

11. Johnson J. N., Barker L. M. Dislocation dynamics and steady plastic wave profiles in 6061-T6 aluminum.—*J. Appl. Phys.*, 1969, vol. 40, N 11, p. 4321.
 12. Jones O. E., Mote J. D. Shock-induced dynamic yielding in copper single crystals.—*J. Appl. Phys.*, 1969, vol. 40, N 12, p. 4920.

УДК 539.3+534.231.1

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ СМЕЩЕНИЙ В ГЕКСАГОНАЛЬНЫХ КРИСТАЛЛАХ И ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

В. С. Будаев

(Москва)

Исследуется структура возмущенной области и геометрия волновых фронтов при условии, что в неограниченной трансверсально-изотропной среде действует сосредоточенный источник типа мгновенного импульса. Определены области допустимых значений введенного в [1] коэффициента анизотропии для трансверсально-изотропных сред на основе условий положительной определенности упругой энергии и условий гиперболичности. Предполагается, что движение среды происходит в условиях плоской деформации.

1. В работе [1] проведено подробное исследование особенностей волновых полей в упругих анизотропных средах для случая сосредоточенных источников возмущений импульсного типа. Исследуются геометрия волновых фронтов, корни характеристического уравнения и некоторые физические характеристики среды. Для описания свойств конкретных сред вводится коэффициент анизотропии $\Delta_A = (c_1 - c_3)/c_2$ для случая $c_1 = c_4$, где c_1, c_2, c_3, c_4 — коэффициенты уравнений

$$\begin{aligned} c_1 \partial^2 u / \partial x^2 + c_2 \partial^2 w / \partial x \partial z + c_3 \partial^2 u / \partial z^2 - \rho \partial^2 u / \partial t^2 &= \rho a_1 f; \\ c_3 \partial^2 w / \partial x^2 + c_2 \partial^2 u / \partial x \partial z + c_4 \partial^2 w / \partial z^2 - \rho \partial^2 w / \partial t^2 &= \rho a_2 f, \end{aligned}$$

описывающих движение среды в условиях плоской деформации.

Здесь u, w — компоненты смещений вдоль осей x и z . Направление осей координат выбирается в зависимости от конкретного вида упругой симметрии (как в [1]). Если источник возмущений локализован в начале координат и представляет собой сосредоточенный импульс, то правые части следует взять в виде

$$f = \delta(x)\delta(z)\delta(t).$$

В работе [1] подробно рассмотрены среды, обладающие кубической симметрией. Показано, что вся область допустимых значений Δ_A, α ($\alpha = c_3/c_1$) делится на четыре области. В зависимости от того, в какую из областей попадает точка с координатами Δ_A, α , определяется наличие и расположение лагун и вид корней характеристического уравнения. Границы допустимых значений Δ_A, α определяются условиями гиперболичности и положительной определенности упругой энергии. Два параметра Δ_A и α полностью определяют поведение среды в условиях плоской деформации в случае кубической симметрии.

Рассмотрим теперь гексагональные кристаллы и трансверсально-изотропные среды. В 1944 г. В. Л. Германом была доказана теорема, обобщающая принцип Неймана на случай сплошных анизотропных сред [2]: «Если среда обладает осью симметрии порядка n , то она аксиально-изотропна относительно этой оси для всех физических свойств, характеристики которых определяются тензорами ранга r , если $r < n$. Так, например, для упругих свойств ($r = 4$) уже при наличии симметрии пятого порядка ($n = 5$) плоскость, перпендикулярная этой оси, будет плоскостью изотропии». Эта теорема позволяет не делать различия между гексагональными кристаллами и трансверсально-изотропными средами и имеет важное практическое приложение при анализе симметрии упругих свойств многослойных материалов, составленных из ортотропных слоев. Все направления в плоскости листа такого материала эквивалентны, если угол между направлением волокон в смежных слоях меньше $\varphi = 2\pi/5 = 72^\circ$. Плоскость листа в этом случае — плоскость изотропии, а ось, перпендикулярная ей, — ось симметрии бесконечного порядка. Таким образом, трансверсально-изотропны все слоистые материалы, имеющие звездную структуру, если угол между направлением волокон в смежных слоях $\varphi < 72^\circ$. Теорема Германа позволяет распространить без изменения результаты, полученные для трансверсально-изотропных сред, на все среды, имеющие в каждой точке ось симметрии порядка $n \geq 5$, в частности, на гексагональные кристаллы ($n = 6$). Поэтому все рассуждения проводятся для трансверсально-изотропных сред.

