УДК 519.872

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МНОГОФАЗНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ВЫСОКОИНТЕНСИВНЫМ РЕКУРРЕНТНЫМ ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ

А. Н. Моисеев, А. А. Назаров

Томский государственный университет,
634050, г. Томск, просп. Ленина, 36
E-mail: alexander-moiseev@mail.ru

Представлено исследование многофазной системы массового обслуживания с неограниченным числом приборов на каждой фазе, высокоинтенсивным рекуррентным входящим потоком и произвольным временем обслуживания. Показано, что в условии неограниченно растущей интенсивности входящего потока многомерное распределение вероятностей числа приборов, занятых обслуживанием на фазах системы, можно аппроксимировать многомерным нормальным распределением. Получены вектор математических ожиданий и матрица ковариаций этого распределения.

Ключевые слова: многофазные системы массового обслуживания, высокоинтенсивный рекуррентный поток, метод асимптотического анализа.

Введение. Многие задачи, решаемые с использованием моделей массового обслуживания, предполагают поэтапную обработку заявок входящего потока. Модели таких задач представляют в виде многофазных систем массового обслуживания [1].

В настоящее время число публикаций по данной тематике неуклонно растёт, однако большинство из них посвящено исследованию моделей многофазных систем с пуассоновским входящим потоком либо систем с двумя фазами обслуживания [2–5]. В предлагаемой работе представлено исследование немарковской многофазной системы массового обслуживания с произвольным количеством фаз, входящим рекуррентным потоком, неограниченным числом приборов на каждой фазе и произвольным временем обслуживания. Такие модели могут применяться при исследовании систем передачи информации с последовательной обработкой сообщений [6, 7]. Каждая фаза этой системы обеспечивает один определённый этап обработки сообщений и представляет собой совокупность большого числа обрабатывающих устройств.

Постановка задачи. Рассмотрим многофазную систему массового обслуживания с высокоинтенсивным рекуррентным входящим потоком [8]. Система состоит из K фаз, имеющих неограниченное число приборов, связанных между собой последовательно. Время обслуживания заявок на каждой фазе является случайной величиной, определяемой функцией распределения $B_k(x)$, где k — номер фазы ($k = \overline{1, K}$). После завершения обслуживания на k-й фазе ($k = \overline{1, K-1}$) заявка переходит для обслуживания на следующую фазу, а после завершения обслуживания на K-й фазе покидает систему.

Входящий высокоинтенсивный рекуррентный поток задан функцией распределения $A(x)$ и скалярным большим параметром N таким образом, что величина τ длин интервалов между моментами наступления событий этого потока определяется функцией распределения вида $\mathrm{P}\{\tau < x\} = A(Nx)$, поэтому его интенсивность составляет λN, где

$$\lambda = 1 \Big/ \int\limits_0^\infty [1 - A(x)]dx.$$

В теоретических исследованиях, применяя метод асимптотического анализа [9], будем полагать, что $N \to \infty$.

Ставится задача нахождения K-мерного совместного распределения вероятностей числа приборов, занятых на фазах рассматриваемой системы массового обслуживания. Решение этой задачи выполним, применяя метод многофазного динамического просеивания, представленный в данной работе, а также модификацию метода асимптотического анализа из [9] в предельном условии неограниченно растущей интенсивности входящего потока.

Метод многофазного динамического просеивания. Изобразим $K+1$ параллельных осей времени (см. рисунок), пронумерованных от 0 до K. Оси под номерами от 1 до K будут соответствовать фазам системы с такими же номерами, а ось под номером 0 использоваться для изображения событий входящего потока сети (события помечены крестами на оси).

Пусть зафиксирован некоторый момент времени T. Обозначим через $S_k(t)$ при $t \le T$, $k = \overline{1, K}$ вероятность того, что заявка входящего потока, поступившая в систему в момент времени t, в момент T будет обслуживаться на k-й фазе. Через $S_0(t)$ обозначим вероятность того, что до момента T заявка завершила обслуживание в системе, т. е. прошла обслуживание на всех фазах и покинула систему.

