УДК 532.527

НОВЫЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ДИНАМИКИ ТОНКОГО ИСКРИВЛЕННОГО ВИХРЯ

А. И. Гудименко

Тихоокеанский океанологический институт ДВО РАН, 690041 Владивосток

Изучается динамика тонкого искривленного вихря в потенциальном потоке идеальной несжимаемой жидкости. Поток определяется рядом требований геометрического характера и не предполагается удовлетворяющим закону Био — Савара. Получено уравнение, описывающее динамику вихря, совпадающее по форме с известным уравнением локальной индукции для самоиндуцированного движения вихря. Параметры нового уравнения являются одновременно параметрами потока и в этом смысле лишены неопределенности, характерной для классического уравнения. Коэффициент нового уравнения может принимать любое заданное значение (необязательно много большее единицы, как требуется согласно концепции локальной индукции) и в общем случае является функцией натурального параметра нити.

Введение. Известные аналитические методы определения динамики тонкого, необязательно слабоискривленного вихря, погруженного в потенциальный поток идеальной несжимаемой жидкости, основаны на предположении, что этот поток индуцирован вихрем, по крайней мере на достаточно больших расстояниях от вихря. При этом считается, что характер воздействия определен законом Био — Савара, связывающим пространственное распределение завихренности с индуцированной скоростью.

При простейшем подходе (см., например, [1]) вихрь рассматривается как нить, т. е. не учитывается течение жидкости внутри и вблизи вихревого ядра. Динамика вихря определяется непосредственно из интеграла Био — Савара, а известные сингулярности в интеграле устраняются с помощью двух предположений: 1) приближение локальной индукции — предположение о доминирующем вкладе в величину скорости точки нити окрестного сегмента конечной длины l, много большей радиуса ядра вихря; 2) предположение о пренебрежимо малом вкладе в величину скорости точки окрестного сегмента длины ε порядка радиуса ядра вихря. Второе предположение в определенном смысле является следствием первого. Полученное при использовании такого подхода уравнение называется уравнением локальной индукции и может быть представлено в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t} = \frac{\Gamma}{8\pi}\,\ln\Big(\frac{l}{\varepsilon}\Big) i\psi^* \boldsymbol{N} + \text{к.с.}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{X}(t,s)$ — радиус-вектор точки нити как функция времени t и натурального параметра (длины дуги) нити s; Γ — циркуляция нити; i — мнимая единица; ψ — натуральная кривизна нити; $\boldsymbol{N}$ — нормальная составляющая натурального репера нити; звездочка и к.с. обозначают комплексное сопряжение.

Отметим, что уравнение (1) относится к классу уравнений, интегрируемых с помощью метода обратной задачи рассеивания, и эквивалентно таким известным уравнениям, как уравнение магнетика Гейзенберга и нелинейное уравнение Шредингера [2].

В работах [3–7] проводится более систематичный анализ потока, учитывается течение жидкости внутри и вблизи вихревого ядра. Динамика вихря определяется сращиванием асимптотических разложений по ε внутреннего и внешнего полей скоростей жидкости, причем внешнее поле определяется из интеграла Био — Савара в приближении локальной индукции. Полученное в первом приближении по ε уравнение отличается от уравнения (1) наличием в множителе при $i\psi^* \boldsymbol{N}$ дополнительного слагаемого, величина которого зависит от профиля начального приближения к аксиальной и азимутальной скоростям жидкости в ядре вихря.

Методы исследования динамики слабоискривленного вихря, т. е. вихря, характерное отклонение которого от прямолинейного не превышает радиуса ядра вихря, приводятся в [8, 9]. В настоящей работе такая динамика вихря не рассматривается.

Концепция локальной индукции, лежащая в основе рассмотренных подходов, не может быть признана удовлетворительной. Во-первых, в рамках этой концепции параметры l и ε выступают как неопределенные. Во-вторых, приближение локальной индукции ограничивает возможные значения коэффициента уравнения условием $\ln(l/\varepsilon) \gg 1$. В-третьих, требование постоянства длины l вдоль нити не может, очевидно, реализовываться для вихря произвольной формы. Отметим, что в случае слабоискривленного вихря концепция локальной индукции не согласуется с экспериментом. Например, в работе [10] множитель $\ln(l/\varepsilon)$ оценивается в пределах единицы, а в [11] устанавливается, что этот множитель является функцией локальной кривизны вихря.