При плоской деформации выражение для упругой энергии записывается в виде

$$2W = c_1 \varepsilon_{xx}^2 + c_4 \varepsilon_{zz}^2 + 2(c_2 - c_3) \varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} + c_3 \varepsilon_{xz}^2,$$

где ε_{ji} — тензор деформаций.

Условия положительной определенности W имеют вид

$$c_1 c_4 - (c_2 - c_3)^2 > 0$$

и совпадают с условием вещественности корней уравнения Рэлея [3]. При условии $c_1 = c_4$ получаем

$$(1.1) \quad c_1^2 > (c_2 - c_3)^2.$$

Согласно [3], условия (1.1) всегда выполняются, если $\alpha < 1$, т. е. $c_3 < c_1$, и, следовательно, не накладывают ограничений на Δ_A при $\alpha < 1$. Нижняя граница допустимых значений Δ_A на интервале $\alpha < 1$ определяется условиями гиперболичности и совпадает с границей, приведенной в [1].

Дополнительные ограничения на Δ_A , а именно: $\Delta_A < \Delta_A^\pm(\alpha)$, $\alpha < 1$, полученные в [1] для кубических кристаллов, обусловлены условиями положительной определенности упругой энергии при трехосной деформации.

В случае систем, не относящихся к кубическим кристаллам, условия положительной определенности упругой энергии при трехосной деформации связывают упругие постоянные, входящие в c_i (число которых всегда четыре) и не входящие в выражения для c_i . В случае трансверсально-изотропных сред

$$c_1 = a_{11}, \quad c_2 = a_{13} + a_{44}, \quad c_3 = a_{44}, \quad c_4 = a_{33}.$$

В выражения для c_i не входит a_{12} . Для ортотропных материалов имеем

$$c_1 = a_{11}, c_2 = a_{13} + a_{55}, c_3 = a_{55}, c_4 = a_{33}.$$

В выражения для c_i не входят оставшиеся пять упругих постоянных. Поскольку для реальных сред всегда должны выполняться условия положительной определенности, связывающие все упругие постоянные для каждого типа упругой симметрии (независимо от того, рассматривается плоская деформация или трехосная), для определения допустимых значений Δ_A , α необходимо учитывать эти условия. В случае трансверсально-изотропных сред условия положительной определенности упругой энергии, связывающие все пять упругих постоянных, имеют вид

$$a_{44} > 0, \quad a_{11} > |a_{12}|, \quad (a_{11} + a_{12})a_{33} > 2a_{13}^2,$$

откуда

$$(1.2) \quad c_3 > 0, \quad k_{12} < 1, \quad c_1 c_4 > \frac{2}{k_1} (c_2 - c_3)^2,$$

где

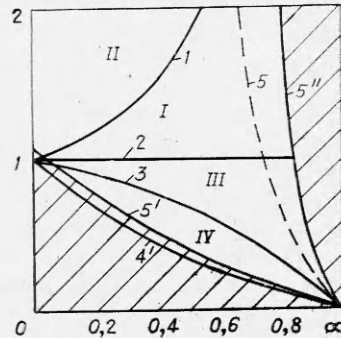
$$k_{12} = |a_{12}|/c_1; \quad k_1 \equiv 1 + k_{12}; \quad k_1 < 2.$$

