1, 2$ ;  $\Omega^{(1,1)}$ ,  $\Omega^{(2,2)}$  — интегралы столкновения. Единицы измерения коэффициентов следующие:  $\mu_i$ , кг/(м·сек);  $\lambda_i$ , Вт/(м·К);  $D_{12}$ , м<sup>2</sup>/сек. Вязкость и теплопроводность бинарной смеси определялись по формулам работы [30]. Также учитывалась поправка Эйкена для расчета коэффициентов теплопроводности многоатомных газов.

В настоящей работе краевая задача для уравнений пограничного слоя бинарной смеси (1)–(3) интегрировалась численно с помощью метода Рунге–Кутты четвертого порядка. Применялись метод стрельбы и вложенные итерации Ньютона для удовлетворения граничным условиям. Уравнения пограничного слоя, граничные условия и численные методы, использованные в данном исследовании, представлены также в работе [31].

## 2. Линейные уравнения устойчивости

Линейная теория устойчивости для пограничного слоя бинарной смеси была разработана и представлена ранее в работе [23]. После линеаризации безразмерных уравнений движения вязкой теплопроводной бинарной газовой смеси для волновых возмущений вида  $\mathbf{q}(x, y, z, t) = \tilde{\mathbf{q}}(y) \exp i(\alpha x + \beta z - \alpha C t)$  в приближении локальной параллельности среднего течения можно вывести следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} i\alpha(U-C)\tilde{\rho} + \frac{d\rho}{dy}\tilde{v} + \rho\left(i(\alpha\tilde{u} + \beta\tilde{w}) + \frac{d\tilde{v}}{dy}\right) &= 0, \\ \rho\left(i\alpha(U-C)\tilde{u} + \frac{dU}{dy}\tilde{v}\right) &= -\frac{i\alpha\tilde{p}}{\gamma_e M_e^2} + \frac{\mu}{\text{Re}} \cdot \frac{d^2\tilde{u}}{dy^2}, \quad \rho i\alpha(U-C)\tilde{v} = -\frac{1}{\gamma_e M_e^2} \cdot \frac{d\tilde{p}}{dy}, \\ \rho i\alpha(U-C)\tilde{w} &= -\frac{i\beta\tilde{p}}{\gamma_e M_e^2} + \frac{\mu}{\text{Re}} \cdot \frac{d^2\tilde{w}}{dy^2}, \quad i\alpha(U-C)\tilde{c} + \frac{dc}{dy}\tilde{v} = \frac{\mu}{\text{Re Sm}} \cdot \frac{d^2\tilde{c}}{dy^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\rho\left(i\alpha(U-C)\tilde{h} + \frac{dh}{dy}\tilde{v}\right) = \frac{\gamma_e - 1}{\gamma_e} i\alpha(U-C)\tilde{p} + \frac{\mu}{\text{Re Pr}} \cdot \frac{d^2\tilde{h}}{dy^2} + \frac{\mu}{\text{Re}} (h_1 - h_2) \left(\frac{1}{\text{Sm}} - \frac{1}{\text{Pr}}\right) \frac{d^2\tilde{c}}{dy^2},$$

здесь  $(\alpha, \beta)$  — волновые числа возмущения в продольном и трансверсальном направлениях,  $\omega = \alpha C = \omega^* \delta / U_e = 2\pi f \delta / U_e$  — безразмерная частота возмущения,  $f$  — размерная частота в Герцах, которая связана с безразмерным частотным параметром  $\Omega$  соотношением  $\Omega = 2\pi f \mu_e / \rho_e U_e^2$ ,  $\text{Pr} = \mu C_p / \lambda$  — число Прандтля,  $\text{Sm} = \mu / \rho D_{12}$  — число Шмидта,  $\tilde{\mathbf{q}}(y) = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{p}, \tilde{h}, \tilde{c})^T$  — пульсации трех компонент скорости: давления, энтальпии

и концентрации примеси соответственно. При анализе пространственной задачи устойчивости предполагается, что  $\omega$  и  $\beta$  — вещественные числа, а  $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$  — комплексное. Мнимая часть продольного волнового числа ( $-\alpha_i > 0$ ) является скоростью пространственного нарастания возмущений. Очевидно, что система (6) может быть сведена к системе десяти обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которая решается при десяти однородных граничных условиях:

$$\left( \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{h}, f_w \tilde{c} + \rho_w D_{12} \frac{d\tilde{c}}{dy} \right) = 0 \text{ при } y = 0, \quad (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{h}, \tilde{c}) \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Численное интегрирование задачи на собственные значения (6) и (7) проводилось методом ортогонализаций [4, 8]. Волновое число  $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$  находилось как собственное значение задачи (6) и (7) с максимальной величиной  $-\alpha_i$ . Более подробную информацию об уравнениях устойчивости и используемых численных методах можно найти в работе [23].

