

УДК 519.6, 551.46

Чувствительность функционалов к данным наблюдений в задаче вариационного усвоения для модели термодинамики моря*

В.П. Шутяев^{1,2}, Е.И. Пармузин¹

¹Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука Российской академии наук, ул. Губкина, 8, Москва, 119333

²Федеральное государственное бюджетное учреждение науки "Морской гидрофизический институт РАН", ул. Капитанская, д. 2, Севастополь, 299011

E-mails: victor.shutyayev@mail.ru (Шутяев В.П.), parm@inm.ras.ru (Пармузин Е.И.)

Шутяев В.П., Пармузин Е.И. Чувствительность функционалов к данным наблюдений в задаче вариационного усвоения для модели термодинамики моря // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2019. — Т. 22, № 2. — С. 229–242.

Для математической модели термодинамики моря, разработанной в Институте вычислительной математики РАН, рассматривается задача вариационного усвоения данных о температуре поверхности моря с учетом ковариационных матриц ошибок данных наблюдений. На основе вариационного усвоения данных спутниковых наблюдений решается обратная задача по восстановлению потока тепла на поверхности моря. Проведено исследование чувствительности функционалов к данным наблюдений в задаче вариационного усвоения и приведены результаты численных экспериментов для модели динамики Балтийского моря.

DOI: 10.15372/SJNM20190208

Ключевые слова: *вариационное усвоение данных наблюдений, оптимальное управление, сопряженные уравнения, ковариационные матрицы, чувствительность функционалов, температура поверхности моря.*

Shutyayev V.P., Parmuzin E.I. Sensitivity of functionals to observation data in a variational assimilation problem for the sea thermodynamics model // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2019. — Vol. 22, № 2. — P. 229–242.

For the mathematical model of the sea thermodynamics, developed in the Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences, the problem of variational assimilation of the sea surface temperature data is considered, with allowance for the observation data error covariance matrices. Based on the variational assimilation of satellite observation data, the inverse problem of restoring a heat flux on the sea surface is solved. The sensitivity of functionals with respect to observation data in a problem of variational assimilation is studied, and the results of numerical experiments for the model of the Baltic Sea dynamics are presented.

Keywords: *variational data assimilation, optimal control, adjoint equations, covariance matrices, sensitivity of functionals, sea surface temperature.*

1. Введение

Алгоритмы четырехмерного вариационного усвоения данных представляют собой вычислительный инструментальный новый поколения, позволяющий обрабатывать информационные потоки данных геофизических наблюдений и численных прогнозов, осно-

*Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-77-30001, в рамках которого проводились исследования в пунктах 2, 3) и РФФИ (проект № 18-01-00267, в рамках которого были проведены численные расчеты).

ванных на гидродинамических моделях, для задач мониторинга природной среды и климата [1–6]. Одним из подходов к построению эффективных алгоритмов усвоения является исследование ковариационных матриц ошибок наблюдений и включение их в исходный функционал стоимости [7]. В данной работе, следуя [8], рассматривается постановка обратной задачи об усвоении данных о температуре поверхности моря с использованием ковариационных матриц ошибок наблюдений для модели термодинамики моря.

За основу модели циркуляции моря принята численная модель гидротермодинамики Балтийского моря, разработанная в ИВМ РАН [9], основанная на методе расщепления [10, 11] и дополненная блоком вариационного усвоения данных о температуре поверхности моря [12, 13] с учетом ковариационных матриц ошибок наблюдений. Важным является вопрос о чувствительности [14–19]. В работе [8] на основе коэффициентов чувствительности как норм операторов отклика проведено исследование устойчивости оптимального решения задачи вариационного усвоения данных о температуре поверхности моря. Настоящая работа обобщает результаты работы [8] на случай функционалов от оптимального решения. Получено представление градиента функционала по отношению к данным наблюдений, предложен алгоритм вычисления градиента функционала и приведены результаты численных экспериментов для модели динамики Балтийского моря.

2. Задача вариационного усвоения данных о температуре поверхности моря

Рассмотрим задачу термодинамики моря в виде [20, 21]:

$$\begin{aligned} T_t + (\bar{U}, \text{Grad})T - \text{Div}(\hat{a}_T \text{Grad } T) &= f_T \quad \text{в } D \times (0, \bar{t}), \\ T &= T_0 \quad \text{при } t = 0 \quad \text{в } D, \\ -\nu_T \frac{\partial T}{\partial z} &= Q \quad \text{на } \Gamma_S \times (0, \bar{t}), \quad \frac{\partial T}{\partial N_T} = 0 \quad \text{на } \Gamma_{w,c} \times (0, \bar{t}), \\ \bar{U}_n^{(-)} T + \frac{\partial T}{\partial N_T} &= \bar{U}_n^{(-)} d_\Gamma + Q_T \quad \text{на } \Gamma_{w,op} \times (0, \bar{t}), \\ \frac{\partial T}{\partial N_T} &= 0 \quad \text{на } \Gamma_H \times (0, \bar{t}), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $T = T(x, y, z, t)$ — неизвестная функция температуры, $t \in (0, \bar{t})$, $(x, y, z) \in D = \Omega \times (0, H)$, $\Omega \subset R^2$, $H = H(x, y)$ — функция рельефа дна, $Q = Q(x, y, t)$ — суммарный приток тепла, $\bar{U} = (u, v, w)$, $\hat{a}_T = \text{diag}((a_T)_{ii})$, $(a_T)_{11} = (a_T)_{22} = \mu_T$, $(a_T)_{33} = \nu_T$, $f_T = f_T(x, y, z, t)$ — заданные функции. Граница области $\Gamma \equiv \partial D$ представляется как объединение четырех непересекающихся частей Γ_S , $\Gamma_{w,op}$, $\Gamma_{w,c}$, Γ_H , где $\Gamma_S = \Omega$ (невозмущенная поверхность моря), $\Gamma_{w,op}$ — жидкая (открытая) часть вертикальной боковой границы, $\Gamma_{w,c}$ — твердая часть вертикальной боковой границы, Γ_H — дно моря. Другие обозначения и детальное описание постановки задачи можно найти в работах [9, 12, 22].