В настоящей работе предлагается вывод уравнения динамики тонкого искривленного вихря, когда потенциальный поток не предполагается удовлетворяющим закону Био — Савара. Как и в работах [3–7], уравнение динамики вихря получается сращиванием асимптотических разложений внутреннего и внешнего полей скоростей жидкости. Однако, в отличие от этих работ, внешнее поле определяется не из интеграла Био — Савара в приближении локальной индукции, а путем наложения на поток ряда естественных ограничений, не противоречащих гидродинамическим уравнениям. Эти ограничения обусловливают динамику вихря, описываемую уравнением, совпадающим по форме с уравнением локальной индукции. Параметры нового уравнения, являясь одновременно параметрами потока, уже не выступают как неопределенные. Коэффициент нового уравнения может быть произвольной функцией натурального параметра нити. Задание этой функции конкретизирует как динамику вихря, так и внешний поток, в котором эта динамика реализуется.

По существу, указанные ограничения сводятся к требованию, чтобы в малой окрестности произвольной точки вихревой нити внешнее поле совпадало с полем, индуцированным прямолинейной нитью, касательной в данной точке к исходной вихревой нити. Это требование можно рассматривать как новый принцип определения динамики тонкого искривленного вихря, альтернативный концепции локальной индукции.

Внешнее поле определяется построением для произвольной вихревой нити в достаточно малой ее окрестности специальной системы координат. В этой системе одна из координат отождествляется с потенциалом внешнего поля, а две другие параметризуют произвольную эквипотенциальную поверхность поля. Ясно, что любое ограничение, налагаемое на внешний поток, является одновременно ограничением на координаты этой системы. Система строится методом разложения по малому параметру и используется как рабочая при определении внутреннего поля из гидродинамических уравнений.

1. Предварительные сведения. Будем считать, что рассматриваемый мировой объем жидкости погружен в координатное галилеево пространство $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Такое погружение, являясь одной из процедур обезразмеривания величин, выделяет характерный масштаб — единицу. К указанному масштабу будем относить временной параметр t движения вихря, натуральный параметр s вихря, характерный радиус кривизны вихря, а также циркуляцию Γ вихря. Расстояние порядка радиуса ядра вихря будем характеризовать величиной $\varepsilon \ll 1$.

Обозначим через U_t и γ_t соответственно область жидкости и вихревую нить в $\mathbb{R}^3$ в момент времени t. Введем натуральные кривизну ψ и репер $\langle \boldsymbol{N}, \boldsymbol{t}\rangle$ нити γ_t соотношениями

$$\psi = \text{æ} \exp\Big(i\int^s \tau\, ds'\Big), \quad \boldsymbol{N} = (\boldsymbol{n} + i\boldsymbol{b}) \exp\Big(i\int^s \tau\, ds'\Big), \quad \boldsymbol{t} = \boldsymbol{X}_s,$$

где æ — кривизна; τ — кручение; $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{b}$ — нормаль и бинормаль к нити соответственно; $\boldsymbol{X}(t,s)$ — натуральная параметризация нити γ_t. Справедливы формулы Серре — Френе

$$\boldsymbol{N}_s = -\psi \boldsymbol{t}, \qquad \boldsymbol{t}_s = (\psi^* \boldsymbol{N} + \psi \boldsymbol{N}^*)/2. \tag{2}$$

Отметим, что под вихревой нитью понимается кривая в $\mathbb{R}^3$ вместе с числовым параметром, имеющим смысл циркуляции этой нити. Классическое выражение для индуцированного вихревой нитью поля определяется интегралом Био — Савара.

В формулах все индексы, за исключением n, при отсутствии специальных указаний изменяются от 1 до 3. Индекс n принимает произвольные целые значения. По повторяющимся индексам проводится суммирование.

2. Постановка задачи определения внешнего поля. Ограничения, налагаемые на внешний потенциальный поток, можно рассматривать как требования, определяющие в произвольный момент времени t систему координат (r, φ, s), в которой φ — потенциал внешнего поля в момент t; r, s — некоторые координаты на эквипотенциальной поверхности φ. Система координат (r, φ, s) определена в некоторой области евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, поэтому допустимо ее описание в терминах компонент метрики, индуцированной скалярным произведением в $\mathbb{R}^3$. Таким образом, рассматриваемая задача сводится к определению в произвольный момент времени t компонент метрики в системе координат (r, φ, s).