### 3. Результаты расчетов

Расчеты пограничного слоя проводились для модели плоской пластины в потоке воздуха при числе Маха  $M = 2$ . Предполагалось, что поверхность модели покрыта слоем вещества, способного к чистой сублимации при умеренной температуре, в отсутствие других осложняющих явлений, таких как химические реакции, диссоциация и ионизация. Этим свойством обладают, например, сухой лед, камфара, йод. В настоящей работе будем рассматривать сверхзвуковой пограничный слой над пластиной, покрытой слоем нафталина ( $C_{10}H_8$ ). Это химическое соединение имеет следующие теплофизические

свойства:  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{128,17}{28,96} \approx 4,4$ ,  $C_{p1} = 165,7$  Дж/(моль·К),  $H_{sg} = 72,6$  кДж/моль [32],

$T_{TP,1} = 353,4$  К,  $P_{TP,1} = 1060$  Па [33]. Отметим, что энтальпия сублимации — довольно большая величина. Согласно приведенным выше величинам, количество тепла, необходимого для фазового перехода одного моля нафталина из твердого в газообразное состояние в процессе сублимации при постоянной температуре, эквивалентно энергии, необходимой для нагревания одного моля  $C_{10}H_8$  на  $\Delta T = H_{sg}/C_{p1} = 438$  градусов. Диаметр столкновений молекул нафталина, необходимый для расчета коэффициентов переноса бинарной смеси, составляет  $\sigma_1 \approx 6,45$  Å [34]. Выбор нафталина для настоящего исследования, помимо его благоприятных теплофизических свойств, обусловлен также тем, что  $C_{10}H_8$  является легко доступным и недорогим углеводородом.

Во всех представленных ниже результатах расчетов предполагалось, что значение давления торможения  $P_0 = 0,5$  бар, что является обычным для экспериментов по устойчивости и переходу пограничного слоя в сверхзвуковой аэродинамической трубе Т-325 ИТПМ СО РАН [25, 26]. В данном исследовании рассчитывались сверхзвуковой пограничный слой на плоской пластине и его линейная устойчивость при увеличении массового расхода паров сублиманта  $G_w$  за счет повышения температуры сублимирующего покрытия  $T_w$ , что достигалось путем повышения температуры торможения потока  $T_0$ . Рассчитанные с адиабатическим граничным условием (2) варианты сведены в таблицу, где столбцы содержат следующие значения: номера вариантов (которые используются также на рис. 1, 3–5 для обозначения номеров отдельных кривых), температуру торможения потока  $T_0$ , температуру поверхности  $T_w$  (температура адиабатической стенки, полученная в результате численного интегрирования задачи (1)–(3) для заданного значения  $T_0$ ), единичное число Рейнольдса  $Re_1$ .

Таблица  
Варианты параметров для расчета профилей  
пограничного слоя (см. рис.1)

№	$T_0$ , K	$T_w$ , K	$Re_1$ , млн/м
1	290	266	6,35
2	315	290	5,67
3	342	310	5,07
4	361	320	4,71
5	392	330	4,22
6	450	340	3,53
7	500	345	3,08
8	580	350	2,56

Изложение результатов расчетов начнем со свойств среднего течения. На рис. 1 приводятся рассчитанные профили пограничного слоя — безразмерной скорости  $U = U(y)$  (рис. 1a), температуры  $T = T(y)$  (рис. 1b), плотности  $\rho = \rho(y)$  (рис. 1c) и концентрации паров  $C_{10}H_8$   $c_1 = c_1(y)$  (рис. 1d) — для различных значений температуры торможения  $T_0$ . Можно видеть, что рост  $T_0$  приводит к незначительному уменьшению толщины пограничного слоя в безразмерном представлении (рис. 1a). Отметим также, что увеличение  $T_0$  приводит к росту вязкости смеси и, следовательно, к увеличению толщины  $\delta$ . Профили температуры  $T = T(y)$ , изображенные на рис. 1b, демонстрируют значительное уменьшение безразмерной температуры вблизи стенки  $T(0)$  с ростом  $T_0$ , несмотря на то, что размерная температура стенки увеличивается (см. таблицу). Небольшое уменьшение толщины пограничного слоя наблюдается и в профилях температуры. Профили плотности (рис. 1c) показывают значительное изменение: с ростом  $T_0$  от 290 до 580 К величина плотности смеси на стенке  $\rho_w = \rho(y=0)$  увеличивается более чем вдвое. На рис. 1d

