

- тастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью.— «Докл. АН СССР», 1975, т. 223, № 6, с. 1344.
41. Курдюмов С. П. Локализация тепла в нелинейной среде. М., Препринт ИПМ, 1976, № 39.
 42. Зельдович Я. Б., Компанеев А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры.— В кн.: К 70-летию А. Ф. Иоффе. М., Изд-во АН СССР, 1950, с. 61.
 43. Баренблатт Г. И., Вишик И. М. О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа.— ПММ, 1956, т. 20, № 3, с. 411.
 44. Marshak R. An influence of the radiation on the behavior of the shock waves.— «Phys. Fluids», 1958, N 1, p. 24.
 45. Волосевич П. П., Курдюмов С. П., Буеурин Л. Н., Крус В. П. Решение одномерной плоской задачи о движении поршня в идеальном теплопроводном газе.— ЖВММФ, 1963, т. 3, № 1, с. 159.
 46. Самарский А. А., Курдюмов С. П., Волосевич П. П. Бегущие волны в среде с нелинейной теплопроводностью.— ЖВММФ, 1965, т. 5, № 2, с. 199.
 47. Курдюмов С. П. Бегущие волны в среде с нелинейной теплопроводностью. М., Препринт ИПМ, № 45, 55, 56, 1971, Деп. в ВИНТИ, № 337-74 Деп., № 339-74 Деп., № 338-74 Деп.
 48. Волосевич П. П., Курдюмов С. П., Леванов Е. И. Различные режимы теплового нагрева при взаимодействии мощных потоков излучения с веществом.— ПМТФ, 1972, № 5, с. 41.
 49. Самарский А. А., Зинтренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемными источниками тепла.— «Докл. АН СССР», 1976, т. 227, № 2, с. 321.
 50. Маргинсон Л. К., Павлов К. Б. К вопросу о пространственной локализации тепловых возмущений в задачах нелинейной теплопроводности с поглощением.— ЖВММФ, 1972, т. 12, № 4, с. 1048.
 51. Калашников А. С. О характере распространения возмущений в задачах с поглощением.— ЖВММФ, 1974, т. 14, № 4, с. 891.
 52. Гольдин В. Я., Четверункин Б. И. О численном моделировании задач радиационной газовой динамики. М., Препринт ИПМ, 1973, № 17.
 53. Доредницын В. А., Попов Ю. П. О стационарных режимах излучающего сильноточного самосжатого разряда.— ЖВММФ, 1973, т. 13, № 1, с. 247.
 54. Кварцхава И. Ф., Матвеев Ю. В., Бутов И. Я., Самарский А. А., Курдюмов С. П., Попов Ю. П. Роль самоорганизации пинчевых разрядов в нагреве и удержании плазмы.— «Nuclear Fusion», Supplement, 1975, p. 175.

УДК 533.21

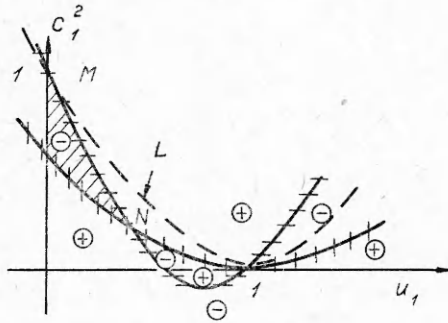
К ВОПРОСУ ОБ АДИАБАТИЧЕСКОМ СЖАТИИ ГАЗА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СФЕРИЧЕСКОГО ПОРШНЯ

Я. М. Каждан

(Москва)

1. Сферический поршень *с начальным радиусом r_0 , внутри которого находится покоящийся газ (κ — показатель политропы, c_0 — скорость звука), начинает с некоторого момента сходить к центру. Задача состоит в определении такой траектории поршня, при которой все исходящие

* Для случая плоского поршня решение приведено в [1]. Автомоделная сферически-симметричная волна сжатия рассмотрена также И. Е. Забахиным и В. А. Сиомоненко. (Устное сообщение.—Я. К.)