В каждый момент времени t систему координат (r, φ, s) будем ассоциировать с нитью γ_t. В качестве области определения координат возьмем окрестность $U_t \setminus \gamma_t$ нити γ_t, расположенную достаточно близко к γ_t в том смысле, что расстояние от любой точки области U_t до γ_t одного асимптотического порядка с ε. Потребуем, чтобы в этой окрестности при $r \to 0$ координаты r, φ, s образовывали локальную в каждой точке нити γ_t цилиндрическую систему координат с натуральным параметром вдоль нити s. Такое требование означает, в частности, что в малой окрестности произвольной точки нити γ_t внешнее поле совпадает с полем, индуцированным прямолинейной вихревой нитью, касательной к γ_t в этой точке.

Покажем, как координаты r, φ, s определяются с использованием метрики. Будем работать с базисом $(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ векторных полей на $U_t \setminus \gamma_t$, связанным с координатным базисом $(\partial_r, \partial_\varphi, \partial_s)$ системы (r, φ, s) соотношениями

$$\partial_1 = \partial_r, \qquad \partial_2 = r^{-1}\partial_\varphi, \qquad \partial_3 = \partial_s.$$

Обозначим через $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t, r, \varphi, s)$ отображение перехода от искомых координат на $U_t \setminus \gamma_t$ к декартовым и положим

$$\boldsymbol{e}_k := \partial_k \boldsymbol{x}. \tag{3}$$

С помощью векторных полей (3) определим величины h_{kl}, b^m_{kl} и γ^m_{kl}, полагая

$$h_{kl} = (\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l), \qquad \partial_l \boldsymbol{e}_k - \partial_k \boldsymbol{e}_l = b^m_{kl} \boldsymbol{e}_m, \qquad \partial_l \boldsymbol{e}_k = \gamma^m_{kl} \boldsymbol{e}_m, \tag{4}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$. Величины h_{kl} являются компонентами метрики на $U_t \setminus \gamma_t$ в базисе $(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$. Коэффициенты b^m_{kl} вычисляются по формуле

$$b^m_{kl} = r^{-1}\delta^m_2 (\delta^1_k \delta^2_l - \delta^1_l \delta^2_k), \tag{5}$$

где δ_l^k — символ Кронекера. Величины γ_{kl}^m называются коэффициентами канонической плоской связности на $U_t \setminus \gamma_t$ [12, 13]. Полагая

$$b_{mkl} := h_{mi} b_{kl}^i, \qquad \gamma_{mkl} := h_{mi} \gamma_{kl}^i, \tag{6}$$

нетрудно убедиться (см. [12]), что

$$\gamma_{mkl} = (\partial_k h_{ml} + \partial_l h_{mk} - \partial_m h_{kl})/2 + (b_{klm} + b_{mkl} - b_{lmk})/2. \tag{7}$$

Рассмотрим систему уравнений, заданную последним соотношением в (4). Это переопределенная система уравнений в частных производных первого порядка. Условием ее разрешимости является коммутирование координатных полей $(\partial_r, \partial_\varphi, \partial_s)$ на $U_t \setminus \gamma_t$. Применяя это условие к системе, получим

$$R_{gh,ij} := \partial_i \gamma_{ghj} - \partial_j \gamma_{ghi} + h^{kl} \gamma_{kgj} \gamma_{lhi} - h^{kl} \gamma_{kgi} \gamma_{lhj} + \gamma_{ghk} b_{ij}^k = 0, \tag{8}$$

где h^{kl} — элементы матрицы, обратной к h_{kl}. Соотношение (8) называется условием нулевой кривизны связности γ_{kl}^m. Соотношения (5)–(8) составляют необходимое и достаточное условие того, что функции h_{kl} определяют систему координат (r, φ, s).

В терминах компонент метрики запишем условие того, что координата φ — потенциал поля скоростей жидкости. Так как жидкость несжимаема, это условие означает, что φ — гармоническая на $U_t \setminus \gamma_t$ функция, т. е. $\Delta\varphi = 0$, где Δ — трехмерный оператор Лапласа. В базисе $(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ отсюда имеем

$$r^{-1} h^{12} + h^{kl} \gamma_{kl}^2 = 0. \tag{9}$$

Перейдем к собственно постановке задачи. Уточняя приведенные выше требования к координатам r, φ, s, определим “растянутую” по отношению к r переменную $\rho := \varepsilon^{-1} r$ и потребуем, чтобы при этом выполнялось асимптотическое разложение