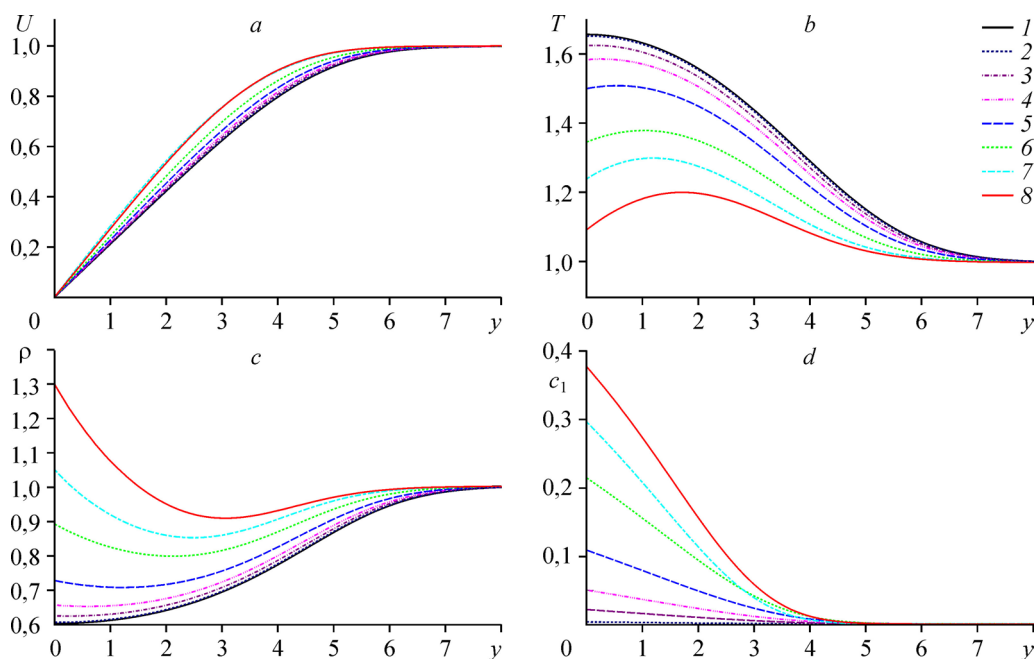


Рис. 1. Профили пограничного слоя бинарной смеси (воздух + пар  $C_{10}H_8$ ):  
безразмерные скорость  $U = U(y)$  (a), температура  $T = T(y)$  (b), плотность  $\rho = \rho(y)$  (c),  
концентрация примеси  $c_1 = c_1(y)$  (d) для различных значений температуры торможения  $T_0$ .  
Описание кривых 1–8 см. в таблице.

можно видеть, что рост массового расхода сублимации с увеличением  $T_0$  приводит к увеличению концентрации примеси на стенке  $c_{1,w} = c_1(0)$ . Однако  $c_1(y)$  быстро уменьшается с расстоянием от поверхности и на внешней границе пограничного слоя, определяемого профилями скорости (рис. 1а), становится пренебрежимо малым. Таким образом, в представленном диапазоне параметров инжекция паров может считаться слабой, поскольку примесь (испарившееся вещество) не выходит за пределы пограничного слоя.

На рис. 2а, 2б показаны размерный массовый поток сублимирующего вещества с поверхности  $G_w$  и безразмерный коэффициент инжекции  $f_w$  как функции продольной координаты  $x$  для различных значений единичного числа Рейнольдса  $Re_1$ . Итеративное решение краевой задачи (1)–(3) для среднего течения показывает, что  $G_w$  не является константой, а уменьшается вниз по потоку (рис. 2а). Массовый расход сублимации уменьшается также с увеличением единичного числа Рейнольдса. Напротив, коэффициент инжекции  $f_w$  только вблизи передней кромки пластины показывает некоторую зависимость от  $x$  (рис. 2б), однако достаточно быстро выходит на практически постоянные значения, не зависящие от продольной координаты, по крайней мере, в представленном диапазоне параметров. То есть при движении вниз по течению пограничный слой достаточно быстро подстраивается и выходит на автомодельный режим. Таким образом, рис. 2б дает апостериори обоснование приближения локальной автомодельности (1), используемое в настоящей работе для расчета сверхзвукового пограничного слоя на сублимирующей поверхности. Определим характерную величину параметра инжекции (рис. 2б) как  $f_w \approx 0,2$ . Тогда из определения  $f_w$  в (2) следует, что  $\rho_w V_w \ll \rho_e U_e$ , поскольку величина числа Рейнольдса в области линейной неустойчивости  $Re > 500$ . Наконец, в силу того, что  $\rho_w / \rho_e \approx 1$  (рис. 1с), то  $V_w / U_e \ll 1$ , что оправдывает приближение параллельного течения, используемого для расчетов устойчивости, выполненных в представленной работе.

На рис. 3 приводятся результаты расчетов линейной устойчивости. Здесь показаны скорости пространственного роста двумерных ( $\beta = 0$ ) возмущений как функции частоты для различных значений температуры торможения потока  $T_0$  при  $x = 100$  мм. Номера кривых соответствуют номерам расчетных вариантов, представленных в таблице. Кривая 1 соответствует результатам устойчивости пограничного слоя, рассчитанным для самой

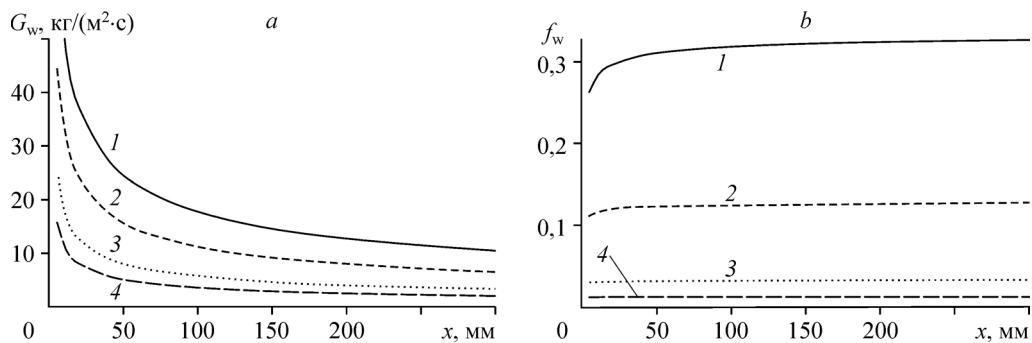


Рис. 2. Размерный массовый поток сублимации с поверхности  $G_w$  (а) и безразмерный коэффициент инжекции  $f_w$  (б) в зависимости от продольной координаты  $x$  для различных значений единичного числа Рейнольдса.

$$Re_1 \cdot 10^{-6} = 2,5 (1), 6,6 (2), 25,4 (3), 63,6 (4) \text{ м}^{-1}.$$



Рис. 3. Скорости пространственного нарастания двумерных возмущений в зависимости от частоты  $f$  для различных значений температуры торможения  $T_0$ .

Описание кривых 1–8 см. в таблице.