В рассматриваемом частном случае, когда $c_1 = c_4$, получаем из (1.2), что на интервале $\alpha_k < \alpha < 1$ допустимы все значения Δ_A из интервала $\Delta_{A1}(\alpha) < \Delta_A < \Delta_{A2}(\alpha)$, где $\Delta_{A1}(\alpha) = (1 - \alpha)/(\alpha + \alpha_k)$; $\Delta_{A2}(\alpha) = (1 - \alpha)/(\alpha - \alpha_k)$; $\alpha_k = \sqrt{k_1/2}$. На интервале $0 < \alpha < \alpha_k$ допустимы все $\Delta_A > \Delta_{A1}(\alpha)$. Так как $k_1 < 2$ (поскольку $c_1 > |a_{12}|$), получаем, что $\alpha_k < 1$. Кривые $\Delta_{A1}(\alpha)$, $\Delta_{A2}(\alpha)$ приведены на фиг. 1 (кривые 5' и 5'' соответственно; кривая 5 есть $\Delta_A^\pm(\alpha)$).

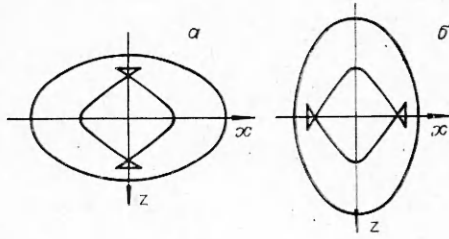
Кривые 1-4 ничем не отличаются от соответствующих кривых, приведенных в [1] на фиг. 3,2.

Так как $\alpha_k < 1$, кривая $\Delta_{A1}(\alpha)$ проходит выше $\Delta_{AГ}(\alpha)$ (кривая 4), определяемой условиями гиперболичности, и этим уменьшает область допустимых значений Δ_A по сравнению с кубическими кристаллами. Однако кривая $\Delta_{A2}(\alpha)$ проходит правее кривой $\Delta_A^\pm(\alpha)$, что соответствует увеличению области допустимых значений Δ_A , α по сравнению с кубическими кристаллами. Значения $\Delta_A < \Delta_{A1}(\alpha)$ и $\Delta_A > \Delta_{A2}(\alpha)$ являются запрещенными (заштриховано). В частности, к ним относятся все $\alpha > 1$. Как и в случае кубических кристаллов, допустимы только значения $c_3 < c_1$, т. е. скорость квазиперечных волн всегда меньше скорости квазипродольной волны.

Одним из важных следствий, вытекающих из приведенных результатов, является то, что границы допустимых значений Δ_A , α определяются не условиями положительной определенности W для плоской деформации, имеющими одинаковый вид для материалов различной симметрии, а условиями положительной определенности при трехосной деформации, когда W зависит от полного набора упругих постоянных, число которых различно для различных классов упругой симметрии и во всех случаях, кроме кубических



Фиг. 1



Фиг. 2

кристаллов, больше трех. В частности, границы допустимых значений являются фиксированными только для кубических кристаллов. Во всех других случаях положение их зависит от упругих постоянных, не входящих в c_i .

Т е о р е м а с в я з н о с т и.
Преобразование

$$(1.3) \quad c'_1 = c_1 + c_2 + c_3, \quad c'_3 = c_1 + c_3 - c_2, \quad c'_2 = c_1 - c_3,$$

переводит среды области *I* в среды области *III* и среды области *II* в среды области *IV* (см. фиг. 1). Обратное преобразование приводит к обратному переходу.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства данной теоремы достаточно показать, что $\Delta'_A = (c'_1 - c'_3)/c'_2 < 1$, если $\Delta_A = (c_1 - c_3)/c_2 > 1$; допустимые значения Δ_A переходят в допустимые Δ'_A ; запрещенные Δ_A — в запрещенные Δ'_A ; граница $\Delta_{A*}(\alpha)$ переходит в границу $\Delta_A^0(\alpha')$, граница области *I* и *III*, т. е. прямая $\Delta_A = 1$, не изменяется. То, что граница $\Delta_{A*}(\alpha)$ раздела областей *I* и *II* переходит в границу $\Delta_A^0(\alpha')$ раздела областей *III* и *IV*, показано в [1].