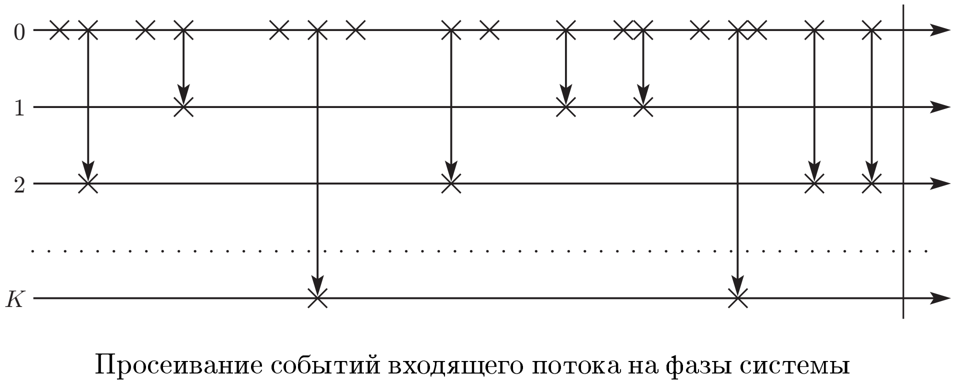
Вероятности $S_k(t)$, $k = \overline{1, K}$, будем называть вероятностями просеивания события входящего потока на k-ю ось. Совокупность событий, порождённых таким просеиванием на K осях времени будем называть K-мерным просеянным потоком. С вероятностью $S_0(t)$ рассматриваемая заявка покинет систему, завершив обслуживание до момента времени T. Такие заявки мы исключаем из рассмотрения.

Очевидно, что для вероятностей $S_k(t)$ и $S_0(t)$ при любом $t \le T$ выполняется равенство

$$S_0(t) = 1 - \sum_{k=1}^{K} S_k(t).$$

Заметим, что на k-й оси времени реализованы моменты поступления в систему тех и только тех заявок, которые в момент T будут находиться на обслуживании в k-й фазе системы.

Основная идея метода динамического просеивания для многофазной системы массового обслуживания заключается в следующем. Обозначим через $i_k(T)$ число заявок, обслуживаемых на k-й фазе системы в момент времени T, а через $n_k(t)$ — число событий, наступивших на k-й оси времени просеянного потока до момента t. Допустим, что в некоторый начальный момент времени t_0 система свободна (в ней нет ни одной заявки), тогда в силу



Просеивание событий входящего потока на фазы системы способа построения рассматриваемого K-мерного просеянного потока при всех $k = \overline{1,K}$ выполняются равенства

$$n_k(T) = i_k(T), \tag{1}$$

которые являются основными для получения результатов в методе многофазного динамического просеивания потока.

Далее, выполняя исследование построенного многомерного просеянного потока, т. е. K-мерного случайного процесса $\mathbf{n}(t) = \{n_1(t), n_2(t), \dots, n_K(t)\}^T$, и рассматривая его характеристики в момент времени $t = T$, на основе равенств (1) найдём соответствующие вероятностные характеристики числа занятых приборов, или сечения K-мерного случайного процесса $\mathbf{i}(t) = \{i_1(t), i_2(t), \dots, i_K(t)\}^T$ в момент времени $t = T$. При $t_0 = -\infty$ эти характеристики будут являться характеристиками стационарного распределения процесса $\mathbf{i}(t)$, функционирующего в стационарном режиме.

Так как выбор величины T, вообще говоря, произволен, то для упрощения математических выкладок полагаем $T = 0$. Тогда длина интервала времени от момента t поступления заявки ($t < T$) до момента T будет равна $T - t = -t$. Также будем полагать $t_0 = -\infty$.

Вероятности просеивания. Получим выражения для вероятностей просеивания $S_k(t)$ $(k = \overline{1,K})$.

Очевидно, что $S_1(t) = 1 - B_1(-t)$.