низкой температуры торможения, когда влиянием сублимации на устойчивость можно практически пренебречь. Частотный диапазон неустойчивости в этом случае составляет  $6 < f < 25$  кГц, а максимальной скоростью усиления  $-\alpha_{i,\max} \approx 4,6 \text{ м}^{-1}$

обладает возмущение с частотой  $f_{\max} \approx 16,5$  кГц. Рост температуры торможения приводит к монотонному уменьшению скоростей усиления всего частотного спектра и уменьшению  $f_{\max}$ . Уже при  $T_w = 330 \text{ К}$  ( $T_0 = 392 \text{ К}$ , вариант 5 в таблице) достигается полная стабилизация пограничного слоя. Скорость нарастания возмущений всех частот становится отрицательной ( $-\alpha_i < 0$ ). Это означает, что линейные двумерные возмущения устойчивы, и их амплитуда уменьшается вниз по течению. Продолжающийся рост  $T_0$  вызывает дальнейшее монотонное снижение скоростей усиления во всем частотном диапазоне (кривые 6–8 на рис. 3).

На рис. 3 представлены данные по скорости нарастания только для двумерных возмущений, которые не являются наиболее быстрорастущими в пограничном слое при числе Маха 2. Представим теперь характеристики линейной устойчивости сверхзвукового пограничного слоя при наличии трехмерных возмущений. На рис. 4а, 4б показаны диаграммы устойчивости пограничного слоя в виде изолиний скоростей пространственного роста на плоскости: угол ориентации волнового вектора  $\chi = \arctan(\beta/\alpha_r)$  – размерная частота  $f$  [кГц]. Представление результатов в размерном виде связано с возможностью их последующего использования в экспериментах. Соответствующие безразмерные величины  $\Omega$  и  $\text{Re}$  (см. обозначения к (2), (6)) легко устанавливаются с помощью таблицы. Расчеты проводились для значения продольной координаты  $x = 100 \text{ мм}$  и температуры

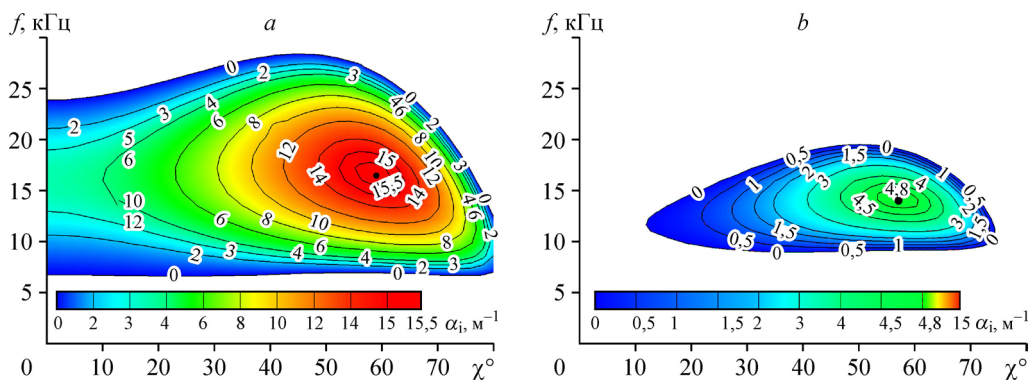
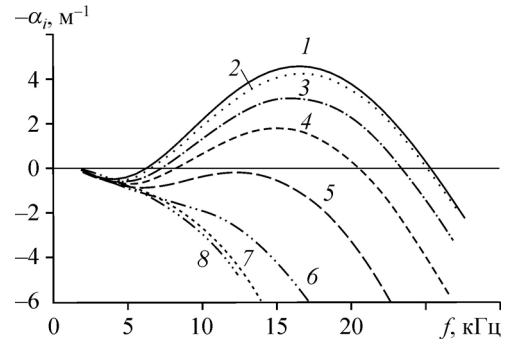


Рис. 4. Диаграммы устойчивости сверхзвукового пограничного слоя по отношению к трехмерным возмущениям: изолинии скоростей пространственного роста  $-\alpha_i = -\alpha_i(x, f) [\text{м}^{-1}]$  на адиабатической поверхности при  $T_0 = 392 \text{ К}$ ,  $x = 100 \text{ мм}$  в отсутствие сублимации (а) и на нафталиновом покрытии при  $T_w = 330 \text{ К}$  (вариант 5 в таблице) (б).

торможения потока  $T_0 = 392$  К (вариант 5 в таблице). Область на плоскости  $(\chi, f)$ , ограниченная кривой  $-\alpha_i = 0$ , представляет собой диапазон неустойчивости ( $-\alpha_i > 0$ ), внутри которого распространяющиеся вниз по течению возмущения нарастают по амплитуде. На рис. 4а приведена диаграмма устойчивости для пограничного слоя на плоской пластине в отсутствие сублимации поверхности, а на рис. 4б представлена аналогичная диаграмма для пластины с нафталиновым покрытием. Цветовая схема на диаграммах устойчивости рис. 4а, 4б принята одинаковой, чтобы упростить сравнение расчетных результатов. Видно, что область неустойчивости заметно сжимается под действием инжекции в пристенный подслой тяжелых паров нафталина. В отсутствие сублимации максимальное усиление ( $-\alpha_{i,\max} \approx 15,7$  м<sup>-1</sup>) имеет возмущение с  $f_{\max} \approx 16$  кГц и  $\chi_{\max} \approx 59^\circ$  (рис. 4а), в то время как сублимация нафталина уменьшает  $-\alpha_{i,\max}$  до  $-\alpha_{i,\max} \approx 4,9$  м<sup>-1</sup> при  $f_{\max} \approx 14$  кГц и  $\chi_{\max} \approx 57^\circ$  (рис. 4б). Двумерные возмущения ( $\chi = 0$ ), слабо неустойчивые при нулевой инжекции, полностью стабилизируются под воздействием инжекции паров нафталина в пограничный слой, как было показано на рис. 3. Диапазон неустойчивых частот уменьшается с  $7 < f < 28$  (рис. 4а) до  $9 < f < 19$  (рис. 4б) в основном вследствие стабилизации высоких частот. Таким образом, максимальное значение скорости роста  $-\alpha_{i,\max} \approx 15,7$  на выбранном  $\chi$  уменьшается в 3,2 раза за счет сублимации нафталинового покрытия. Представленная модификация диаграммы устойчивости пограничного слоя (рис. 4а → рис. 4б) под влиянием сублимации поверхности в условиях адиабатической стенки демонстрирует заметную стабилизацию пограничного слоя.