Из (1.3) получаем

$$c'_1/c_1 = [(1 + \alpha) + \sqrt{1 + \alpha^2 - \gamma}]/2,$$

$$c'_3/c_1 = [(1 + \alpha) - \sqrt{1 + \alpha^2 - \gamma}]/2, \quad c'_2/c_1 = 1 - \alpha,$$

следовательно,

$$\Delta'_A = \frac{c'_1 - c'_3}{c'_2} = \frac{\sqrt{1 + \alpha^2 - \gamma}}{1 - \alpha} = \frac{1}{\Delta_A}.$$

Таким образом, если $\Delta_A > 1$, то $\Delta'_A < 1$, а при $\Delta_A < 1$ будем иметь $\Delta'_A > 1$. Отсюда следует, в частности, что $\Delta_A = 1$ переходит в $\Delta'_A = 1$. Преобразование (1.3) не изменяет величины упругого потенциала, так как сводится к простому повороту осей координат на угол 45° . Выше было показано, что как в случае кубических кристаллов, так и в случае трансверсально-изотропных сред границы допустимых значений Δ_A полностью определяются одними только условиями положительной определенности упругого потенциала при трехосной деформации. Получаем, что преобразование (1.3) не может вывести за границу допустимых значений Δ_A . Теорема доказана. Из данной теоремы следует: 1) все среды с $c_1 = c_4$ состоят из сред первой группы и сред, получающихся из них поворотом осей координат на 45° ; 2) преобразование (1.3) переводит корни характеристического уравнения первого типа в корни характеристического уравнения второго и третьего типа (по классификации [4]); 3) если коэффициенты уравнений для двух сред связаны соотношениями (1.3), направление сосредоточенной импульсной нагрузки, действующей в первой среде ($\Delta_A > 1$), составляет угол 45° с направлением силы, действующей во второй среде ($\Delta_A < 1$), и по величине они равны, то волновые картины в обе-

их средах полностью совпадут при повороте сред на 45° относительно друг друга (смещения будут одинаковыми в одних и тех же точках при совмещении волновых картин). Отсюда можно сделать выводы:

1. Для вычисления кривых смещений в точках на лучах, проходящих под углом 45 и 135° к осям координат, совсем не обязательно прибегать к решению уравнения $t - \theta_n x - \mu_n(\theta_n)z = 0$ [6].

Достаточно заменить в выражениях (3.4) работы [6], дающих в явном виде решения для точек, лежащих на осях координат, значения коэффициентов c_1, c_2, c_3 по формулам (1.3).

2. Для вычисления полей смещения в случае сосредоточенного импульсного источника для любых сред с $c_1 = c_4$ достаточно знать вид корней уравнений θ_n и алгоритм для их вычисления для сред только первой группы, который приведен в [7].

Во всех других случаях, кроме кубических кристаллов, допустимый диапазон значений α при $\Delta_A = 1$ больше, чем для изотропных сред, так как имеется возможность удовлетворить условиям положительной определенности при $\alpha > 0,75$ за счет варьирования упругих постоянных, не входящих в c_1, c_2, c_3, c_4 .

2. Приведенные результаты можно распространить на среды с $c_1 \neq c_4$, что для трансверсально-изотропных сред более типично. При этом кубические кристаллы не рассматриваются, поскольку для них всегда $c_1 = c_4$. В данном случае нужно взять Δ_A в виде

$$\Delta_A = (\sqrt{c_1 c_4} - c_3)/c_2 = (1 - \sqrt{\alpha\beta})/\sqrt{1 + \alpha\beta - \gamma},$$

где

$$\alpha = c_3/c_1; \quad \beta = c_3/c_4; \quad \gamma = 1 + \alpha\beta - c_2^2/c_1 c_4.$$

При таком определении средам первой группы соответствуют по-прежнему $\Delta_A \geq 1$.

Принципиальное отличие от сред состоит в том, что для сосредоточенного импульсного источника в неограниченной среде возможны конфигурации волновых фронтов с двумя лагунами.