Далее, обозначим через τ_k время обслуживания заявки на k-й фазе при условии, что заявка поступила в эту фазу. Тогда при $t < 0$

$$S_2(t) = \mathrm{P}\{\tau_1 < -t < \tau_1 + \tau_2\} = \int\limits_0^{-t} \mathrm{P}\{\tau_1 < -t < \tau_1 + \tau_2 \mid \tau_1 = x\} dB_1(x) =$$

$$= \int\limits_0^{-t} \mathrm{P}\{-t < x + \tau_2\} dB_1(x) = \int\limits_0^{-t} \mathrm{P}\{\tau_2 > -t - x\} dB_1(x) = \int\limits_0^{-t} [1 - B_2(-t - x)] dB_1(x) =$$

$$= B_1(-t) - \int\limits_0^{-t} B_2(-t - x) dB_1(x) = B_1(-t) - (B_1 * B_2)(-t),$$

где $(B_1 * B_2)(x)$ есть свёртка функций $B_1(x)$ и $B_2(x)$. Обозначим $B_k^*(-t) = (B_1 * \ldots * B_k)(-t)$ для $k = \overline{2,K}$ и $B_1^*(-t) = B_1(-t)$, тогда

$$S_2(t) = B_1^*(-t) - B_2^*(-t). \tag{2}$$

Для произвольного $k = \overline{3,K}$ имеем

$$S_k(t) = \mathrm{P}\Big\{ \sum_{\nu=1}^{k-1} \tau_\nu < -t < \sum_{\nu=1}^{k} \tau_\nu \Big\}.$$

Обозначим $\xi = \sum\limits_{\nu=1}^{k-1} \tau_\nu$. Тогда $S_k(t) = \mathrm{P}\{\xi < -t < \xi + \tau_k\}$, откуда аналогично (2) и с учётом $\mathrm{P}\{\xi < -t\} = B_{k-1}^*(-t)$ получим

$$S_k(t) = B_{k-1}^*(-t) - B_k^*(-t). \tag{3}$$

Если ввести обозначение $B_0^*(-t) = 1$, то формула (3) будет справедлива для всех $k = \overline{1, K}$.

Таким образом, вероятности просеивания на k-ю ось для $k = \overline{1, K}$ равны $S_k(t)$, которые определяются выражениями (3).

Вывод уравнений Колмогорова. К многомерному случайному процессу $\mathbf{n}(t)$ применим метод дополнительной переменной. Пусть величина $z(t)$ равна длине интервала от момента t до момента наступления очередного события во входящем потоке. Тогда для распределения вероятностей $P(\mathbf{n}, z, t) = \mathrm{P}\{\mathbf{n}(t) = \mathbf{n},\ z(t) < z/N\}$ $(K+1)$-мерного марковского случайного процесса $\{\mathbf{n}(t), z(t)\}$, применяя формулу полной вероятности, запишем

$$P(\mathbf{n}, z, t + \Delta t) = P(\mathbf{n}, z + N\Delta t, t) - P(\mathbf{n}, N\Delta t, t) + P(\mathbf{n} - \mathbf{e}_1, N\Delta t, t) S_1(t) A(z) +$$

$$+ P(\mathbf{n} - \mathbf{e}_2, N\Delta t, t) S_2(t) A(z) + \ldots + P(\mathbf{n} - \mathbf{e}_K, N\Delta t, t) S_K(t) A(z) +$$

$$+ P(\mathbf{n}, N\Delta t, t)\Big[1 - \sum_{k=1}^{K} S_k(t)\Big] A(z) + o(\Delta t),$$

где $\mathbf{e}_k$ — вектор, k-й элемент которого равен 1, а остальные — 0.

Отсюда получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial P(\mathbf{n}, z, t)}{\partial t} = N \frac{\partial P(\mathbf{n}, z, t)}{\partial z} - N \frac{\partial P(\mathbf{n}, 0, t)}{\partial z} + N \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial P(\mathbf{n} - \mathbf{e}_k, 0, t)}{\partial z} S_k(t) A(z) +$$

$$+ N \frac{\partial P(\mathbf{n}, 0, t)}{\partial z}\Big[1 - \sum_{k=1}^{K} S_k(t)\Big] A(z),$$

где применяется обозначение $\dfrac{\partial P(\mathbf{n}, 0, t)}{\partial z} = \dfrac{\partial P(\mathbf{n}, z, t)}{\partial z}\Big|_{z=0}$.