Фиг. 1

из нее β -характеристики сходятся в центре в момент схлопывания поршня, принимаемый в дальнейшем за начало отсчета времени $t = 0$. Движение газа внутри поршня будет при этом сферически-симметричным, изэнтропичным и автомодельным. В качестве автомодельной переменной принимается $\eta = c_0 t / r$, а газодинамические функции представляются в виде

$$u = r/tu_1(\eta); \quad c = r/tc_1(\eta).$$

В плоскости rt течение будет отделено от области покоя характеристикой $r = -c_0 t (\eta = -1)$. Функции $u_1(\eta)$ и $c_1(\eta)$ определяются уравнением

$$(1.1) \quad \frac{du_1}{dc_1^2} = \frac{u_1 [(u_1 - 1)^2 - 3c_1^2]}{2c_1^2 [(u_1 - 1)(\kappa u_1 - 1) - c_1^2]}$$

с начальными условиями

$$u_1 = 0, \quad c_1^2 = 1$$

и квадратурой

$$(1.2) \quad \eta = -\exp \int_1^{c_1^2} \frac{(u_1 - 1)^2 - c_1^2}{2c_1^2 [(u_1 - 1)(\kappa u_1 - 1) - c_1^2]} dc_1^2.$$

Точка $M(u_1 = 0, c_1^2 = 1)$ — особая точка уравнения (1.1). Характер особенности — узел. Отдельный ус узла $u_1 = 0$. Асимптотика, соответствующая общему направлению,

$$c_1^2 \approx 1 + (\kappa + 1)u_1 \ln u_1 + Au_1,$$

где A — произвольная постоянная.

Интегральные кривые уравнения (1.1), пересекающие кривую L ($(u_1 - 1)^2 = c_1^2$) вне особых точек, соответствуют течению, в котором возникнут ударные волны, т. е. характеристики пересекутся до схлопывания поршня. Действительно, согласно квадратуре (1.2), в этом случае u_1 и c_1^2 перестают быть однозначными функциями η . Из приведенной схемы изоклин уравнения (1.1) видно, что лишь интегральная кривая, соединяющая особые точки M и N ($u_{10} = 2/(3\kappa - 1)$, $c_{10}^2 = 3(\kappa - 1)^2/(3\kappa - 1)^2$), не пересекает кривой L (из анализа уравнения (1.1) следует, что никакая интегральная кривая не попадает в точку $u_1 = \pm\infty$, $c_1^2 = \infty$) (фиг. 1).

Особая точка N — седло. Поэтому численное определение интегральной кривой MN удобно вести от точки N и M . Для этого в уравнении (1.1) осуществляется замена переменных $x = c_1^2 - c_{10}^2$, $y = u_1 - u_{10}$. Сепаратрисе седла N , идущей в точку M , соответствует

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \frac{2(1-3\kappa)}{(\kappa-1)[3-\kappa + \sqrt{13\kappa^2 - 14\kappa + 5}]}$$

Согласно квадратуре (1.2), точке N соответствует значение $\eta = 0$. Так как подынтегральная функция в квадратуре (1.2) не обращается ни в нуль, ни в бесконечность на интервале $1 > c_1^2 > 3(\kappa - 1)^2/(3\kappa - 1)^2$, то η возра-

стает от -1 до 0 . Кривая $u_1(\eta)$, $c_1(\eta)$, соответствующая интегральной кривой уравнения (1.1), соединяющей точки M и N , будет искомой. Действительно, β -характеристики определяются уравнением

$$(1.3) \quad \frac{dt}{d\eta} = \frac{t}{\eta[1+c_1-u_1]}.$$

Так как интегральная кривая MN вне точки M , соответствующей $\eta = -1$, не пересекает кривую L , то на интервале $-1 < \eta < 0$ знаменатель правой части (1.3) отличен от нуля и вся правая часть при $t < 0$ положительна. Таким образом, η — монотонно возрастающая функция t , и через каждую точку ($t < 0$, $\eta < 0$) проходит единственная характеристика.