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \varepsilon \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \varepsilon^n \boldsymbol{x}_n + \ldots. \tag{10}$$

Тогда будем иметь

$$\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_{k;0} + \varepsilon \boldsymbol{e}_{k;1} + \ldots + \varepsilon^n \boldsymbol{e}_{k;n} + \ldots, \qquad h_{kl} = h_{kl;0} + \varepsilon h_{kl;1} + \ldots + \varepsilon^n h_{kl;n} + \ldots. \tag{11}$$

Потребуем также выполнения граничного условия

$$\lim_{\rho \to 0} h_{kl;n} = 0 \qquad (k = l,\ n \geqslant 1) \tag{12}$$

и соотношений

$$\boldsymbol{x}_0 := \boldsymbol{X}(t, s), \qquad h_{kl;0} := \delta_{kl}, \tag{13}$$

где δ_{kl} — символ Кронекера.

В данной работе ограничимся вычислением первого приближения к h_{kl}. В качестве определяющей системы уравнений возьмем соотношения (4)–(7), условие нулевой кривизны (8) и условие гармоничности (9).

3. Вычисление компонент метрики в координатах r, φ, s**.** В вычислениях используется ряд простых соотношений $h_{;0}^{kl} = \delta^{kl}$, $h_{;1}^{kl} = -h_{kl;1}$, $b_{klm;0} = b_{lm;0}^k$ и т. п., вытекающих из формул типа (6), связывающих геометрические величины с метрически двойственными к ним, после подстановки в эти формулы соответствующих асимптотических выражений и отделения членов при подходящих степенях ε.

Найдем систему уравнений для определения величин $h_{kl;1}$. С помощью (7) выразим условия (8) и (9) через компоненты метрики, подставим вместо последних их асимптотические выражения и приравняем к нулю суммы членов при ε^{-1} и ε^0 соответственно.

В результате из (8), рассматривая компоненты $R_{12,12}$, $R_{13,13}$, $R_{23,23}$, $R_{12,13}$ и $R_{12,23}$, получим соответственно уравнения

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_{22;1}}{\partial\rho^2}-\frac{1}{2\rho^2}\frac{\partial^2 h_{11;1}}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial h_{22;1}}{\partial\rho}+\frac{1}{2\rho}\frac{\partial h_{11;1}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 h_{12;1}}{\partial\varphi\,\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial h_{12;1}}{\partial\varphi}=0; \qquad (14)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_{33;1}}{\partial\rho^2}=0, \qquad -\frac{1}{2\rho^2}\frac{\partial^2 h_{33;1}}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{2\rho}\frac{\partial h_{33;1}}{\partial\rho}=0; \qquad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\frac{1}{2\rho}\frac{\partial h_{13;1}}{\partial\varphi}-\frac{1}{2\rho}\frac{\partial\rho h_{23;1}}{\partial\rho}\Big)=0, \quad \frac{\partial}{\partial\varphi}\Big(\frac{1}{2\rho}\frac{\partial h_{13;1}}{\partial\varphi}-\frac{1}{2\rho}\frac{\partial\rho h_{23;1}}{\partial\rho}\Big)=0, \qquad (16)$$

а из (9) — уравнение

$$-\frac{1}{2\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big(h_{11;1}-h_{22;1}+h_{33;1}\Big)+\frac{\partial h_{12;1}}{\partial\rho}=0. \qquad (17)$$

Исключая из (14) с помощью (17) неизвестную $h_{11;1}$, с точностью до произвольной, не зависящей от φ функции получим

$$\Delta\Big(h_{22;1}-2\int h_{12;1}\,d\varphi\Big)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial h_{33;1}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 h_{33;1}}{\partial\varphi^2}, \qquad (18)$$

где Δ — двумерный оператор Лапласа:

$$\Delta:=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Уравнения (15)–(18) являются искомыми.