Полученное уравнение перепишем в виде

$$\frac{1}{N} \frac{\partial P(\mathbf{n}, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial P(\mathbf{n}, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial P(\mathbf{n}, 0, t)}{\partial z}\Big[A(z) - 1 - A(z) \sum_{k=1}^{K} S_k(t)\Big] +$$

$$+ A(z) \sum_{k=1}^{K} \frac{\partial P(\mathbf{n} - \mathbf{e}_k, 0, t)}{\partial z} S_k(t). \qquad (4)$$

Обозначим многомерную характеристическую по $\mathbf{u}$ функцию

$$H(\mathbf{u}, z, t) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} \mathrm{e}^{j\mathbf{u}^T\mathbf{n}} P(\mathbf{n}, z, t) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{n_K=0}^{\infty} \exp\{ju_1 n_1 + \ldots + ju_K n_K\} P(n_1, \ldots, n_K, z, t)$$

векторного аргумента $\mathbf{u}^T = \{u_1, u_2, \ldots, u_K\}$. Для неё в силу уравнения (4) получаем следующее равенство:

$$\frac{1}{N} \frac{\partial H(\mathbf{u}, z, t)}{\partial t} = \frac{\partial H(\mathbf{u}, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial H(\mathbf{u}, 0, t)}{\partial z}\Big[A(z) - 1 - A(z) \sum_{k=1}^{K} S_k(t)\Big] +$$

$$+ A(z)\sum_{k=1}^{K} \mathrm{e}^{ju_k}\frac{\partial H(\mathbf{u},0,t)}{\partial z}S_k(t) =$$

$$= \frac{\partial H(\mathbf{u},z,t)}{\partial z} + \frac{\partial H(\mathbf{u},0,t)}{\partial z}\Big[A(z) - 1 + A(z)\sum_{k=1}^{K}(\mathrm{e}^{ju_k} - 1)S_k(t)\Big]. \tag{5}$$

Решение $H(\mathbf{u},z,t)$ этого уравнения удовлетворяет начальному условию

$$H(\mathbf{u},z,t_0) = R(z) \quad \text{при } t_0 \to -\infty, \tag{6}$$

где стационарное распределение вероятностей $R(z)$ случайного процесса $z(t)$ является решением уравнения

$$R'(z) + R'(0)[A(z) - 1] = 0, \tag{7}$$

удовлетворяющего краевому условию $R(0) = 0$. Очевидно, функция $R(z)$ имеет вид

$$R(z) = R'(0)\int_0^z [1 - A(x)]dx.$$

Величина $R'(0)$ определяется следующим выражением:

$$R'(0) = 1\Big/\int_0^\infty [1 - A(x)]dx = 1/a = \lambda.$$

Здесь λN — интенсивность входящего высокоинтенсивного рекуррентного потока. Таким образом,

$$R(z) = \lambda\int_0^z [1 - A(x)]dx. \tag{8}$$

Выполнив в уравнении (5) замену

$$H(\mathbf{u},z,t) = H_2(\mathbf{u},z,t)\exp\Big\{\sum_{k=1}^{K} ju_k\lambda N\int_{-\infty}^{t} S_k(\tau)d\tau\Big\} \tag{9}$$

и приняв во внимание (6), для функции $H_2(\mathbf{u},z,t)$ получим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{1}{N}\dfrac{\partial H_2(\mathbf{u},z,t)}{\partial t} + \lambda H_2(\mathbf{u},z,t)\displaystyle\sum_{k=1}^{K} ju_kS_k(t) = \dfrac{\partial H_2(\mathbf{u},z,t)}{\partial z} + \\ + \dfrac{\partial H_2(\mathbf{u},0,t)}{\partial z}\Big[A(z) - 1 + A(z)\displaystyle\sum_{k=1}^{K}(\mathrm{e}^{ju_k} - 1)S_k(t)\Big], \\ H_2(\mathbf{u},z,-\infty) = R(z). \end{cases} \tag{10}$$

Для решения этой задачи применим модификацию метода асимптотического анализа из [9] в предельном условии неограниченно растущей интенсивности ($N \to \infty$) высокоинтенсивного рекуррентного входящего потока.