Асимптотика любой β -характеристики при $\eta \rightarrow 0$ имеет вид

$$(1.4) \quad (-t) \sim (-\eta)^{(3\kappa-1)/[3-\sqrt{3}(\kappa-1)]}$$

или

$$r \approx K(-t)^\alpha, \text{ где } \alpha = [2 + \sqrt{3}(\kappa-1)]/(3\kappa-1),$$

а асимптотика любой траектории, в частности траектории поршня, при $\eta \rightarrow 0$

$$(-t) \sim (-\eta)^{(3\kappa-1)/3(\kappa-1)} \text{ или } r \approx G(-t)^{2/(3\kappa-1)}.$$

Здесь K и G — положительные постоянные, соответствующие данной характеристике или данной траектории. Численно траектория поршня может быть определена путем интегрирования уравнения

$$td\eta/dt = \eta(1-u_1), \quad t = -r_0/c_0, \quad \eta = -1.$$

В окрестности поршня асимптотика газодинамических функций выглядит так: плотность $\sim r^{-3}$, скорость и скорость звука $\sim r^{3(1-\kappa)/2}$, давление $\sim r^{-3\kappa}$, температура $\sim r^{3(1-\kappa)}$. Эти асимптотики справедливы и при других режимах адиабатического сжатия газа [2—4].

2. Резкое торможение поршня в некоторый момент t_1 ($t_0 < t_1 < 0$) влечет за собой возмущение полученного решения центрированной волной разрежения с вершиной в точке r_1 , t_1 (r_1 — расстояние поршня от центра в момент t_1). Граница возмущения — β -характеристика исходного решения, выходящая из точки (r_1, t_1) , если на интервале $t_1 < t < 0$ никакая β -характеристика возмущенного течения ее не пересечет. Для этого необходимо, чтобы в асимптотическом представлении функций в ее окрестности

$$(2.1) \quad \begin{aligned} u &= u_0(t) + u_1(t)(g-1) + u_2(t)(g-1)^2 + \dots, \\ c^2 &= f = f_0(t) + f_1(t)(g-1) + f_2(t)(g-1)^2 + \dots, \end{aligned}$$

где $g = r/\varphi(t)$; $r = \varphi(t)$ — уравнение этой разделяющей β -характеристики, коэффициенты $u_i(t)$ и $f_i(t)$ были конечны на интервале $t_1 < t < 0$ и $u_i(t)/u_0(t) \sim 0(1)$ при $t \rightarrow 0$. Очевидно, что $u_0(t)$, $f_0(t)$ — значения соответствующих функций на β -характеристике $r = \varphi(t)$, полученные в исходном решении. Определяющие их и функцию $\varphi(t)$ уравнения и начальные данные имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{dt} &= \frac{2u_0f_0t}{[(u_0+c_0)t-\varphi]\varphi}; \\ \frac{df_0}{dt} &= \frac{2(\kappa-1)f_0(u_0t-\varphi)}{[(u_0+c_0)t-\varphi]\varphi}; \quad \frac{d\varphi}{dt} = u_0 - c_0; \quad c_0 = \sqrt{f_0}; \\ t = t_1: \quad u_0 &= r_1/t_1 u_1(c_0 t_1/r_1); \quad f_0 = r_1^2/t_1^2 c_1^2(c_0 t_1/r_1); \quad \varphi = r_1. \end{aligned}$$

Функции $f_1(\bar{t})$ и $u_1(t)$ определяются одним дифференциальным уравнением

$$(2.2) \quad 2\varphi df_1/dt + f_1[2(\kappa - 2)u_0c_0 - (\kappa + 2)\varphi du_0/dt - \varphi dc_0/dt]/c_0 - \\ - (\kappa + 1)f_1^2/(\kappa - 1)c_0 + (\kappa - 1)\{\varphi^2[c_0 d^2u_0/dt^2 - (du_0/dt_0)^2] - \\ - \varphi du_0/dt(\varphi dc_0/dt + 2f_0)\}/c_0 - 2(\kappa - 1)u_0f_0 = 0$$

и конечным соотношением

$$(2.3) \quad u_1 = -[f_1/(\kappa - 1) + \varphi du_0/dt]/c_0.$$

Начальные данные для функции $f_1(t)$ могут быть получены из рассмотрения волны разрежения при временах, близких к моменту t_1 . Асимптотика функций u и f при малых значениях $t - t_1$ представляется в виде [5]

$$(2.4) \quad u = U_0(\xi) + U_1(\xi)(t - t_1) + U_2(\xi)(t - t_1)^2 + \dots, \\ f = F_0(\xi) + F_1(\xi)(t - t_1) + F_2(\xi)(t - t_1)^2 + \dots, \\ \xi = (r - r_1)/(t - t_1).$$