Решение системы (15), удовлетворяющее граничному условию (12), имеет вид

$$h_{33;1}=-\psi^*\rho\mathrm{e}^{i\varphi}+\text{к.с.}, \qquad (19)$$

где $\psi(t,s)$ — константа интегрирования. Учитывая (12), (19) и не стремясь к общности, в качестве решения уравнения (18) возьмем

$$h_{22;1}-2\int h_{12;1}\,d\varphi=\ln(\alpha\rho)\psi^*\rho\mathrm{e}^{i\varphi}+\text{к.с.}, \qquad (20)$$

где $\alpha(t,s)$ — произвольная положительная функция. В качестве решения системы (16) будем рассматривать произвольные функции $h_{13;1}$ и $h_{23;1}$, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\partial h_{13;1}}{\partial\varphi}-\frac{\partial\rho h_{23;1}}{\partial\rho}=0.$$

Коэффициент $h_{11;1}$ находится подстановкой (19) и (20) в (17). Выбор $h_{12;1}$ произволен.

Определим геометрический смысл константы интегрирования ψ. Подставим в последнее соотношение (4) разложение (11) и уже известное с точностью до ε^0 разложение коэффициентов связности. При ε^{-1} и ε^0, в частности, имеем

$$\frac{\partial\boldsymbol{e}_{1;0}}{\partial\varphi}=\boldsymbol{e}_{2;0}, \qquad \frac{\partial\boldsymbol{e}_{2;0}}{\partial\varphi}=-\boldsymbol{e}_{1;0}, \qquad \frac{\partial\boldsymbol{e}_{k;0}}{\partial\rho}=\frac{\partial\boldsymbol{e}_{3;0}}{\partial\varphi}=0; \qquad (21)$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{e}_{1;0}}{\partial s}=-\frac{1}{2}\,\psi^*\mathrm{e}^{i\varphi}\boldsymbol{e}_{3;0}+\text{к.с.}, \qquad \frac{\partial\boldsymbol{e}_{3;0}}{\partial s}=\frac{1}{2}\,\psi^*\mathrm{e}^{i\varphi}(\boldsymbol{e}_{1;0}+i\boldsymbol{e}_{2;0})+\text{к.с.} \qquad (22)$$

Решение системы (21) запишем в виде

$$\boldsymbol{e}_{1;0}=\boldsymbol{N}^*\mathrm{e}^{i\varphi}/2+\text{к.с.}, \qquad \boldsymbol{e}_{2;0}=\boldsymbol{N}^*i\mathrm{e}^{i\varphi}/2+\text{к.с.}, \qquad \boldsymbol{e}_{3;0}=\boldsymbol{t}. \qquad (23)$$

Из (13) следует, что пара $\langle \boldsymbol{N}, \boldsymbol{t} \rangle$ образует нормированную диаду векторов, причем вектор $\boldsymbol{t}$ — касательный к γ_t. Подставляя (23) в (22), получим систему уравнений, совпадающую по форме с системой Серре — Френе (2). Следовательно, ψ — натуральная кривизна, $\langle \boldsymbol{N}, \boldsymbol{t} \rangle$ — натуральный репер кривой γ_t.

Итак, задача определения внешнего поля (в указанном выше смысле) решена.

Замечание. Возвращаясь к исходной переменной r, находим, что поле h_{kl} зависит от параметра α/ε, который может принимать произвольные положительные значения. Варьируя этот параметр, получаем совокупность внешних полей. Вопрос о том, имеется ли среди них поле, индуцированное нитью, остается открытым.

4. Уравнения гидродинамики в координатах r, φ, s. Далее будем относить поток жидкости к подвижной криволинейной системе координат (r, φ, s) на $U_t \setminus \gamma_t$.

Обозначим через u^k, v^k и h^k компоненты в базисе $(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ полей скоростей в момент времени t соответственно абсолютного движения жидкости, относительного движения жидкости и движения системы координат. Обозначим через $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ базис на $U_t \setminus \gamma_t$, двойственный к базису $(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$. Положим $u_k := h_{kl}u^l$, $v_k := h_{kl}v^l$, $h_k := h_{kl}h^l$. Величины u_k, v_k, h_k — компоненты в базисе $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ полей, метрически двойственных к перечисленным полям скоростей. Далее будем использовать только величины u_k, v_k, h_k (а не величины u^k, v^k, h^k), поэтому термин "метрически двойственное" в названии соответствующих полей будем опускать. Так, очевидное соотношение $u_k = v_k + h_k$ читается как "равенство поля скоростей абсолютного движения жидкости сумме полей скоростей относительного движения жидкости и движения системы координат". Отметим, что для компонент h_k имеет место выражение, аналогичное выражению для компонент h_{kl} в формуле (4), а именно

$$h_k = (\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_0) \qquad \Big(\boldsymbol{e}_0 := \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}\Big). \tag{24}$$