Рисунок 5 позволяет сравнить скорости пространственного усиления трехмерных возмущений выбранной частоты  $f = 15$  кГц (см. рис. 4) в зависимости от угла ориентации волнового вектора  $\chi$  для различных значений  $T_0$ . Скорости роста пульсаций на сублимирующей поверхности показаны штриховыми линиями, а в отсутствие сублимации — сплошными. Можно видеть, что при самой низкой из рассмотренных значений температуры торможения потока заметного влияния сублимации не наблюдается, так как сплошные и штриховые линии 1 практически совпадают. Возмущение с  $\chi \approx 60^\circ$  имеет наибольшую скорость роста  $-\alpha_{i,\max} \approx 21$  м<sup>-1</sup>, что типично для сверхзвукового пограничного слоя. Видно, что повышение температуры торможения потока вызывает монотонное снижение инкрементов роста для всех  $0 \leq \chi < 80^\circ$ . Сравнивая сплошные и пунктирные кривые одного цвета и с одинаковыми номерами на рис. 5, можно проследить влияние сублимации нафталинового покрытия на скорости роста неустойчивых возмущений. Рост температуры торможения от  $T_0 = 290$  К до  $T_0 = 580$  К в отсутствие сублимации (сплошные кривые 1–8) приводит к снижению максимальных скоростей роста до  $-\alpha_{i,\max} \approx 10$  м<sup>-1</sup>, т.е. приблизительно в два раза. В то же время пограничный слой на

сублимирующем покрытии полностью

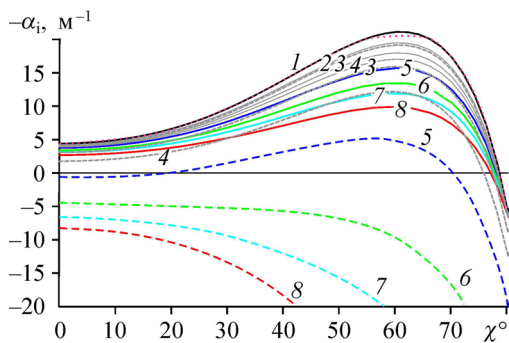


Рис. 5. Скорости пространственного роста  $-\alpha_i$  трехмерных возмущений в зависимости от угла  $\chi$  для различных значений  $T_0$  (нумерация в соответствии с таблицей) при  $f = 15$  кГц и  $x = 100$  мм; штриховые линии — на сублимирующей поверхности, сплошные — в отсутствие сублимации.

стабилизируется ( $-\alpha_{i,\max} < 0$ ) при температуре торможения около  $T_0 \approx 420$  К (в интервале между кривыми 5 и 6 на рис. 5).

На рис. 6*a*, 6*b* приведены следующие диаграммы устойчивости: показаны изолинии скоростей пространственного роста наиболее неустойчивых трехмерных возмущений с  $\chi = 60^\circ$  на плоскости: продольная координата  $x$  – размерная частота  $f$  [кГц]. Расчеты проводились как и ранее, для  $T_0 = 392$  К (вариант 5 из таблицы). Аналогично рис. 4*a*, 4*b*, 6*a* демонстрируют диаграмму в отсутствие сублимации поверхности, тогда как на рис. 6*b* представлена аналогичная диаграмма для пластины с нафталиновым покрытием. Сравнение рис. 6*a* и 6*b* показывает, что испарение нафталина и вызванная этим инжекция тяжелых паров в пограничный слой приводят к тому, что область неустойчивости на нафталиновом покрытии уменьшается. Диапазон неустойчивых частот сокращается почти в два раза за счет стабилизации высокочастотных возмущений. В отсутствие сублимации максимальному усилению  $-\alpha_{i,\max} \approx 18 \text{ м}^{-1}$  соответствует возмущение с  $f_{\max} \approx 30$  кГц при  $x \approx 40$  мм ( $Re \approx 430$ ) (рис. 6*a*), тогда как на нафталине наибольшим инкрементом  $-\alpha_{i,\max} \approx 5 \text{ м}^{-1}$  обладает возмущение с  $f_{\max} \approx 10$  кГц при  $x \approx 150$  мм ( $Re \approx 800$ ) (рис. 6*b*). При этом число Рейнольдса потери устойчивости, определяемое по масштабу Блазиуса, увеличивается с  $Re_c \approx 250$  до  $Re_c \approx 410$  ( $T_w = 330$  К, вариант 5 в таблице). Налицо заметная стабилизация течения, т.к. размерная максимальная скорость пространственного нарастания  $-\alpha_{i,\max}$  уменьшается более чем в три раза на сублимирующей поверхности. И это не предел: в потоке с большими значениями температуры торможения стабилизация будет еще сильнее. Таким образом, рассчитанные по линейной теории устойчивости диаграммы устойчивости (рис. 6*a*, 6*b*) демонстрируют совокупное стабилизирующее действие сублимирующего нафталинового ( $C_{10}H_8$ ) покрытия на устойчивость сверхзвукового пограничного слоя. Проиллюстрируем этот вывод также и расчетами амплитудных кривых.