Асимптотический анализ многофазной системы массового обслуживания с высокоинтенсивным рекуррентным входящим потоком. Обозначим $\varepsilon^2 = 1/N$. В задаче (10) выполним замены

$$\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{w}; \quad H_2(\mathbf{u}, z, t) = F(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon), \tag{11}$$

получим задачу

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \dfrac{\partial F(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)}{\partial t} + \lambda F(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon) \sum\limits_{k=1}^{K} j\varepsilon w_k S_k(t) = \dfrac{\partial F(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)}{\partial z} + \\ + \dfrac{\partial F(\mathbf{w}, 0, t, \varepsilon)}{\partial z} \Big[A(z) - 1 + A(z) \sum\limits_{k=1}^{K} (\mathrm{e}^{j\varepsilon w_k} - 1) S_k(t) \Big], \\ F(\mathbf{w}, z, -\infty, \varepsilon) = R(z). \end{cases} \tag{12}$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема. Предельное при $\varepsilon \to 0$ значение $F(\mathbf{w}, z, t)$ решения задачи (12) запишем в виде произведения

$$F(\mathbf{w}, z, t) = R(z) \Phi(\mathbf{w}, t), \tag{13}$$

в котором функция $R(z)$ удовлетворяет уравнению (7) и определяется равенством (8), а функция $\Phi(\mathbf{w}, t)$ имеет вид

$$\Phi(\mathbf{w}, t) = \exp \Big\{ \lambda \sum_{k=1}^{K} \frac{(jw_k)^2}{2} \int_{-\infty}^{t} S_k(\tau) d\tau + \frac{\kappa}{2} \sum_{k=1}^{K} \sum_{\nu=1}^{K} jw_k jw_\nu \int_{-\infty}^{t} S_k(\tau) S_\nu(\tau) d\tau \Big\}, \tag{14}$$

где величина κ вычисляется как

$$\kappa = \lambda^3 (\sigma^2 - a^2), \tag{15}$$

a и σ^2 — среднее и дисперсия случайной величины, заданной функцией распределения $A(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы представим в три этапа.

Этап 1. Обозначив $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} F(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon) = F(\mathbf{w}, z, t)$, в задаче (12) выполним указанный предельный переход и получим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(\mathbf{w}, z, t)}{\partial z} + \dfrac{\partial F(\mathbf{w}, 0, t)}{\partial z} [A(z) - 1] = 0, \\ F(\mathbf{w}, z, -\infty) = R(z). \end{cases}$$

Первое уравнение этой задачи совпадает с уравнением (7), поэтому функция $F(\mathbf{w}, z, t)$ имеет вид произведения (13), в котором функция $\Phi(\mathbf{w}, t)$ удовлетворяет начальному условию

$$\Phi(\mathbf{w}, -\infty) = 1, \tag{16}$$

а $R(z)$ определяется равенством (8).

Этап 2. Функцию $F(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon)$ запишем в виде разложения

$$F(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon) = \Phi(\mathbf{w}, t)\Big[R(z) + f(z)\sum_{k=1}^{K} j\varepsilon w_k S_k(t)\Big] + O(\varepsilon^2) \tag{17}$$