Очевидно, что

$$\xi \geq \xi_0 = \varphi'(t_1) = u_0(t_1) - c_0(t_1).$$

Функции $U_0(\xi)$, $F_0(\xi)$ представляют собой известное автомодельное решение для плоской волны разрежения

$$U_0(\xi) = [(h - 1)/h]\xi + A/h, \quad F_0(\xi) = (\xi - A)^2/h^2,$$

где

$$h = (\kappa + 1)/(\kappa - 1); \quad A = u_0(t_1) + (h - 1)c_0(t_1).$$

Могут быть получены также выражения для функций $U_i(\xi)$ и $F_i(\xi)$. В частности,

$$(2.5) \quad U_1(\xi) = -\frac{1}{r_1} \left[\frac{2}{(h-1)(2-h)} \frac{(\xi-A)}{h} + \frac{3(h-1)}{4-h} \left(\frac{\xi-A}{h} \right)^2 + \right. \\ \left. + B \left(\frac{\xi-A}{h} \right)^{h/2} \right], \\ F_1(\xi) = (\kappa - 1) \left[\frac{2-3h}{h+2} \left(\frac{\xi-A}{h} \right) U_1(\xi) - \frac{2h}{(h+2)r_1} \frac{(h-1)\xi + A}{h} \left(\frac{\xi-A}{h} \right)^2 \right].$$

Постоянная B определяется из условия склейки асимптотики (2.4) со значениями функций на характеристике $r = \varphi(t)$. В случаях $h = 2$, $h = 4$ члены (2.5), коэффициенты которых обращаются в бесконечность, заменяются на $\ln [(\xi - A)/h]$ и $(\xi - A)/h \ln [(\xi - A)/h]$ соответственно с конечными коэффициентами. Из определения g и ξ следует, что при малых значениях $t - t_1$, $\xi - \xi_0$ и $g - 1$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\xi - \xi_0 \approx [\varphi(t_1)/(t - t_1) + \varphi'(t_1)](g - 1)$$

и, согласно (2.4), имеет место асимптотика

$$f = F_0(\xi_0) + F_1(\xi_0)(t - t_1) + [F_0'(\xi_0) + F_1'(\xi_0)(t - t_1)] \times \\ \times [\varphi(t_1)/(t - t_1) + \varphi'(t_1)](g - 1).$$

Следовательно, при малых значениях $t - t_1$

$$f_1(t) \approx [F_0'(\xi_0) + F_1'(\xi_0)(t - t_1)] [\varphi(t)/(t - t_1) + \varphi'(t_1)].$$

Так как $F'_0(\xi_0) \neq 0$, а $\varphi'(t_1)$, $F'_1(\xi_0)$ конечны, то в главном члене

$$(2.6) \quad f_1(t) \approx F'_0(\xi_0) \varphi(t_1)/(t - t_1).$$

Таким образом, требуется определить функцию $f_1(t)$, удовлетворяющую уравнению (2.2) и при $t \rightarrow t_1$ имеющую асимптотику (2.6). Уравнение (2.2) — уравнение Риккати. Известно его частное решение, соответствующее разложению (2.1) в невозмущенной области,

$$\Phi(t) = \frac{-4u_0 f_0(u_0 t - \varphi)t}{(h-1)(\varphi' t - \varphi)[(u_0 + c_0)t - \varphi]}.$$

Подстановкой

$$z = 1/(f - \Phi)$$

уравнение (2.3) сводится к линейному

$$dz/dt - L(t)z + D(t) = 0,$$

где

$$D(t) = (\kappa + 1)/[2(\kappa - 1)\varphi c_0];$$

$$L(t) = \frac{2(\kappa + 1)}{\varphi} \frac{u_0 c_0 (u_0 t - \varphi)t}{(\varphi' t - \varphi)[(u_0 + c_0)t - \varphi]} + \frac{2(\kappa - 2)u_0 c_0 - (\kappa + 2)\varphi u'_0 - c'_0 \varphi}{2\varphi c_0}.$$