Задачу (2.1) можно записать в форме операторного уравнения в $(W_2^1(D))^*$:

$$\begin{aligned} T_t + LT &= F + BQ \quad \text{для п. в. } t \in (0, \bar{t}), \\ T &= T_0 \quad \text{при } t = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где равенство понимается в слабом смысле, а именно:

$$(T_t, \hat{T}) + (LT, \hat{T}) = F(\hat{T}) + (BQ, \hat{T}) \quad \forall \hat{T} \in W_2^1(D), \quad (2.3)$$

при этом L, F, B определяются следующими соотношениями:

$$(LT, \hat{T}) \equiv \int_D (-T \operatorname{Div}(\bar{U} \hat{T})) dD + \int_{\Gamma_{w, \text{op}}} \bar{U}_n^{(+)} T \hat{T} d\Gamma + \int_D \hat{a}_T \operatorname{Grad}(T) \operatorname{Grad}(\hat{T}) dD,$$

$$F(\hat{T}) = \int_{\Gamma_{w, \text{op}}} (Q_T + \bar{U}_n^{(-)} d_T) \hat{T} d\Gamma + \int_D f_T \hat{T} dD,$$

$$(T_t, \hat{T}) = \int_D T_t \hat{T} dD, \quad (BQ, \hat{T}) = \int_{\Omega} Q \hat{T} |_{z=0} d\Omega,$$

а функции \hat{a}_T, Q_T, f_T, Q таковы, что равенство (2.3) имеет смысл.

Мы рассмотрим задачу об усвоении данных о температуре поверхности моря, следуя [8, 12]. Предположим, что в задаче (2.1) функция $Q \in L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ не известна. Пусть задана функция данных наблюдений $T_{\text{obs}}(x, y, t)$ на $\bar{\Omega} \equiv \Omega \cup \partial\Omega$ при $t \in (0, \bar{t})$, которая по своему физическому смыслу есть приближение к функции поверхностной температуры на Ω , т.е. к $T|_{z=0}$. Предполагаем, что $T_{\text{obs}} \in L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$, однако большей гладкостью функция T_{obs} может не обладать, поэтому ее нельзя использовать в качестве граничного условия на Γ_S . Допускается случай, когда T_{obs} имеется лишь на некотором подмножестве из $\Omega \times (0, \bar{t})$, характеристическую функцию которого обозначим через m_0 . Вне этого подмножества для определенности считаем T_{obs} нулевой.

В настоящей работе, как и в работе [8], в качестве T_{obs} берется функция среднесуточных наблюдений температуры поверхности моря, поскольку очень часто именно этот тип данных доступен для усвоения. Отметим также, что в задаче (2.1) с неизвестными T, Q уравнение замыкания имеет вид

$$T = T_{\text{obs}} \text{ на } \Gamma_S \text{ при } t \in (0, \bar{t}). \quad (2.4)$$

Как было указано в [8], выбор уравнения замыкания в виде (2.4) представляется вполне разумным, только надо перейти к его записи в смысле “наименьших квадратов” с введением “регуляризации”. Именно этот подход и применяется ниже.

В дальнейшем мы будем предполагать, что данные наблюдений T_{obs} заданы с ошибками, а именно:

$$T_{\text{obs}} = m_0 T^t |_{z=0} + \xi_{\text{obs}},$$

где T^t — точное решение задачи (2.1) при некотором $Q = Q^t$, а $\xi_{\text{obs}} \in Y_{\text{obs}} = L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ можно рассматривать как ошибку наблюдений. Мы будем предполагать, что ошибки ξ_{obs} случайные и они распределены по нормальному закону (гауссовские) с нулевым математическим ожиданием и ковариационным оператором $R \cdot = E[(\cdot, \xi_{\text{obs}}) \xi_{\text{obs}}]$, $R : Y_{\text{obs}} \rightarrow Y_{\text{obs}}$, где E — математическое ожидание. Ковариационные матрицы ошибок наблюдений играют важную роль при вариационном усвоении данных: обратные к ним матрицы включаются в качестве весовых операторов в исходный функционал стоимости. В дальнейшем мы будем предполагать, что R положительно определен и, значит, обратим.

Итак, вместо задачи об отыскании T, Q , задаваемой соотношениями (2.1), (2.4), рассмотрим следующую регуляризованную задачу вариационного усвоения данных (см. [12]): найти T и Q , такие что

$$\begin{cases} T_t + LT = F + BQ, & t \in (0, \bar{t}), \\ T = T_0 & \text{при } t = 0, \\ J_\alpha(Q) = \inf_Q J_\alpha(Q), \end{cases} \quad (2.5)$$

где

$$J_\alpha(Q) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J J_{\alpha,j},$$

$$J_{\alpha,j} \equiv \alpha \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Omega} |Q - Q^{(0)}|^2 d\Omega dt + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int_{\Omega} (m_0 T|_{z=0} - T_{\text{obs}}) R^{-1} (m_0 T|_{z=0} - T_{\text{obs}}) d\Omega dt,$$

$Q^{(0)} = Q^{(0)}(x, y, t)$ — заданная функция, $\alpha = \text{const} > 0$, $t_0 = 0$, $t_J = \bar{t}$. Весовой коэффициент α принято называть параметром регуляризации по Тихонову [23].