При условиях

$$(2.1) \quad \alpha < \beta, \quad \alpha(\beta + 1) < \gamma < \beta(\alpha + 1)$$

лагуны лежат на оси z (фиг. 2, а). При условиях

$$(2.2) \quad \alpha > \beta, \quad \beta(\alpha + 1) < \gamma < \alpha(\beta + 1)$$

лагуны находятся на оси x (фиг. 2, б).

Совокупность параметров α, β, Δ_A определяет уже точку в пространстве, а границы раздела областей являются поверхностями. Сечение данных поверхностей плоскостью $\alpha = \beta$ определяет кривые 1-4, 5', 5'' (см. фиг. 1). Значения Δ_A ограничены снизу поверхностью

$$\Delta_{AT}(\alpha, \beta) = (1 - \sqrt{\alpha\beta})/(1 + \sqrt{\alpha\beta}).$$

Ниже этой границы не выполняются условия гиперболичности. Условия (2.1), (2.2) определяют области, которых в случае $\alpha = \beta$ нет.

Линия пересечения поверхности $\Delta_A = \Delta_{AT}(\alpha, \beta)$ с плоскостью $\Delta_A = 0$ является гиперболой $\alpha\beta = 1$. При $\alpha\beta \rightarrow \infty$ область допустимых условиями гиперболичности значений Δ_A доходит до -1 , $-1 < \Delta_A < \infty$, как и при $\alpha = \beta$. Линиями пересечения поверхности $\Delta_{AT}(\alpha, \beta)$ с координатными

натными плоскостями $\alpha = 0$, $\beta = 0$ являются прямые $\alpha = 0$, $\Delta_A = 1$ и $\beta = 0$, $\Delta_A = 1$ соответственно.

Среды первой группы [1, 3] занимают область, где выполняются оба условия

$$\begin{aligned} [2\beta(1 + \alpha) - \gamma(1 + \beta)] &\geq -|\beta - 1|\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta}; \\ [2\alpha(1 + \beta) - \gamma(1 + \alpha)] &\geq -|\alpha - 1|\sqrt{\gamma^2 - 4\alpha\beta}, \end{aligned}$$

внутри цилиндрической области с прямоугольным основанием $\Delta_A = 1$, $\alpha < 1$, $\beta < 1$ и боковыми гранями, параллельными координатным плоскостям. Средам, удовлетворяющим условиям (2.1), соответствуют точки, расположенные между поверхностями $\Delta_{A\alpha}(\alpha, \beta)$, $\Delta_{A\beta}(\alpha, \beta)$, т. е.

$$\Delta_{A\alpha}(\alpha, \beta) < \Delta_A < \Delta_{A\beta}(\alpha, \beta), \quad \alpha < \beta,$$

где

$$\Delta_{A\alpha}(\alpha, \beta) = (1 - \sqrt{\alpha\beta})/\sqrt{1 - \alpha};$$

$$\Delta_{A\beta}(\alpha, \beta) = (1 - \sqrt{\alpha\beta})/\sqrt{1 - \beta}.$$

Средам (2.2) соответствует область, расположенная тоже между данными поверхностями, но находящаяся с другой стороны от плоскости $\alpha = \beta$, т. е. где $\beta < \alpha$. При этом поверхность $\Delta_{A\alpha}(\alpha, \beta)$ лежит уже выше поверхности $\Delta_{A\beta}(\alpha, \beta)$. Области, где реализуются оба типа сред, при $\alpha \rightarrow \beta$ исчезают, так как поверхности $\Delta_{A\alpha}$ и $\Delta_{A\beta}$ пересекаются при $\alpha = \beta$. Линия их пересечения и определяет кривую $\Delta_A^0 = \sqrt{1 - \alpha}$ на плоскости Δ_A , α (см. фиг. 1, кривая 3). Точкам области, лежащим ниже $\Delta_{A\alpha}(\alpha, \beta)$ при $\alpha < \beta$ и ниже $\Delta_{A\beta}(\alpha, \beta)$ при $\beta < \alpha$, соответствуют среды с четырьмя лагунами, лежащими на осях x и z [4]. Эта область снизу ограничена поверхностью $\Delta_{A1}(\alpha, \beta)$. Область $\alpha\beta > 1$ и $\Delta_A > 1$, ограниченная цилиндрической поверхностью $\alpha\beta = 1$ и снизу плоскостью $\Delta_A = 1$, является запрещенной, так как там не выполняются условия положительной определенности упругого потенциала даже для плоской деформации (среды, относящиеся к этой области, к тому же имеют мнимые скорости волн Рэлея [3]).