и подставим его в уравнение задачи (12). В результате будем иметь равенство

$$O(\varepsilon^2) + \lambda R(z)\sum_{k=1}^{K} j\varepsilon w_k S_k(t) = R'(z) + f'(z)\sum_{k=1}^{K} j\varepsilon w_k S_k(t) +$$

$$+\Big[R'(0) + f'(0)\sum_{k=1}^{K} j\varepsilon w_k S_k(t)\Big]\Big[A(z) - 1 +$$

$$+ A(z)\sum_{k=1}^{K} j\varepsilon w_k S_k(t)\Big] + O(\varepsilon^2) = R'(z) + f'(z)\sum_{k=1}^{K} j\varepsilon w_k S_k(t) + R'(0)[A(z) - 1] +$$

$$+ R'(0)A(z)\sum_{k=1}^{K} j\varepsilon w_k S_k(t) + f'(0)[A(z) - 1]\sum_{k=1}^{K} j\varepsilon w_k S_k(t) + O(\varepsilon^2),$$

из которого получим уравнение для функции $f(z)$:

$$f'(z) + f'(0)[A(z) - 1] + \lambda[A(z) - R(z)] = 0.$$

Интегрируя это тождество по всем значениям $z \in [0, \infty)$, запишем равенство

$$f(\infty) + f'(0)\int_0^\infty [A(z) - 1]dz + \lambda\int_0^\infty [A(z) - R(z)]dz = 0,$$

из которого следует

$$f'(0) - \lambda f(\infty) = \lambda^2\int_0^\infty [A(z) - R(z)]dz = \lambda^2\int_0^\infty [1 - R(z)]dz - \lambda^2\int_0^\infty [1 - A(z)]dz =$$

$$= \frac{\lambda^3}{2}(a_2 - 2a^2) = \frac{\lambda^3}{2}(\sigma^2 - a^2) = \frac{\kappa}{2}.$$

Здесь использовано равенство (8), определяющее вид функции $R(z)$, применены обозначения a_2 и σ^2 соответственно для второго начального момента и дисперсии случайной величины, заданной функцией распределения $A(x)$. Таким образом,

$$f'(0) - \lambda f(\infty) = \kappa/2.$$

Этап 3. Обозначим $\lim\limits_{z\to\infty} F(\mathbf{w}, z, t, \varepsilon) = F(\mathbf{w}, t, \varepsilon)$, в задаче (12) выполним предельный переход при $z \to \infty$ и получим равенство

$$\varepsilon^2\frac{\partial F(\mathbf{w}, t, \varepsilon)}{\partial t} + \lambda F(\mathbf{w}, t, \varepsilon)\sum_{k=1}^{K} j\varepsilon w_k S_k(t) = \frac{\partial F(\mathbf{w}, 0, t, \varepsilon)}{\partial z}\sum_{k=1}^{K}(\mathrm{e}^{j\varepsilon w_k} - 1)S_k(t),$$

в которое подставим разложение (17), тогда можно записать

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \Phi(\mathbf{w},t)}{\partial t} + \lambda \Phi(\mathbf{w},t)\Big[1 + f(\infty)\sum_{k=1}^{K} j\varepsilon w_k S_k(t)\Big]\sum_{k=1}^{K} j\varepsilon w_k S_k(t) =$$

$$= \Phi(\mathbf{w},t)\Big[R'(0) + f'(0)\sum_{k=1}^{K} j\varepsilon w_k S_k(t)\Big]\sum_{k=1}^{K}\Big(j\varepsilon w_k + \frac{(j\varepsilon w_k)^2}{2}\Big)S_k(t) + O(\varepsilon^3).$$

Выполнив здесь следующие преобразования:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \Phi(\mathbf{w},t)}{\partial t} = -\Phi(\mathbf{w},t)\Big[\lambda\sum_{k=1}^{K} j\varepsilon w_k S_k(t) + \lambda f(\infty)\Big(\sum_{k=1}^{K} j\varepsilon w_k S_k(t)\Big)^2\Big] +$$

$$+ \Phi(\mathbf{w},t)\Big[\lambda\sum_{k=1}^{K}\Big(j\varepsilon w_k + \frac{(j\varepsilon w_k)^2}{2}\Big)S_k(t) + f'(0)\Big(\sum_{k=1}^{K} j\varepsilon w_k S_k(t)\Big)^2\Big] + O(\varepsilon^3) =$$

$$= \Phi(\mathbf{w},t)\Big[\lambda\sum_{k=1}^{K}\frac{(j\varepsilon w_k)^2}{2} S_k(t) + (f'(0) - \lambda f(\infty))\Big(\sum_{k=1}^{K} j\varepsilon w_k S_k(t)\Big)^2\Big] + O(\varepsilon^3),$$