Частное решение $\Phi(t)$ на интервале $t_0 < t < 0$ конечно, так как отобранная интегральная кривая уравнения (1.1) не пересекает кривой $L((u_1 - 1)^2 = c_1^2)$. Из учета (2.6) следует, что при $t \rightarrow t_1$

$$z \approx \frac{t - t_1}{\varphi(t_1) F'_0(\xi_0) - \Phi(t_1)} \rightarrow 0$$

и, следовательно,

$$z(t) = \int_{t_1}^t D(\tau) \exp \left[- \int_{t_1}^t L(\tau) d\tau \right] d\tau \exp \left[\int_{t_1}^t L(\tau) d\tau \right].$$

Так как $L(t)$ конечно, а $D(t)$ сохраняет знак на интервале $t_1 < t < 0$, то на этом интервале $z(t) \neq 0$, и в силу конечности $\Phi(t)$ функция $f_1(t) = \Phi(t) + 1/z(t)$ конечна. Из соотношения (2.3) следует конечность $u_1(t)$, ибо на полуинтервале $t_1 \leq t < 0$ функция $c_0(t) \neq 0$. Функции f_n и u_n определяются линейным уравнением и конечным соотношением

$$(2.7) \quad \{[\varphi df_n/dt + u_n f_1 + 2u_{n-1} f_2 + n(u_1 - \varphi') f_n]/(\kappa - 1) + 2f_0[(-1)^n u_0 + (-1)^{n-1} u_1 + \dots + u_n] + \dots + f_n(u_1 + 2u_0)\} - \sqrt{f_0} \{\varphi du_n/dt + u_n u_1 + 2u_{n-1} u_2 + \dots + n(u_1 - \varphi') u_n\} = 0,$$

$$f_n = -(\kappa - 1) \{ \sqrt{f_0} u_n + [\varphi u'_{n-1} + u_{n-1} u_1 + 2u_{n-2} u_2 + \dots + (n-1)(u_1 - \varphi') u_{n-1}] / n \}.$$

На полуинтервале $t_1 \leq t < 0$ коэффициент при производной отличен от нуля, а остальные члены конечны, следовательно, на этом полуинтервале $u_n(t)$ и $f_n(t)$ конечны.

3. Полученные результаты дают возможность определить асимптотику возмущенного течения в окрестности центра при $t \rightarrow 0$ вблизи разделяющей β -характеристики $r = \varphi(t)$. Так как особой точке $N(u_{10} = 2/(3\kappa - 1))$,

$c_{10}^2 = 3(\kappa - 1)^2 / (3\kappa - 1)^2$ уравнения (1.1) соответствует $\eta = 0$, то, согласно (1.4),

$$u_0(t) = \varphi(t) / tu_1(\eta)_{\eta \rightarrow \infty} \approx -2 / (3\kappa - 1) K(-t)^{\alpha-1},$$

$$f_0(t) = (\varphi(t)/t)^2 f_1(\eta)_{\eta \rightarrow 0} \approx 3(\kappa - 1)^2 / (3\kappa - 1)^2 K^2(-t)^{2(\alpha-1)},$$

в силу чего из (2.3) следует

$$u_1(t) \approx \frac{(3 - \sqrt{3})(5\kappa - 3)}{\sqrt{3}(3\kappa - 1)(\kappa + 1)} K(-t)^{\alpha-1},$$

$$f_1(t) \approx \frac{(\sqrt{3} - 3)(3\kappa - 5)(\kappa - 1)^2}{(3\kappa - 1)^2(\kappa + 1)} K^2(-t)^{2(\alpha-1)}.$$

Из (2.7) следует, что $u_n(t)$ и $f_n(t)$ имеют тот же порядок; подстановка полученных формул в (2.1) дает асимптотику при $t \rightarrow 0$ вблизи разделяющей β -характеристики $r = \varphi(t)$

$$(3.1) \quad u \approx -K(-t)^{\alpha-1} \left[\frac{2}{3\kappa - 1} - \frac{(3 - \sqrt{3})(5\kappa - 3)}{\sqrt{3}(3\kappa - 1)(\kappa + 1)} \left(\frac{r}{K(-t)^\alpha} - 1 \right) + \dots \right],$$

$$f \approx K^2(-t)^{2(\alpha-1)} \left[\frac{3(\kappa - 1)^2}{(3\kappa - 1)^2} + \frac{(\sqrt{3} - 3)(\kappa - 1)^2(3\kappa - 5)}{(\kappa + 1)(3\kappa - 1)^2} \left(\frac{r}{K(-t)^\alpha} - 1 \right) + \dots \right].$$