При $\alpha > 0$ поставленная задача вариационного усвоения данных имеет единственное решение. Существование оптимального решения следует из классических результатов теории экстремальных задач, так как нетрудно показать, что решение задачи (2.2) непрерывно зависит от потока Q (имеют место априорные оценки в соответствующих функциональных пространствах).

При $\alpha = 0$ задача имеет решение не всегда, однако как показано в работе [12], при $R = I$ имеет место однозначная и плотная разрешимость, что позволяет построить последовательность регуляризованных решений, минимизирующую функционал.

Система оптимальности, которая определяет решение сформулированной задачи вариационного усвоения данных согласно необходимому условию $\text{grad} J_\alpha = 0$, имеет вид:

$$\begin{aligned} T_t + LT &= F + BQ, & t \in (0, \bar{t}), \\ T &= T_0 & \text{при } t = 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} -(T^*)_t + L^* T^* &= BR^{-1} m_0 (B^* T - T_{\text{obs}}), & t \in (0, \bar{t}), \\ T^* &= 0 & \text{при } t = \bar{t}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\alpha(Q - Q^{(0)}) + B^* T^* = 0 \text{ на } \Omega \times (0, \bar{t}), \quad (2.8)$$

где L^* , B^* — операторы, сопряженные к L , B соответственно.

Схема аппроксимации исходной задачи минимизации J_α последовательностью задач минимизации $J_{\alpha,j}$ на (t_{j-1}, t_j) была предложена в [24, с. 288], см. также [8, 12].

3. Чувствительность функционалов к данным наблюдений

Введем в рассмотрение функцию $G(T)$, зависящую от T , которая предполагается вещественнозначной и может рассматриваться как функционал на $Y = L_2(D \times (0, \bar{t}))$. Примеры таких функционалов приведены ниже. Так, если $G(T)$ — линейный ограниченный функционал на Y , то по теореме Рисса [25] он представляется в виде $G(T) = (T, p)_Y$, $p \in Y$. Нас будет интересовать чувствительность функционала $G(T)$ к данным наблюдений T_{obs} при условии, что T получена после вариационного усвоения из системы оптимальности (2.6)–(2.8). Как известно [1, 26], чувствительность функционала определяется градиентом по T_{obs} , который является производной Гаато:

$$\frac{dG}{dT_{\text{obs}}} = \frac{\partial G}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial T_{\text{obs}}}. \quad (3.1)$$

Пусть δT_{obs} — вариация функции T_{obs} , тогда из (2.6)–(2.8) получаем систему оптимальности для вариаций:

$$\begin{aligned} \delta T_t + L\delta T &= B\delta Q, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \delta T &= 0 \quad \text{при } t = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} -(\delta T^*)_t + L^*\delta T^* &= BR^{-1}m_0(B^*\delta T - \delta T_{\text{obs}}), \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \delta T^* &= 0 \quad \text{при } t = \bar{t}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\alpha\delta Q + B^*\delta T^* = 0 \quad \text{на } \Omega \times (0, \bar{t}). \quad (3.4)$$

Эта система эквивалентна вспомогательной линейной задаче усвоения данных об отыскании $\delta T, \delta Q$ таких, что

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta T_t + L\delta T = B\delta Q, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \delta T = 0 \quad \text{при } t = 0, \\ S(\delta Q) = \inf_Q S(Q), \end{array} \right. \quad (3.5)$$

где

$$S(\delta Q) = \frac{\alpha}{2} \int_0^{\bar{t}} \int_{\Omega} |\delta Q|^2 d\Omega dt + \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}} \int_{\Omega} (m_0\delta T|_{z=0} - \delta T_{\text{obs}}) R^{-1} (m_0\delta T|_{z=0} - \delta T_{\text{obs}}) d\Omega dt. \quad (3.6)$$

Введем гессиан \mathcal{H} функционала (3.6). Нетрудно видеть, что

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \alpha I, \quad (3.7)$$

где I — единичный оператор, а оператор \mathcal{H}_0 определяется на $v \in L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ последовательным решением задач:

$$\begin{aligned} \psi_t + L\psi &= Bv, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \psi &= 0 \quad \text{при } t = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} -(\psi^*)_t + L^*\psi^* &= BR^{-1}m_0B^*\psi, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \psi^* &= 0 \quad \text{при } t = \bar{t}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\mathcal{H}_0 v = B^*\psi^* \quad \text{на } \Omega \times (0, \bar{t}). \quad (3.10)$$

Введем вспомогательный оператор $C : L_2(\Omega \times (0, \bar{t})) \rightarrow L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$, действующий на функции $g \in L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ по формуле

$$Cg = B^*\theta^*, \quad (3.11)$$

где θ^* — решение сопряженной задачи

$$\begin{aligned} -(\theta^*)_t + L^*\theta^* &= BR^{-1}m_0g, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \theta^* &= 0 \quad \text{при } t = \bar{t}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Из (3.8)–(3.12) заключаем, что система (3.2)–(3.4) эквивалентна уравнению для вариации оптимального решения δQ :

$$\mathcal{H}\delta Q = C\delta T_{\text{obs}}. \quad (3.13)$$

Как следует из [8, 27], гессиан \mathcal{H} действует в $L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ с областью определения $D(\mathcal{H}) = L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$, он ограничен, самосопряжен и неотрицательно определен. Если $\alpha > 0$, то \mathcal{H} положительно определен. Оператор C ограничен.

При $\alpha > 0$ уравнение (3.13) имеет единственное решение

$$\delta Q = \mathcal{H}^{-1}C\delta T_{\text{obs}}. \quad (3.14)$$

Таким образом, вариация оптимального решения δQ в явном виде выражается через вариацию функции данных наблюдений δT_{obs} . Уравнение (3.14) может быть положено в основу исследования чувствительности оптимального решения и его функционалов к ошибкам данных наблюдений.