для функции $\Phi(\mathbf{w},t)$ получим линейное однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{w},t)}{\partial t} = \Phi(\mathbf{w},t)\Big[\lambda\sum_{k=1}^{K}\frac{(jw_k)^2}{2} S_k(t) + \frac{\kappa}{2}\sum_{k=1}^{K}\sum_{\nu=1}^{K} jw_k jw_\nu S_k(t) S_\nu(t)\Big],$$

решение которого удовлетворяет начальному условию (16) и имеет вид

$$\Phi(\mathbf{w},t) = \exp\Big\{\lambda\sum_{k=1}^{K}\frac{(jw_k)^2}{2}\int_{-\infty}^{t} S_k(\tau)d\tau + \frac{\kappa}{2}\sum_{k=1}^{K}\sum_{\nu=1}^{K} jw_k jw_\nu \int_{-\infty}^{t} S_k(\tau)S_\nu(\tau)d\tau\Big\},$$

совпадающий с (14).

Теорема доказана.

Многомерное распределение вероятностей состояний многофазной системы массового обслуживания с высокоинтенсивным рекуррентным входящим потоком. При $t = T = 0$ функция $\Phi(\mathbf{w},t)$ из (14) запишется как выражение

$$\Phi(\mathbf{w},0) = \exp\Big\{\lambda\sum_{k=1}^{K}\frac{(jw_k)^2}{2}\int_{-\infty}^{0} S_k(t)dt + \frac{\kappa}{2}\sum_{k=1}^{K}\sum_{\nu=1}^{K} jw_k jw_\nu \int_{-\infty}^{0} S_k(t)S_\nu(t)dt\Big\}.$$

Выполнив в нём замену $\mathbf{w} = \mathbf{u}\sqrt{N}$, обратную к (11), и принимая во внимание замену (9), а также равенство (1), получим гауссовскую аппроксимацию $h(\mathbf{u})$ K-мерной характеристической функции числа приборов, занятых обслуживанием на фазах рассматриваемой системы массового обслуживания, в виде

$$h(\mathbf{u}) = \exp\Big\{\sum_{k=1}^{K} ju_k\lambda N\int_{-\infty}^{0} S_k(t)dt + \lambda N\sum_{k=1}^{K}\frac{(ju_k)^2}{2}\int_{-\infty}^{0} S_k(t)dt +$$

$$+\frac{\kappa}{2}N\sum_{k=1}^{K}\sum_{\nu=1}^{K}ju_k ju_\nu\int\limits_{-\infty}^{0}S_k(t)S_\nu(t)dt\Big\}=$$

$$=\exp\Big\{\sum_{k=1}^{K}ju_k\lambda Ng_k+\lambda N\sum_{k=1}^{K}\frac{(ju_k)^2}{2}g_k+\kappa N\sum_{k=1}^{K}\sum_{\nu=1}^{K}\frac{ju_k ju_\nu}{2}V_{k\nu}\Big\}, \tag{18}$$

где

$$g_k=\int\limits_{-\infty}^{0}S_k(t)dt;\quad V_{k\nu}=\int\limits_{-\infty}^{0}S_k(t)S_\nu(t)dt.$$

Нетрудно показать, что каждая из величин g_k, $k=\overline{1,K}$, равна среднему времени обслуживания на k-й фазе.