В областях выше поверхности

$$\Delta_{A2}(\alpha, \beta) = (1 - \sqrt{\alpha\beta})/(\sqrt{\alpha\beta} - \alpha_k)$$

и ниже поверхности

$$\Delta_{A1}(\alpha, \beta) = (1 - \sqrt{\alpha\beta})/(\alpha_k + \sqrt{\alpha\beta})$$

не выполняются условия положительной определенности W при трехосной деформации, и эти области являются запрещенными. В частности, это — все значения α , β , где $\alpha\beta > 1$, т. е. $c_3 > \sqrt{c_1 c_4}$, однако допустимы $\alpha > 1$ и $\beta > 1$ в отдельности, но такие, что все же $\alpha\beta < 1$. Недопустимыми являются $\alpha > 1$ и $\beta > 1$ одновременно. Положение поверхностей Δ_{A1} , Δ_{A2} в пространстве зависит от величины α_k , т. е. в конечном итоге от упругой постоянной a_{12} (или коэффициента Пуассона для оси y при растяжении вдоль оси x , который равен k_{12}).

3. Модуль Юнга для трансверсально-изотропных сред определяется выражением

$$(3.1) \quad 1/E = S_{11} \sin^4 \theta + S_{33} \cos^4 \theta + (S_{44} + 2S_{13}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta,$$

где θ — угол, отсчитываемый от главной оси;

$$S_{33} = (a_{11} + a_{12})S, \quad S_{44} = 1/a_{44}, \quad (S_{11} + S_{12}) = a_{33}S, \\ (a_{11} - a_{12})(S_{11} - S_{12}) = 1, \quad S_{13} = -a_{13}S; \quad S = S_{33}(S_{11} + S_{12}) - 2S_{13}^2.$$

Условия положительной определенности для модулей упругости S_{ij} имеют такой же вид, как и для упругих постоянных a_{ij}

$$(3.2) \quad S_{44} > 0, \quad S_{11} > |S_{12}|, \quad S_{33}(S_{11} + S_{12}) > 2S_{13}^2.$$

Подставляя второе из неравенств (3.2) в третье, получаем

$$(3.3) \quad S_{33}S_{11} > S_{13}^2, \quad |S_{13}| < \sqrt{S_{11}S_{33}}.$$

Поскольку S_{11} , S_{33} , S_{44} все положительные, то при $S_{13} > 0$ всегда $E > 0$. При $S_{13} < 0$ выражение (3.4) записываем в виде

$$(3.4) \quad 1/E = P(\theta) + S_{44} \sin^2\theta \cos^2\theta, \\ P(\theta) \equiv S_{11} \sin^4\theta + S_{33} \cos^4\theta - 2|S_{13}| \sin^2\theta \cos^2\theta.$$

Подставляя (3.3) в (3.4), находим

$$P_1(\theta) \equiv S_{11} \sin^4\theta + S_{33} \cos^4\theta - 2\sqrt{S_{11}S_{33}} \sin^2\theta \cos^2\theta = (\sqrt{S_{11}} \sin^2\theta - \\ - \sqrt{S_{33}} \cos^2\theta)^2 > 0,$$

следовательно, $P(\theta) > 0$.