Справедлива

Теорема 3.1. *Градиент функционала $G(T)$ по T_{obs} имеет вид:*

$$\frac{dG}{dT_{\text{obs}}} = C^*\mathcal{H}^{-1}B^*\phi^*, \quad (3.15)$$

где C^* — оператор, сопряженный к C , \mathcal{H} — гессиан, определенный формулами (3.7)–(3.10), а ϕ^* — решение сопряженной задачи

$$\begin{aligned} -(\phi^*)_t + L^*\phi^* &= \frac{\partial G}{\partial T}, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \phi^* &= 0 \quad \text{при } t = \bar{t}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Доказательство. Из (3.1) получаем, что

$$\left(\frac{dG}{dT_{\text{obs}}}, \delta T_{\text{obs}} \right)_{Y_{\text{obs}}} = \left(\frac{\partial G}{\partial T}, \delta T \right)_Y, \quad (3.17)$$

где δT_{obs} — вариация функции T_{obs} , $\delta T = \frac{\partial T}{\partial T_{\text{obs}}}\delta T_{\text{obs}}$ — решение системы (3.2)–(3.4).

Введем сопряженную по отношению к (3.2) задачу (3.16), тогда (3.17) можно представить в виде:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}, \delta T \right)_Y = (\phi^*, B\delta Q)_Y = (B^*\phi^*, \delta Q)_{Y_{\text{obs}}}. \quad (3.18)$$

Уравнение для δQ определяется формулой (3.14), откуда

$$(B^*\phi^*, \delta Q)_{Y_{\text{obs}}} = (B^*\phi^*, \mathcal{H}^{-1}C\delta T_{\text{obs}})_{Y_{\text{obs}}} = (C^*\mathcal{H}^{-1}B^*\phi^*, \delta T_{\text{obs}})_{Y_{\text{obs}}}. \quad (3.19)$$

Сопряженный оператор $C^* : L_2(\Omega \times (0, \bar{t})) \rightarrow L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ определяется на $p \in L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ по формуле [8]:

$$C^*p = m_0R^{-1}B^*\phi, \quad (3.20)$$

где ϕ — решение задачи

$$\begin{aligned} \phi_t + L\phi &= Bp, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \phi &= 0 \quad \text{при } t = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Таким образом, из (3.17)–(3.19) заключаем, что

$$\left(\frac{dG}{dT_{\text{obs}}}, \delta T_{\text{obs}} \right)_{Y_{\text{obs}}} = (C^* \mathcal{H}^{-1} B^* \phi^*, \delta T_{\text{obs}})_{Y_{\text{obs}}}, \quad (3.22)$$

и, тем самым, теорема доказана. \square

Формула (3.15) позволяет сформулировать алгоритм вычисления градиента $\frac{dG}{dT_{\text{obs}}}$:

1) решаем сопряженную задачу

$$\begin{aligned} -(\phi^*)_t + L^* \phi^* &= \frac{\partial G}{\partial T}, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \phi^* &= 0 \quad \text{при } t = \bar{t} \end{aligned} \quad (3.23)$$

и полагаем

$$v = B^* \phi^*;$$

2) решаем уравнение с гессианом с правой частью v :

$$\mathcal{H}u = v;$$

3) решаем прямую задачу

$$\begin{aligned} \phi_t + L\phi &= Bu, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \phi &= 0 \quad \text{при } t = 0; \end{aligned} \quad (3.24)$$

4) вычисляем градиент функционала по формуле

$$\frac{dG}{dT_{\text{obs}}} = m_0 R^{-1} B^* \phi. \quad (3.25)$$

В численных примерах рассматривались функционалы вида

$$G(T) = \int_0^{\bar{t}} dt \int_{\Omega} F^*(x, y, t) T(x, y, 0, t) d\Omega, \quad (3.26)$$

где $F^*(x, y, t)$ — некая весовая функция, связанная с полем температуры на поверхности $z = 0$. Например, если мы хотим определить среднюю температуру в какой-либо избранной акватории океана ω при $z = 0$ в интервале $t_1 - \tau \leq t \leq t_1$, то в качестве F^* мы выберем функцию

$$F^*(x, y, t) = \begin{cases} 1/(\tau \text{mes } \omega), & \text{если } (x, y) \in \omega, \quad t_1 - \tau \leq t \leq t_1, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (3.27)$$

где $\text{mes } \omega$ означает, как обычно, площадь района ω . Тогда функционал (3.26) записывается в виде

$$G(T) = \frac{1}{\tau} \int_{t_1 - \tau}^{t_1} dt \left(\frac{1}{\text{mes } \omega} \int_{\omega} T(x, y, 0, t) d\Omega \right). \quad (3.28)$$

Выражение (3.28) представляет собой среднюю температуру по интервалу $t_1 - \tau \leq t \leq t_1$ для избранного района ω . Функционалы такого типа наиболее интересны в задачах изменений климата [1].

В наших обозначениях функционал (3.26) можно записать в виде

$$G(T) = \int_0^{\bar{t}} (BF^*, T) dt = (BF^*, T)_Y, \quad Y = L_2(D \times (0, \bar{t})).$$

Поскольку

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}, \delta T \right)_Y = (BF^*, \delta T)_Y,$$

то

$$\frac{\partial G}{\partial T} = BF^*. \quad (3.29)$$

С использованием конкретного вида (3.29) в (3.23) алгоритм (3.23)–(3.25) позволяет оценивать чувствительность функционалов, связанных с температурой после усвоения, по отношению к ошибкам в данных наблюдений.