Уравнения Эйлера и неразрывности относительно подвижной криволинейной системы координат (r, φ, s) в базисе $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ на $U_t \setminus \gamma_t$ записываются в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\, u_i + v_m h^{ml}(\partial_l u_i - \partial_i u_l + u_k b^k_{li}) + \partial_i \Big(p + \frac{1}{2}\, h^{kl} u_k u_l\Big) = 0; \tag{25}$$

$$-h^{kl}\partial_k u_l + h^{kl}\gamma^m_{lk} u_m = 0. \tag{26}$$

В справедливости такой записи уравнений можно убедиться простой проверкой, переходя от базиса $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ рассматриваемой системы координат к декартову базису естественной инерциальной системы координат в $\mathbb{R}^3$.

5. Постановка задачи определения динамики вихря. Предположим, что область U_t наряду с вихревой нитью γ_t содержит исследуемый вихрь. Будем считать, что циркуляции нити и вихря совпадают. Уравнение граничной поверхности вихря примем в виде $r = r_B(t, \varphi, s)$.

Сформулируем общие требования к потоку. Примем ε в качестве малого параметра задачи, перейдем к переменной $\rho := \varepsilon^{-1} r$ и сохраним все сделанные ранее предположения относительно асимптотического поведения метрики. Потребуем дополнительно, чтобы

$$v_k = \varepsilon^{-1} v_{k;-1} + v_{k;0} + \ldots + \varepsilon^n v_{k;n} + \ldots, \qquad h_k = h_{k;0} + \varepsilon h_{k;1} + \ldots + \varepsilon^n h_{k;n} + \ldots,$$

$$\rho_B = \rho_0 + \varepsilon\rho_1 + \ldots + \varepsilon^n \rho_n + \ldots \qquad (\rho_B := \varepsilon^{-1} r_B),$$

а также

$$\lim_{\rho \to 0} v_{k;n} = 0, \qquad \rho_0 = \rho_0(t, s) \qquad (k = 1, 2;\; n \geqslant -1). \tag{27}$$

Для внутреннего поля примем

$$v_{1;-1} = 0, \qquad v_{2;-1} = v(\rho), \qquad v_{3;-1} = w(\rho), \tag{28}$$

где v и w — произвольные функции на U_t, причем $v \to 0$ при $\rho \to 0$. Будем считать, что это поле непрерывно всюду на U_t.

Внешнее поле абсолютных скоростей жидкости определяем как дифференциал координаты φ, умноженный на $\Gamma/(2\pi)$ (Γ — циркуляция нити). В базисе $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ оно имеет компоненты

$$u_1 = u_3 = 0, \qquad u_2 = \Gamma/(2\pi r).$$

Следовательно,

$$u_{1;-1} = u_{3;-1} = 0, \qquad u_{2;-1} = \Gamma/(2\pi\rho), \qquad u_{k;n} = 0 \quad (n \geqslant 0). \tag{29}$$

Динамику вихря будем определять из условия сращивания при $\rho \to \infty$ внутреннего и внешнего полей абсолютных скоростей жидкости вплоть до нулевого приближения. Поле скоростей движения системы координат будем определять из соотношения (24), а внутреннее поле относительных скоростей жидкости — из уравнений (25), (26).

6. Уравнение динамики вихря. Применим условие сращивания к начальным приближениям внутреннего и внешнего полей абсолютных скоростей жидкости. В силу условий потенциальности потока вне вихря и непрерывности полей скоростей при переходе через границу вихря из соотношений (28), (29) имеем $v = \Gamma/(2\pi\rho)$ и $w = 0$ при $\rho \geqslant \rho_0$, т. е. в начальном приближении внутреннее и внешнее поля скоростей вне и на границе вихря совпадают.

Вычислим нулевое приближение к полю скоростей движения системы координат. Подставим (10) и (11) в (24) и отделим в полученном выражении члены при ε^0. С учетом (23) имеем

$$h_{1;0} = (\boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{N}^*)\mathrm{e}^{i\varphi}/2 + \text{к.с.}, \qquad h_{2;0} = (\boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{N}^*)i\mathrm{e}^{i\varphi}/2 + \text{к.с.}, \qquad h_{3;0} = (\boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{t}),$$

где $\boldsymbol{X}_t := \partial \boldsymbol{X}/\partial t$. Заметим, что

$$\frac{\partial h_{1;0}}{\partial \varphi} = h_{2;0}, \qquad \frac{\partial h_{2;0}}{\partial \varphi} = -h_{1;0}. \tag{30}$$