Теория линейной устойчивости дает возможность оценить положение ламинарно-турбулентного перехода с помощью хорошо известного метода  $e^N$  [35]. В соответствии с этим методом положение ламинарно-турбулентного перехода определяется согласно тому, что в нем коэффициент усиления возмущений достигает определенного порогового значения  $e^N$ , где  $N$ -фактор перехода рассчитывается как интеграл от локальных скоростей

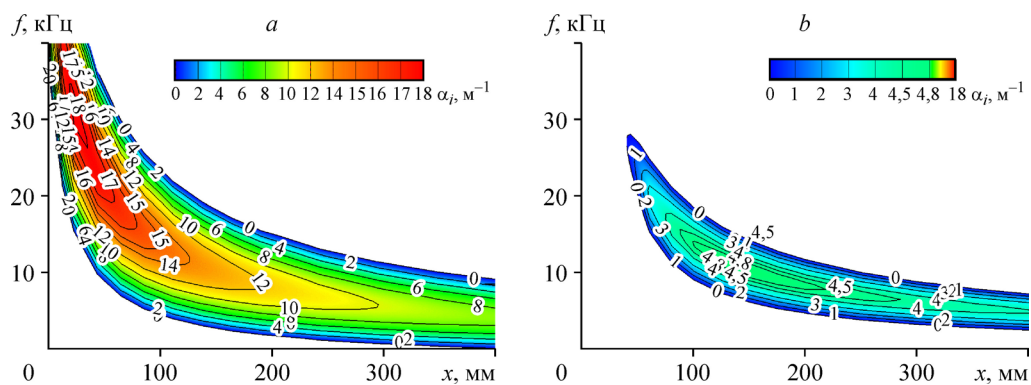


Рис. 6. Диаграммы устойчивости сверхзвукового пограничного слоя по отношению к наиболее неустойчивым трехмерным возмущениям с  $\chi = 60^\circ$ : изолинии скоростей пространственного роста  $-\alpha_i = -\alpha_i(x, f)$  [ $\text{м}^{-1}$ ] на адиабатической поверхности при  $T_0 = 392$  К в отсутствие сублимации (а) и на нафталиновом покрытии при  $T_w = 330$  К (вариант 5 в таблице) (б).

роста возмущений выбранных частот:  $N_t = - \int_{\text{Re}_0}^{\text{Re}_t} 2 \text{Im}(\alpha) d \text{Re}$ . Изначально метод был

разработан для двумерных несжимаемых пограничных слоев. Путем корреляции рассчитанных по ЛТУ  $N$ -факторов и экспериментальных данных по переходу было определено, что переход происходит при  $N_t \approx 10$ . Целесообразность применения метода  $e^N$  для теоретической оценки положения перехода состоит именно в предположении постоянства  $N_t$  ( $N_t = \text{const}$ ). Многочисленные последующие попытки применения указанного подхода для пограничных слоев в различных условиях показали, что при низком уровне внешних возмущений метод  $e^N$  позволяет оценивать и прогнозировать положение перехода. Однако значение  $N$ -фактора в каждом конкретном случае для различных типов неустойчивостей несколько варьировало:  $7 < N_t < 11$ . Было обнаружено также, что для сверх- и гиперзвуковых пограничных слоев  $N$ -фактор перехода зависит от уровня возмущений набегающего потока в рабочей части сверхзвуковой аэродинамической трубы так, что  $N_t$  уменьшается от значения 8,1 до 2,6 при повышении уровня внешних возмущений от 0,1 % до 1 % [36]. В настоящей работе приводятся результаты расчетов по методу  $e^N$  для того, чтобы качественно проиллюстрировать стабилизирующее действие применения сублимирующего покрытия для управления положением ЛТП, не ограничиваясь при этом каким-то конкретным значением  $N_t$ , которое зависит, как было указано выше, от уровня шума в каждой конкретной установке.

На рис. 7а, 7б показаны рассчитанные в соответствии с методом  $e^N$  кривые нарастания амплитуд наиболее быстро растущих трехмерных возмущений (с  $\chi \approx 60^\circ$ ) различных частот в зависимости от числа Рейнольдса на пластине в отсутствие сублимации (рис. 7а) и на нафталиновом покрытии ( $T_w = 330$  К, вариант 5 в таблице) (рис. 7б). Приведенные на графиках кривые нарастания рассчитаны для частот  $30 \geq f \geq 2$  кГц (рис. 7а) и  $10 \geq f \geq 0,25$  кГц (рис. 7б). Видно, что  $N$ -фактор, который фактически является огибающей этих кривых, монотонно нарастает вниз по течению. Сравнение рис. 7а и 7б между собой показывает, что  $N$ -фактор на сублимирующем покрытии при выбранных для расчета условиях достигает тех же значений, что и без сублимации, при примерно в 2,5 раза больших числах Рейнольдса. Так,  $N_t = 10$  достигается при  $\text{Re} \approx 4800$  без сублимации (рис. 7а) и  $\text{Re} \approx 12000$  на нафталиновом покрытии (рис. 7б). Отметим также заметный сдвиг диапазона усиления в более низкочастотную область на сублимирующем покрытии.