4. Результаты численных экспериментов

В настоящем пункте приводятся результаты численных экспериментов по исследованию чувствительности функционалов к данным наблюдений в задаче о восстановлении функции потока тепла Q в акватории Балтийского моря путем вариационного усвоения данных о температуре поверхности моря. Расчеты проводились на основе σ -модели гидротермодинамики Балтийского моря, разработанной в ИВМ РАН [9], которая была дополнена процедурой вариационного усвоения данных [12] с использованием ковариационной матрицы ошибок наблюдений. При проведении численных экспериментов были выбраны модификации граничных условий и коэффициентов в них согласно [11].

Модельная область Балтийского моря расположена от 9.375 в.д. до 30.375 в.д. и от 53.625 с.ш. до 65.9375 с.ш. Пространственное разрешение модели составляет $1/16^\circ \times 1/32^\circ \times 25$ по долготе, широте и вертикали. Сеточная область в горизонтальной плоскости содержит 336×394 узлов, σ -уровни неравномерно распределены по глубине. Шаг по времени равен 5 мин.

В качестве T_{obs} использовались среднесуточные данные температуры поверхности Балтийского моря, полученные с портала океанографических данных COPERNICUS (<http://marine.copernicus.eu>). Для пересчета данных наблюдений на расчетную сетку численной модели термодинамики Балтийского моря использовались алгоритмы интерполяции данных [28, 29].

В качестве $Q^{(0)}$ использовался среднеклиматический поток, полученный по данным реанализа NCEP (National Center for Environmental Prediction). С помощью упомянутой модели гидротермодинамики, дополненной “процедурой усвоения” температуры поверхности T_{obs} , были проведены расчеты на акватории Балтийского моря, в которых работал алгоритм усвоения лишь в некоторые моменты времени t_j , при этом $t_{j+1} = \bar{t} = t_j + \Delta t$. Это означает, что до момента t_j производился расчет по модели без алгоритма усвоения, а начиная с t_j алгоритм усвоения включался, при этом начальное условие для усвоения задавалось из предыдущего расчета при $t = t_j$ (тем самым точкой t_0 , фигурирующей в описании алгоритма усвоения, считалась точка t_j).

Следуя [8], в качестве весовых коэффициентов в функционале стоимости при решении задачи усвоения данных были взяты диагональные элементы ковариационной матрицы R , которые вычисляются исходя из статистических свойств данных наблюдений. Статистические характеристики были рассчитаны на основе данных наблюдений за 27 лет, с 1982 по 2009 года, отдельно для каждого дня года [8].

При реализации процедуры усвоения на одном шаге по времени (t_j, t_{j+1}) рассматривалась система вида (2.6)–(2.8), где под (2.6), (2.7) понимаются конечномерные аналоги соответствующих задач.

Приведем результаты численных экспериментов. Результаты расчета при $t_0 = 41$ часа 40 минут (500 временных шагов модели) даны на рисунке 4.1, где представлен градиент функционала $G(T)$ при различных значениях параметра α , полученный с помощью алгоритма (3.23)–(3.25). Более темным цветом выделены зоны, в которых функционал $G(T)$ наиболее чувствителен к ошибкам в наблюдениях при проведении процедуры усвоения данных. Заметим, что большему параметру регуляризации соответствует меньшая чувствительность функционала к ошибкам данных наблюдений (рис. 4.1). Рис. 4.2 демонстрирует, что для всех точек области разность градиентов, полученных при $\alpha = 10^{-4}$ и $\alpha = 1$, положительна, т.е. при увеличении параметра α градиент $\frac{dG}{dT_{\text{obs}}}$ уменьшается, тем самым процесс вычисления $G(T)$ становится более устойчивым, что и следовало ожидать.

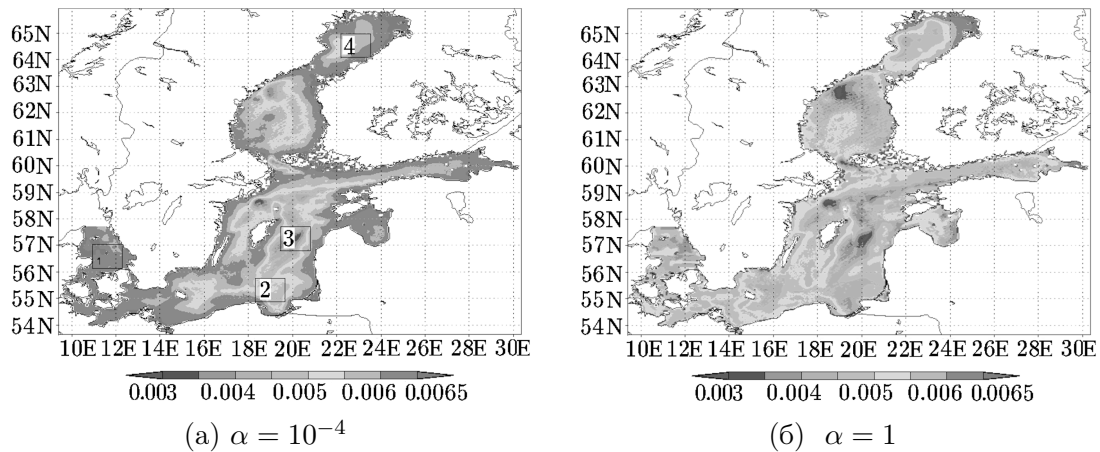


Рис. 4.1. Градиент функционала $G(T)$

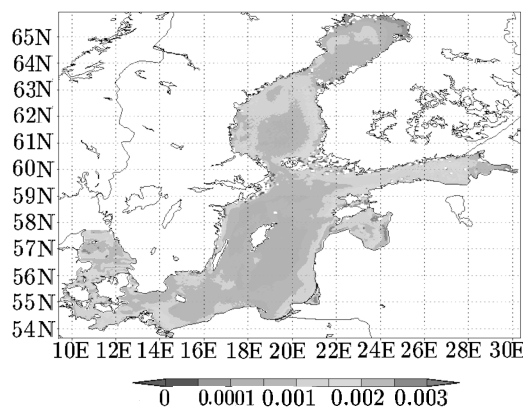


Рис. 4.2. Градиент функционала $G(T)$

Для того чтобы проверить теоретические выводы, численные эксперименты проводились с использованием алгоритма усвоения для возмущенной температуры поверхности $T_{\text{obs}}^\varepsilon = T_{\text{obs}} + \varepsilon \delta T_{\text{obs}}$, $\varepsilon = \text{const} > 0$ в выбранных областях акватории Балтийского моря (см. рис. 4.1 (а), районы 1–4). Здесь $\alpha = 10^{-4}$.