Вычислим нулевое приближение к радиальной и вращательной составляющим внутреннего поля относительных скоростей жидкости. Запишем (26) с учетом (9) в виде

$$-h^{kl}\partial_k u_l + h^{kl}\gamma^1_{lk}u_1 - h^{12}u_2/r + h^{kl}\gamma^3_{lk}u_3 = 0. \tag{31}$$

Подставим в (31) асимптотические выражения для h^{kl}, u_k и γ^m_{kl} и отделим члены при ε^{-1}. С учетом (30) имеем

$$-\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \rho v_{1;0}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial v_{2;0}}{\partial \varphi} + \omega h_{12;1} + \frac{\partial w h_{13;1}}{\partial \rho} + \frac{w}{\rho}\Big(h_{13;1} + \frac{\partial h_{23;1}}{\partial \varphi}\Big) = 0, \tag{32}$$

где $\omega := v_\rho + v/\rho$. Уравнение (32) удовлетворяется введением функции тока $\psi_{12;1}$:

$$v_{1;0} = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \psi_{12;1}}{\partial \varphi} + w h_{13;1}, \qquad v_{2;0} = -\frac{\partial \psi_{12;1}}{\partial \rho} + \rho\omega \int h_{12;1}\,d\varphi + w h_{23;1}. \tag{33}$$

Исключим давление из первых двух уравнений ($i = 1, 2$) системы (25) и подставим в результат асимптотические выражения для v_k, h_k и h^{kl} с коэффициентами $v_{1;0}, v_{2;0}$ в форме (33). При ε^{-2} получим

$$\Delta\frac{\partial \psi_{12;1}}{\partial \varphi} - \frac{\omega_\rho}{v}\,\frac{\partial \psi_{12;1}}{\partial \varphi} + \omega\Big(\frac{\partial h_{22;1}}{\partial \varphi} - 2h_{12;1}\Big) + \frac{w w_\rho}{v}\,\frac{\partial h_{33;1}}{\partial \varphi} = 0, \tag{34}$$

где Δ — двумерный оператор Лапласа. Решение уравнения (34) будем искать в виде

$$\psi_{12;1} = b(t,\rho,s) + c(\rho)\psi^* \mathrm{e}^{i\varphi} + \text{к.с.} \tag{35}$$

Подставляя (19), (20) и (35) в (34), имеем $c_{\rho\rho} + c_\rho/\rho - c/\rho^2 - \omega_\rho c/v = -\omega\rho\ln(\alpha\rho) + \rho w w_\rho/v$. Интегрирование этого уравнения с учетом (27) дает

$$c = v\int\limits_0^\rho \frac{d\eta}{\eta v^2(\eta)} \int\limits_0^\eta (-\zeta^2 v\omega \ln(\alpha\zeta) + \zeta^2 w w_\zeta)\, d\zeta. \tag{36}$$

Выражения (33), (35), (36) определяют нулевое приближение к радиальной и вращательной составляющим внутреннего поля относительных скоростей жидкости.

Применим процедуру сращивания к нулевым приближениям внутреннего и внешнего полей абсолютных скоростей жидкости. Для внутреннего поля, в частности, имеем

$$\lim_{\rho\to\infty} (v_{1;0} + h_{1;0}) = 0.$$

После подстановки явных выражений для $v_{1;0}$ и $h_{1;0}$ и несложных преобразований получим искомое уравнение динамики вихря

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t} = \frac{\Gamma}{8\pi}(\ln(\alpha\rho_0) - A(\rho_0)) i\psi^* \boldsymbol{N} + \text{к.с.} + (\boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{t})\boldsymbol{t}, \tag{37}$$

где

$$A(\rho) := \frac{4\pi^2}{\Gamma^2}\left(\int\limits_0^\rho \zeta v^2\, d\zeta - 2\int\limits_0^\rho \zeta w^2\, d\zeta\right).$$

Отметим, что выражение для $A(\rho_0)$ совпадает с соответствующим выражением, полученным в работах [2–6]. Значение этого параметра определяется начальным приближением к аксиальной и азимутальной скоростям жидкости в ядре вихря. Например, для начального распределения скоростей жидкости, соответствующего твердотельному вращению, $A(\rho_0) = 1/4$.