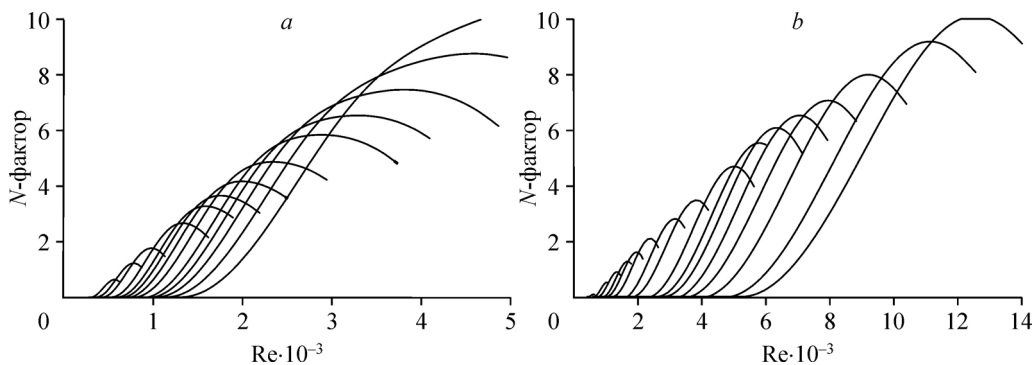


Рис. 7. Кривые нарастания амплитуд возмущений, рассчитанные по методу  $e^N$  на адиабатической поверхности при  $T_0 = 392$  К в отсутствие сублимации (а) и на нафталиновом покрытии при  $T_w = 330$  К (вариант 5 в таблице) (б).

Наконец, стоит отметить, что для визуализации нафталинового пограничного слоя было достаточно иметь молярную долю  $C_{10}H_8$  порядка  $1 \cdot 10^{-4}$  [19]. Однако в настоящем исследовании установлено, что для того чтобы получить заметное влияние сублимации поверхности на устойчивость пограничного слоя в принятых условиях, необходимо иметь массовую концентрацию паров на стенке на три порядка больше:  $c_{1,w} > 20\%$  (см. рис. 4b и кривые 5–8 на рис. 1d, 3, 5). Это возможно только при достаточно высоких (хотя и умеренных) значениях  $T_w$ .

### Выводы

Выполнены расчеты основного течения и его линейной устойчивости для пограничного слоя при числе Маха 2 на модели плоской пластины с нафталиновым ( $C_{10}H_8$ ) покрытием. Установлено, что инжекция тяжелых паров примеси в пристенный подслои пограничного слоя вследствие испарения материала поверхности приводит к увеличению плотности пограничного слоя бинарной смеси (воздух + нафталин) вблизи сублимирующей стенки. Расчеты линейной устойчивости такого модифицированного течения выявили возможность значительного снижения локальных скоростей усиления линейных волновых возмущений, когда температура поверхности модели близка к температуре тройной точки  $C_{10}H_8$ . Расчетами кривых нарастания амплитуд возмущений, проведенными в соответствии с известным, основанным на линейной теории устойчивости методом  $e^N$ , установлена возможность значительной стабилизации пограничного слоя. В частности, в потоке с температурой торможения 392 К рассчитанное по методу  $e^N$  число Рейнольдса перехода увеличивается более чем вдвое за счет применения сублимирующего нафталинового покрытия. Это означает значительную стабилизацию пограничного слоя и более чем четырехкратное увеличение протяженности ламинарного течения в сверхзвуковом пограничном слое на нафталиновом покрытии.

### Список литературы

1. Тирский Г.А. Гиперзвуковая аэродинамика и тепломассообмен спускаемых космических аппаратов и планетных зондов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 548 с.
2. Лить Ц.Ц. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Иностран. лит., 1958. 194 с.
3. Mack L.M. Boundary layer stability theory // Report 900-277 Rev. A., Pasadena, 1969. 388 p.
4. Гапонов С.А., Маслов А.А. Развитие возмущений в сжимаемых потоках. Новосибирск: Наука, 1980. 144 с.
5. Жигулев В.Н., Тумин А.М. Возникновение турбулентности. Динамическая теория возбуждения развития неустойчивостей в пограничных слоях. Новосибирск: Наука, 1987. 282 с.
6. Петров Г.В. Устойчивость пограничного слоя газа с химическими реакциями на каталитической поверхности // Физика горения и взрыва. 1974. Т. 10, № 6. С. 797–801.
7. Петров Г.В. Устойчивость пограничного слоя каталитически рекомбинирующего газа // Прикл. механика и технич. физика. 1978. № 1. С. 40–45.
8. Гапонов С.А., Петров Г.В. Устойчивость пограничного слоя неравновесно диссоциирующего газа. Новосибирск: Наука, 2013. 95 с.
9. Malik M.R., Anderson E.C. Real gas effects on hypersonic boundary-layer stability // Phys. Fluids. A. 1991. No. 3. P. 803–821.
10. Stuckert G.K. Linear stability of hypersonic, chemically reacting viscous flows // PhD thesis. Arizona State University, 1991. 716 p.
11. Stuckert G.K., Reed H.L. Linear disturbances in hypersonic, chemically reacting shock layers // AIAA J. 1994. Vol. 32. P. 1384–1394.
12. Chang C.L.H., Vinh H., Malik M.R. Hypersonic boundary-layer stability with chemical reactions // AIAA Paper. 1997. No. 1997–2012.
13. Hudson M.L., Chokani N., Candler G.V. Linear disturbances in hypersonic, chemically reacting shock layers // AIAA J. 1997. Vol. 35. P. 958–964.
14. Johnson H.B., Seipp T.G., Candler G. Numerical study of hypersonic reacting boundary layer transition on cones // Phys. Fluids. 1998. Vol. 10. P. 2676–2685.
15. Mortensen C., Zhong X. Simulation of second-mode instability in a real-gas hypersonic flow with graphite ablation // AIAA J. 2014. Vol. 52, No. 8. P. 1632–1652.