Значения функционала $G^\varepsilon(T)$, полученные в результате усвоения, сравнивались с невозмущенными значениями $G(T)$. В таблице приведены значения величин $G^\varepsilon(T)$ и $\delta G = G^\varepsilon(T) - G(T)$ для случая, когда алгоритм усвоения включался в определенный момент времени $t_0 = 500$ шагов (41 ч 40 мин) при $\varepsilon = 2$, $\delta T_{\text{obs}} = 1$. Как видно из таблицы, максимальная ошибка δG наблюдается в области 1, что соответствует рис. 4.1 (а). Минимальная ошибка δG наблюдается в области 3. Заметим, что в этом случае невозмущенное значение $G(T) = 0.016894$, а число возмущенных точек, где изменялись значения температуры T_{obs} , — 646 (в каждой из областей 1–4). Эти эксперименты подтверждают вычисления, проведенные по формулам (3.23)–(3.25).

Таблица. Значения $G^\varepsilon(T)$ и δG

Район	Возмущение $G^\varepsilon(T) \cdot 10^4$ ($T_{\text{obs}}^\varepsilon = T_{\text{obs}} + \varepsilon \delta T_{\text{obs}}$)	Отклонение от невозмущенного значения $\delta G \cdot 10^4$ ($\delta G = G^\varepsilon(T) - G(T)$)
1	170.2	1.261
2	169.5	0.513
3	169.3	0.408
4	169.9	1.004

Вышеприведенные исследования позволяют решить проблему определения районов моря, в которых функционалы от оптимального решения являются наиболее чувствительными к любым возмущениям в данных наблюдений при использовании процедуры вариационного усвоения, в случаях когда значения этих возмущений не известны априори.

5. Заключение

В настоящей работе проведено исследование чувствительности функционалов от решения задачи вариационного усвоения данных о температуре поверхности моря с целью восстановления потоков тепла на поверхности с использованием трехмерной модели гидротермодинамики Балтийского моря, разработанной в ИВМ РАН. В качестве весовых коэффициентов для функции стоимости в задаче вариационного усвоения рассматривались диагональные элементы ковариационной матрицы ошибок наблюдений, которые вычисляются исходя из статистических свойств данных наблюдений. С использованием системы оптимальности и гессиана функции стоимости разработан алгоритм исследования чувствительности функционалов от решения задачи после усвоения на основе вычисления градиента функционала по отношению к данным наблюдений. Численные эксперименты для модели динамики Балтийского моря подтверждают теоретические выводы о возможности использования предложенного алгоритма. Данная методология позволяет определять подобласти, в которых функционалы от оптимального решения наиболее чувствительны к ошибкам наблюдений при вариационном усвоении данных. Выявление областей чувствительности функционалов может существенно помочь при решении проблем выбора точек наблюдения, размещения станций наблюдений, важных для мониторинга состояния морской среды и климата.

Литература

1. **Marchuk G.I.** Adjoint Equations and Analysis of Complex Systems. — Dordrecht: Kluwer, 1995.
2. **Lions J.L.** Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. — Paris: Dunod, 1968.