Третье слагаемое в правой части (37) без ограничения общности можно положить равным нулю. Процедура устранения этого слагаемого состоит в следующем. Начиная с п. **4** необходимо перейти от системы координат (r,φ,s) к системе (r,φ,ξ), где ξ — параметр вдоль нити γ_t, для которого $(\partial\boldsymbol{X}(t,\xi)/\partial t, \boldsymbol{t}) = 0$. При этом все величины в формулах следует по-прежнему относить к базису $(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$. Тогда проведенные в данном пункте работы вычисления останутся без изменений, за исключением формулы (37), в которой третье слагаемое будет отсутствовать.

Если начальное приближение к радиусу ядра вихря постоянно вдоль нити и во времени, то согласно замечанию п. **3** величина $\ln(\alpha\rho_0)$ является параметром внешнего поля. По построению этот параметр есть произвольная функция t и s. Выбор этой функции определяет как динамику вихря, так и поток, в котором эта динамика реализуется. В частности, интегрируемая динамика вихря реализуется, если этот параметр является константой.

Заключение. Представлен новый метод определения динамики тонкого искривленного вихря в потенциальном потоке идеальной несжимаемой жидкости. Традиционно динамика вихря определялась исходя из предположения, что потенциальный поток, по крайней мере на достаточно больших расстояниях от вихря, удовлетворяет закону Био — Савара. При этом из-за сложности учета индуцированного влияния на поток всего вихря использовалась концепция локальной индукции. Согласно новому методу поток строится без указанного предположения на основе требования локального совпадения внешнего поля скоростей жидкости с полем, индуцированным подходящим прямолинейным вихрем.

Получено уравнение динамики вихря, совпадающее по форме с классическим уравнением локальной индукции. Параметры нового уравнения имеют смысл параметров потока, коэффициент уравнения необязательно много больше единицы.

В отличие от традиционных новый метод определения динамики вихря дает аналитическое доказательство существования потоков, реализующих эту динамику, в частности интегрируемую динамику вихря.

Заслуживает внимания предложенный в работе метод исследования потока жидкости путем рассмотрения последнего относительно координат, особым образом связанных с потенциальной составляющей потока. В этих координатах потенциальная часть потока тривиальна, т. е. является заранее известной постоянной величиной. Следовательно, исследование полного потока сводится к изучению его вихревой составляющей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hama F. R.** Progressive deformation of a curved vortex filament by its own induction // Phys. Fluids. 1962. V. 5. P. 1156–1162.
2. **Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.** Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
3. **Widnall S. E., Bliss D. B., Zalay A.** Theoretical and experimental study of the stability of a vortex pair // Aircraft wake turbulence and its detection. N. Y.: Plenum, 1971. P. 305–338.
4. **Moore D. W., Saffman P. G.** Motion of a vortex filament with axial flow // Philos. Trans. Roy. Soc. London. 1972. V. A272. P. 403–429.
5. **Callegari R. J., Ting L.** Motion of a curved vortex filament with decaying vortical core and axial velocity // SIAM J. Appl. Math. 1978. V. 35. P. 148–175.
6. **Fukumoto Y., Miyazaki T.** Three-dimensional distortions of a vortex filament with axial velocity // J. Fluid Mech. 1991. V. 222. P. 369–416.
7. **Klein R., Knio O. M.** Asymptotic vorticity structure and numerical simulation of slender vortex filaments // J. Fluid Mech. 1995. V. 284. P. 275–321.
8. **Leibovich S., Ma H. Y.** Soliton propagation on vortex cores and the Hasimoto soliton // Phys. Fluids. 1983. V. 26. P. 3173–3179.
9. **Leibovich S., Brown S. N., Patel Y.** Bending waves on inviscid columnar vortices // J. Fluid Mech. 1986. V. 173. P. 595–624.
10. **Hopfinger E. J., Browand F. K., Gagne Y.** Turbulence and wave in rotating tank // J. Fluid Mech. 1982. V. 125. P. 505–534.
11. **Maxworthpy T., Hopfinger E. J., Redekopp L. J.** Wave motions on vortex cores // J. Fluid Mech. 1985. V. 151. P. 141–165.
12. **Лихнерович А.** Теория связностей в целом и группы голономии. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
13. **Зуланке Р., Винтген П.** Дифференциальная геометрия и расслоения. М.: Мир, 1975.

Поступила в редакцию 16/VIII 2000 г.,
в окончательном варианте — 9/VII 2001 г.