Таким образом, модуль Юнга (3.1) всегда положительный, как и у кубических кристаллов. В случае кубических кристаллов для характеристики упругих свойств используется фактор анизотропии [5] $\xi_A = 2a_{44}/(a_{11} - a_{12})$, характеризующий анизотропию сдвиговых деформаций. Условие изотропии $\xi_A = 1$ представляет равенство двух скоростей волн в направлении $\langle 110 \rangle$ из существующих трех, которые в случае кубических кристаллов записываются в виде

$$c_t = \sqrt{(a_{11} + a_{12} + 2a_{44})/2\rho}; \\ c_{t1} = \sqrt{(a_{11} - a_{12})/2\rho}; \quad c_{t2} = \sqrt{a_{44}/\rho}.$$

Таким образом, коэффициент ξ_A характеризует отношение скоростей c_{t1} и c_{t2} .

$$\xi_A = (c_{t2}/c_{t1})^2.$$

Скорости c_{t1} и c_{t2} равны между собой при условии

$$(3.5) \quad 2a_{44} = a_{11} - a_{12}.$$

Полагая, согласно [1], $a_{11} = c_1$, $a_{12} + a_{44} = c_2$, $a_{44} = c_3$, получаем из (3.5) $c_2 = c_1 - c_3$ или $\Delta_A = 1$, т. е. из соотношения $\xi_A = 1$ следует $\Delta_A = 1$ и наоборот. Таким образом, кубические кристаллы с $\Delta_A = 1$ являются действительно изотропными средами, а коэффициент Δ_A для кубических кристаллов полностью эквивалентен ξ_A .

Автор благодарит С. А. Христиановича за внимание к работе.

Поступила 14 V 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Будаев В. С. К оценке степени анизотропии упругих сред.— ПМТФ, 1975, № 4.
2. Ашкенази Е. К. Анизотропия машиностроительных материалов. Л., «Машиностроение», 1969.
3. Будаев В. С. Упругие волны в кристаллах и анизотропных средах.— ПМТФ, 1974, № 6.
4. Будаев В. С. Об одной краевой задаче динамической теории упругих анизотропных сред.— ПМТФ, 1974, № 3.
5. Шульце Г. Металлофизика. М., «Мир», 1971.
6. Будаев В. С. Распространение колебаний от сосредоточенного импульсного источника в упругой анизотропной среде.— ПМ, 1973, т. 9, № 2.
7. Будаев В. С. К плоской задаче Лэмба для упругой анизотропной полуплоскости.— «Изв. АН СССР. МТТ», 1975, № 3.

УДК 534.121.1 : 539.382.4

МОДЕЛЬ ТРЕЩИНЫ КАК ИЗЛУЧАТЕЛЯ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ

Л. А. Маслов

(Хабаровск)

За последние два десятилетия интенсивно начал разрабатываться новый метод исследования процессов разрушения, основанный на регистрации механических колебаний, генерируемых дефектами среды [1]. В задачи нового метода входят: выделение полезного сигнала из посторонних шумов, идентификация типа дефекта, определение его характерных размеров, оценка опасности возникшей ситуации. Решение указанных задач имеет важное значение в таких практических приложениях, как неразрушающий контроль качества и техническая диагностика материалов и изделий. Большой интерес поэтому представляет исследование спектра сигналов, вызываемых образованием макроскопических трещин, как заключительной и, следовательно, самой опасной фазы разрушения.

В работе сформулированы кинематические характеристики трещины как излучателя упругих колебаний. Рассмотрены пространственный и временной спектры динамических перемещений, вызванных появлением в тонкой пластине развивающейся трещины. Получены соотношения между спектральными характеристиками распространяющихся возмущений и параметрами разрыва.

1. Предполагаем, что реализуется плоское напряженное состояние, материал изотропный, упругий вплоть до разрыва, отрыв нормальный. В среде имеют место волновые уравнения

$$(1.1) \quad \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

с начальными и граничными условиями

$$(1.2) \quad u = v = du/dt = dv/dt = 0, \quad t = 0;$$

$$(1.3) \quad u = 0 \quad \text{при } |y| \geq l, \quad x = 0;$$