3. **Sasaki Y.K.** An objective analysis based on the variational method // *J. Meteor. Soc. Japan.* — 1958. — Vol. 36. — P. 77–88.
4. **Пененко В.В., Образцов Н.Н.** Вариационный метод согласования полей метеорологических элементов // *Метеорология и гидрология.* — 1976. — № 11. — С. 1–11.
5. **Le Dimet F.X., Talagrand O.** Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: theoretical aspects // *Tellus.* — 1986. — Vol. 38A. — P. 97–110.
6. **Агошков В.И.** Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. — М.: ИВМ РАН, 2003.
7. **Mogensen K., Balmaseda M.A., Weaver A.T., Martin M., and Vidard A.** NEMOVAR: a variational data assimilation system for the NEMO ocean model // *ECMWF Technical Memorandum.* — 2009. — № 120. — P. 17–21.
8. **Шутяев В.П., Пармузин Е.И.** Устойчивость оптимального решения задачи вариационного усвоения с ковариационными матрицами ошибок данных наблюдений для модели термодинамики моря // *Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.* — Новосибирск, 2018. — Т. 21, № 2. — С. 221–236.
9. **Zalesny V.B., Gusev A.V., Ivchenko V.O., Tamsalu R., and Aps R.** Numerical model of the Baltic Sea circulation // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* — 2013. — Vol. 28, № 1. — P. 85–100.
10. **Marchuk G.I.** Splitting and alternative direction methods // *Handbook of Numerical Analysis / P.G. Ciarlet and J.L. Lions.* — North-Holland, Amsterdam, 1990. — Vol. 1. — P. 197–462.
11. **Zalesny V.B., Marchuk G.I., Agoshkov V.I., Bagno A.V., Gusev A.V., Diansky N.A., Moshonkin S.N., Tamsalu R., Volodin E.M.** Numerical simulation of large-scale ocean circulation based on multicomponent splitting method // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* — 2010. — Vol. 25, № 6. — P. 581–609.
12. **Агошков В.И., Пармузин Е.И., Шутяев В.П.** Численный алгоритм вариационной ассимиляции данных наблюдений о температуре поверхности океана // *ЖВМ и МФ.* — 2008. — Т. 48, № 8. — С. 1371–1391; Перевод: Agoshkov V.I., Parmuzin E.I., Shutyayev V.P. Numerical algorithm for variational assimilation of sea surface temperature data // *Comput. Maths. Math. Phys.* — 2008. — Vol. 48, № 8. — P. 1293–1312.
13. **Agoshkov V.I., Parmuzin E.I., Zalesny V.B., Shutyayev V.P., Zakharova N.B., Gusev A.V.** Variational assimilation of observation data in the mathematical model of the Baltic Sea dynamics // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* — 2015. — Vol. 30, № 4. — P. 203–212.
14. **Le Dimet F.-X., Shutyayev V.** On deterministic error analysis in variational data assimilation // *Nonlinear Processes in Geophysics.* — 2005. — Vol. 12. — P. 481–490.
15. **Gejadze I., Le Dimet F.-X., Shutyayev V.P.** On analysis error covariances in variational data assimilation // *SIAM J. Sci. Comput.* — 2008. — Vol. 30, № 4. — P. 1847–1874.
16. **Gejadze I., Le Dimet F.-X., Shutyayev V.P.** On optimal solution error covariances in variational data assimilation problems // *J. Comp. Phys.* — 2010. — Vol. 229. — P. 2159–2178.
17. **Gejadze I., Shutyayev V.P., Le Dimet F.-X.** Analysis error covariance versus posterior covariance in variational data assimilation // *Quarterly J. of the Royal Meteorological Society.* — 2013. — Vol. 139. — P. 1826–1841.
18. **Parmuzin E.I., Shutyayev V.P.** The study of solution sensitivity for the variational observation data assimilation problem in the Black Sea dynamics model // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.* — 2013. — Vol. 28, № 1. — P. 37–52.
19. **Агошков В.И., Пармузин Е.И., Шутяев В.П.** Ассимиляция данных наблюдений в задаче циркуляции Черного моря и анализ чувствительности ее решения // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана.* — 2013. — Т. 49, № 6. — С. 643–654; Перевод: Agoshkov V.I., Parmuzin E.I., and Shutyayev V.P. Observational data assimilation in the problem of black sea

- circulation and sensitivity analysis of its solution // *Izvestiya, Atmospheric and Ocean Physics*. — 2013. — Vol. 49, № 6. — P. 592–602.
20. **Алексеев В.В., Залесный В.Б.** Численная модель крупномасштабной динамики океана // *Вычислительные процессы и системы* / Г.И. Марчук. — М.: Наука, 1993. — Вып. 10. — С. 232–252.
 21. **Марчук Г.И., Дымников В.П., Залесный В.Б.** Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации. — Л.: Гидрометеоиздат, 1987.
 22. **Agoshkov V.I., Gusev A.V., Diansky N.A., and Oleinikov R.V.** An algorithm for the solution of the ocean hydrothermodynamics problem with variational assimilation of the sea level function data // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*. — 2007. — Vol. 22, № 2. — P. 1–10.
 23. **Тихонов А.Н.** О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // *ДАН СССР*. — 1963. — Т. 151, № 3. — С. 501–504.
 24. **Пененко В.В.** Методы численного моделирования атмосферных процессов. — Л.: Гидрометеоиздат, 1981.
 25. **Лебедев В.И.** Функциональный анализ и вычислительная математика. — М.: Физматлит, 2000.
 26. **Sacuci D.G.** Sensitivity theory for nonlinear systems: II. Extensions to additional classes of responses // *J. Math. Phys.* — 1981. — Vol. 22. — P. 2803–2812.
 27. **Шутяев В.П.** Операторы управления и итерационные алгоритмы в задачах вариационного усвоения данных. — М.: Наука, 2001.
 28. **Захарова Н.Б., Лебедев С.А.** Интерполяция оперативных данных буев ARGO для ассимиляции данных в модели циркуляции Мирового океана // *Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса*. — 2010. — Т. 7, № 4. — С. 104–111.
 29. **Zakharova N.B., Agoshkov V.I., and Parmuzin E.I.** The new method of ARGO buoys system observation data interpolation // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*. — 2013. — Vol. 28, № 1. — P. 67–84.

Поступила в редакцию 25 апреля 2018 г.

После доработки 20 июня 2018 г.

Принята к публикации 21 января 2019 г.

Литература в транслитерации

1. **Marchuk G.I.** *Adjoint Equations and Analysis of Complex Systems*. — Dordrecht: Kluwer, 1995.
2. **Lions J.L.** *Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. — Paris: Dunod, 1968.
3. **Sasaki Y.K.** An objective analysis based on the variational method // *J. Meteor. Soc. Japan*. — 1958. — Vol. 36. — P. 77–88.
4. **Penenko V.V., Obrazcov N.N.** Variacionnyy metod soglasovaniya poley meteorologicheskikh ehlementov // *Meteorologiya i gidrologiya*. — 1976. — № 11. — S. 1–11.
5. **Le Dimet F.X., Talagrand O.** Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: theoretical aspects // *Tellus*. — 1986. — Vol. 38A. — P. 97–110.
6. **Agoshkov V.I.** *Metody optimal'nogo upravleniya i sopryazhennykh uravneniy v zadachah matematicheskoy fiziki*. — М.: ИВМ РАН, 2003.
7. **Mogensen K., Balmaseda M.A., Weaver A.T., Martin M., and Vidard A.** NEMOVAR: a variational data assimilation system for the NEMO ocean model // *ECMWF Technical Memorandum*. — 2009. — № 120. — P. 17–21.