16. **Mortensen C., Zhong X.** Real gas and surface-ablation effects on hypersonic boundary-layer instability over a blunt cone // *AIAA J.* 2016. Vol. 52, No. 3. P. 976–994.
17. **Charwat A.F.** Exploratory studies on the sublimation of slender camphor and naphthalene models in a supersonic wind-tunnel // Memorandum RM-5506-ARPA. 1968. 66 p.
18. **Radeztsky R.H., Reibert M.S., Saric W.S.** Effect of isolated micron-sized roughness on transition in swept-wing flows // *AIAA J.* 1999. Vol. 37, No. 11. P. 1370–1377.
19. **Combs C.S., Clemens N.T., Danehy P.M., Murman S.M.** Heat-shield ablation visualized using naphthalene planar laser-induced fluorescence // *J. Sci. Res.* 2017. Vol. 54, No. 2. P. 476–494.
20. **Гапонов С.А., Смородский Б.В.** Ламинарный сверхзвуковой пограничный слой бинарной смеси газов // *Вестн. НГУ. Сер. Физика.* 2016. Т. 11, № 1. С. 5–15.
21. **Гапонов С.А., Смородский Б.В.** On stability of the supersonic boundary layer with a foreign gas injection // 18th Intern. Conf. on the Methods of Aerophysical Research, ICMAR-2016, Russia, Perm, 27 Jun.-3 Jul., 2016: AIP Conference Proceedings. 2016. Vol. 1770, S. 1. P. 030047-1–030047-9.
22. **Гапонов С.А., Смородский Б.В.** Supersonic boundary layer of binary mixture and its stability // *Int. J. Mechanics.* 2016. Vol. 10. P. 312–319.
23. **Гапонов С.А., Смородский Б.В.** Control of supersonic boundary layer and its stability by means of foreign gas injection through the porous wall // *Int. J. Theoret. Appl. Mech.* 2016. Vol. 1. P. 97–103.
24. **Гапонов С.А., Смородский Б.В.** Supersonic boundary layer under foreign gas injection and its stability // Proceedings of the XXV Conf. on High-Energy Processes in Condensed Matter (HEPCM-2017): Dedicated to the 60th anniversary of the Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Russia, Novosibirsk, 5–9 Jun., 2017: AIP Conference Proceedings. S. 1.: AIP Publishing: 1893. 2017. No. 1. P. 030087-1–030087-10.
25. **Lysenko V.I., Smorodsky B.V., Ermolaev Y.G., Gaponov S.A., Zoubkov N.N., Kosinov A.D.** Experimental investigation of influence of heavy gas injection into supersonic boundary layer on laminar-turbulent transition // Proceedings of the XXV Conference on High-Energy Processes in Condensed Matter (HEPCM-2017): Dedicated to the 60th anniversary of the Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Russia, Novosibirsk, 5–9 Jun., 2017: AIP Conference Proceedings. S. 1.: AIP Publishing: 1893. 2017. P. 030077-1–030077-10.
26. **Лысенко В.И., Смородский Б.В., Ермолаев Ю.Г., Косинов А.Д.** Экспериментальное исследование влияния инжекции тяжелого газа в сверхзвуковой пограничный слой на его устойчивость // *Теплофизика и аэромеханика.* 2018. Т. 25, № 2. С. 183–190.
27. **Lysenko V.I., Gaponov S.A., Smorodsky B.V., Ermolaev Y.G., Kosinov A.D., Semionov N.V.** Combined influence of coating permeability and roughness on supersonic boundary layer stability and transition // *J. Fluid Mech.* 2016. Vol. 798. P. 751–773.
28. **Полежаев Ю.В., Юревич Ф.Б.** *Тепловая защита.* М.: Энергия, 1976. 362 с.
29. **Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р.** *Молекулярная теория газов и жидкостей.* М.: Иностран. лит., 1961. 930 с.
30. **Дорренс У.Х.** *Гиперзвуковые течения вязкого газа.* М.: Мир, 1966. 439 с.
31. **Гапонов С.А., Смородский Б.В.** Влияние сублимации материала поверхности на параметры сверхзвукового пограничного слоя // *Сибирский физический журнал.* 2019. Т. 14, № 1. С. 25–39.
32. **Dean J.A.** *Lange's handbook of chemistry.* N.W.: McGraw-Hill, 1999. 1291 p.
33. **Haynes W.M., Lide D.R., Bruno T.J.** *CRC handbook of chemistry and physics.* CRC Press. 2017. 2643 p.
34. **Li F., Lee J., Bernstein E.R.** Spectroscopy of naphthalene in simple molecular liquids // *J. Phys. Chem.* 1983. Vol. 87, No. 7. P. 1175–1180.
35. **Van Ingen J.L.** A suggested semiempirical method for the calculation of the boundary layer transition region // VTH-74, Delft University of Technology, 1956. 18 p.
36. **Malik M.R.** Prediction and control of transition in supersonic and hypersonic boundary layers // *AIAA J.* 1989. Vol. 27, No. 11. P. 1487–1493.

*Статья поступила в редакцию 28 мая 2019 г.,  
после доработки — 28 мая 2019 г.,  
принята к публикации 6 ноября 2019 г.*