Обозначим через $\mathbf{G}$ диагональную матрицу с элементами g_k на главной диагонали, через $\mathbf{E}$ — единичный вектор-столбец, а через $\mathbf{V}$ — матрицу с элементами $V_{k\nu}$. Выражение (18) перепишем как

$$h(\mathbf{u})=\exp\Big\{j\mathbf{u}^T N\lambda\mathbf{GE}+\frac{1}{2}j\mathbf{u}^T N[\lambda\mathbf{G}+\kappa\mathbf{V}]j\mathbf{u}\Big\}. \tag{19}$$

Таким образом, асимптотическое (в условии неограниченно растущей интенсивности рекуррентного входящего потока) K-мерное распределение вероятностей числа приборов, занятых на фазах рассматриваемой системы массового обслуживания, является гауссовским (нормальным) с вектором средних значений $N\lambda\mathbf{GE}$ и матрицей ковариаций $N[\lambda\mathbf{G}+\kappa\mathbf{V}]$.

В частном случае для многофазной системы массового обслуживания с высокоинтенсивным простейшим (стационарным пуассоновским) входящим потоком функция распределения $A(x)$ имеет вид $A(x)=1-\mathrm{e}^{-\lambda x}$ и $a=1/\lambda$, $\sigma^2=1/\lambda^2$. Тогда из (15) величина $\kappa=0$. Следовательно, характеристическая функция (19) факторизуется в произведение

$$h(\mathbf{u})=\prod_{k=1}^{K}\exp\Big\{ju_k N\lambda g_k+\frac{(ju_k)^2}{2}N\lambda g_k\Big\}.$$

Получаем, что для многофазной системы с высокоинтенсивным простейшим входящим потоком асимптотическое K-мерное распределение числа приборов, занятых обслуживанием на фазах системы в стационарном режиме, является произведением K одномерных нормальных распределений с математическими ожиданиями и дисперсиями равными $N\lambda g_k$, $k=\overline{1,K}$, где $N\lambda$ — интенсивность входящего потока, g_k — среднее время обслуживания на k-й фазе. Интересным результатом является тот факт, что это распределение не зависит от вида функций распределения времени обслуживания $B_k(x)$, а зависит лишь от средних значений g_k.

Заключение. В данной работе проведено исследование многофазной системы массового обслуживания с высокоинтенсивным рекуррентным входящим потоком [8], произвольным обслуживанием и неограниченным числом приборов на каждой фазе. Исследование выполнено с помощью метода многофазного динамического просеивания. Показано, что в условии неограниченно растущей интенсивности входящего потока многомерное распределение вероятностей числа занятых приборов на фазах рассматриваемой системы массового обслуживания аппроксимируется многомерным нормальным распределением. Получены характеристики этого распределения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бочаров П. П., Печинкин А. В.** Теория массового обслуживания: Учебник. М.: Изд-во РУДН, 1995. 529 с.
2. **Gopalan M. N., Anantharaman N.** Stochastic modelling of a two-stage transfer-line production system with end buffer and random demand // Microelectronics and Reliability. 1992. **32**, N 1–2. P. 11–15.
3. **Genadis T.** The distribution of the passage time in a two-station reliable production line: an exact analytic solution // Intern. Journ. Quality and Reliability Management. 1997. **14**, N 9. P. 12–25.
4. **Ahn H.-S., Duenyas I., Lewis M. E.** Optimal control of a two-stage tandem queuing system with flexible servers // Probability in the Eng. and Inform. Sci. 2002. **16**, N 4. P. 453–469.
5. **Гарайшина И. Р., Моисеева С. П., Назаров А. А.** Методы исследования коррелированных потоков и специальных систем массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2010. 204 с.
6. **Хорошевский В. Г., Павский В. А.** Расчет показателей эффективности функционирования распределенных вычислительных систем // Автометрия. 2008. **44**, № 2. С. 3–15.
7. **Грачев В. В., Моисеев А. Н., Назаров А. А., Ямпольский В. З.** Многофазная модель массового обслуживания системы распределенной обработки данных // Докл. ТУСУР. 2012. № 2(26), Ч. 2. С. 248–251.
8. **Moiseev A., Nazarov A.** Investigation of high intensive general flow // Proc. of the IV Intern. Conf. "Problems of Cybernetics and Informatics". Baku: IEEE, 2012. P. 161–163.
9. **Назаров А. А., Моисеева С. П.** Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.

Поступила в редакцию 29 марта 2013 г.