8. **Shutyaev V.P., Parmuzin E.I.** Ustoychivost' optimal'nogo resheniya zadachi variacionnogo usvoeniya s kovariacionnymi matricami oshibok dannyh nablyudeniy dlya modeli termodinamiki morya // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie.—Novosibirsk, 2018.—T. 21, № 2.—S. 221–236.
9. **Zalesny V.B., Gusev A.V., Ivchenko V.O., Tamsalu R., and Aps R.** Numerical model of the Baltic Sea circulation // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.—2013.—Vol. 28, № 1.—P. 85–100.
10. **Marchuk G.I.** Splitting and alternative direction methods // Handbook of Numerical Analysis / P.G. Ciarlet and J.L. Lions.—North-Holland, Amsterdam, 1990.—Vol. 1.—P. 197–462.
11. **Zalesny V.B., Marchuk G.I., Agoshkov V.I., Bagno A.V., Gusev A.V., Diansky N.A., Moshonkin S.N., Tamsalu R., Volodin E.M.** Numerical simulation of large-scale ocean circulation based on multicomponent splitting method // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.—2010.—Vol. 25, № 6.—P. 581–609.
12. **Agoshkov V.I., Parmuzin E.I., Shutyaev V.P.** Chislennyy algoritm variacionnoy assilyacii dannyh nablyudeniy o temperature poverhnosti okeana // ZHVM i MF.—2008.—T. 48, № 8.—S. 1371–1391; Perevod: Agoshkov V.I., Parmuzin E.I., Shutyaev V.P. Numerical algorithm for variational assimilation of sea surface temperature data // Comput. Maths. Math. Phys.—2008.—Vol. 48, № 8.—P. 1293–1312.
13. **Agoshkov V.I., Parmuzin E.I., Zalesny V.B., Shutyaev V.P., Zakharova N.B., Gusev A.V.** Variational assimilation of observation data in the mathematical model of the Baltic Sea dynamics // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.—2015.—Vol. 30, № 4.—P. 203–212.
14. **Le Dimet F.-X., Shutyaev V.** On deterministic error analysis in variational data assimilation // Nonlinear Processes in Geophysics.—2005.—Vol. 12.—P. 481–490.
15. **Gejadze I., Le Dimet F.-X., Shutyaev V.P.** On analysis error covariances in variational data assimilation // SIAM J. Sci. Comput.—2008.—Vol. 30, № 4.—P. 1847–1874.
16. **Gejadze I., Le Dimet F.-X., Shutyaev V.P.** On optimal solution error covariances in variational data assimilation problems // J. Comp. Phys.—2010.—Vol. 229.—P. 2159–2178.
17. **Gejadze I., Shutyaev V.P., Le Dimet F.-X.** Analysis error covariance versus posterior covariance in variational data assimilation // Quarterly J. of the Royal Meteorological Society.—2013.—Vol. 139.—P. 1826–1841.
18. **Parmuzin E.I., Shutyaev V.P.** The study of solution sensitivity for the variational observation data assimilation problem in the Black Sea dynamics model // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.—2013.—Vol. 28, № 1.—P. 37–52.
19. **Agoshkov V.I., Parmuzin E.I., Shutyaev V.P.** Assilyaciya dannyh nablyudeniy v zadache cirkulyacii Chernogo morya i analiz chuvstvitel'nosti ee resheniya // Izvestiya RAN. Fizika atmosfery i okeana.—2013.—T. 49, № 6.—S. 643–654; Perevod: Agoshkov V.I., Parmuzin E.I., and Shutyaev V.P. Observational data assimilation in the problem of black sea circulation and sensitivity analysis of its solution // Izvestiya, Atmospheric and Ocean Physics.—2013.—Vol. 49, № 6.—P. 592–602.
20. **Alekseev V.V., Zalesny V.B.** Chislennaya model' krupnomasshtabnoy dinamiki okeana // Vychislitel'nye processy i sistemy / G.I. Marchuk.—M.: Nauka, 1993.—Vyp. 10.—S. 232–252.
21. **Marchuk G.I., Dymnikov V.P., Zalesny V.B.** Matematicheskie modeli v geofizicheskoy gidrodinamike i chislennye metody ih realizacii.—L.: Gidrometeoizdat, 1987.
22. **Agoshkov V.I., Gusev A.V., Diansky N.A., and Oleinikov R.V.** An algorithm for the solution of the ocean hydrothermodynamics problem with variational assimilation of the sea level function data // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling.—2007.—Vol. 22, № 2.—P. 1–10.
23. **Tihonov A.N.** O reshenii nekorrektno postavlennykh zadach i metode regulyazicii // DAN SSSR.—1963.—T. 151, № 3.—S. 501–504.

24. **Penenko V.V.** Metody chislennogo modelirovaniya atmosferyh processov. — L.: Gidrometeoizdat, 1981.
25. **Lebedev V.I.** Funkcional'nyy analiz i vychislitel'naya matematika. — M.: Fizmatlit, 2000.
26. **Cacuci D.G.** Sensitivity theory for nonlinear systems: II. Extensions to additional classes of responses // J. Math. Phys. — 1981. — Vol. 22. — P. 2803–2812.
27. **Shutyaev V.P.** Operatory upravleniya i iteracionnye algoritmy v zadachah variacionnogo usvoeniya dannyh. — M.: Nauka, 2001.
28. **Zaharova N.B., Lebedev S.A.** Interpolyaciya operativnyh dannyh buev ARGO dlya assimilyacii dannyh v modeli cirkulyacii Mirovogo okeana // Sovremennyye problemy distancionnogo zondirovaniya Zemli iz kosmosa. — 2010. — T. 7, № 4. — S. 104–111.
29. **Zakharova N.B., Agoshkov V.I., and Parmuzin E.I.** The new method of ARGO buoys system observation data interpolation // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2013. — Vol. 28, № 1. — P. 67–84.