Формулы (3.1) дают основание искать асимптотику в окрестности центра при $t \rightarrow 0$ в виде

$$(3.2) \quad u = \pm K|t|^{\alpha-1} \zeta w(\zeta), \quad f = K^2|t|^{2(\alpha-1)} \zeta^2 F(\zeta), \quad \zeta = r|t|^{-\alpha} / K \quad (+ \text{ при } t > 0, \\ - \text{ при } t < 0).$$

Функции w и F определяются уравнением

$$(3.3) \quad \frac{dF}{dw} = \frac{(3\kappa - 1)F \{ 2(F - \alpha) - 2\kappa w^2 + [5 - \kappa + \sqrt{3}(\kappa - 1)w] \}}{F [3(3\kappa - 1)w - 2(3 - \sqrt{3})] + (3\kappa - 1)w(1-w)(w - \alpha)}$$

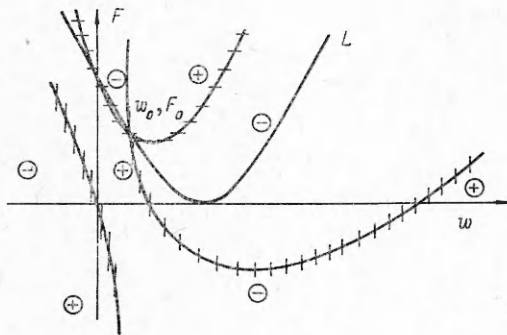
с начальными данными

$$w = w_0 = 2 / (3\kappa - 1); \quad F = F_0 = 3(\kappa - 1)^2 / (3\kappa - 1)^2$$

и квадратурой

$$(3.4) \quad \zeta = \exp \int_{w_0}^w \frac{[(w - \alpha)^2 - F](3\kappa - 1)dw}{F [3(3\kappa - 1)w - 2(3 - \sqrt{3})] + (3\kappa - 1)w(1-w)(w - \alpha)}.$$

Начальная точка (w_0, F_0) является особой точкой типа узла для уравнения (3.3). Это видно из схемы



Фиг. 2

изоклин (фиг. 2). Из условия согласования решения уравнения (3.3) с асимптотикой (3.1) следует, что выход из узла должен быть по направлению его отдельного уса

$$dF/dw = \sqrt{3}(\kappa - 1)^2 / (3\kappa - 1) \quad (3.5)$$

и для обеспечения роста ζ в сторону убывающих w . Так как $F = 0$ является интегралом уравнения (3.3), то выделенная ин-

тегральная кривая неминуемо попадает в начало координат $w = 0$, $F = 0$ (см. фиг. 2). Эта точка — дикритический узел, в ее окрестности

$$(3.6) \quad F \approx Aw^2 \quad (A > 0 \text{ — произвольная постоянная}).$$

Из квадратуры (3.4) следует, что этой точке соответствует значение $\zeta = \infty$, т. е. линия $t = 0$, причем

$$(3.7) \quad \zeta \sim w^{-\alpha}.$$

Дальнейшее продолжение интегральной кривой уравнения (3.3) приводит к пересечению с кривой $L (F = (w - \alpha)^2)$. При этом нарушается однозначность функции $w(\zeta)$, $F(\zeta)$, что означает возникновение отраженной ударной волны.

4. В силу автомодельности фронту отраженной ударной волны соответствует линия $\zeta = \zeta_b = \text{const}$, и условия на ударной волне могут быть представлены в виде

$$(4.1) \quad \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{\alpha - w_0(\zeta_b)}{\alpha - w_1(\zeta_b)} = \frac{F_0(\zeta_b) + \kappa[\alpha - w_0(\zeta_b)]^2}{F_1(\zeta_b) + \kappa[\alpha - w_1(\zeta_b)]^2} = \frac{(\kappa + 1)\rho_1 F_1 + (\kappa - 1)\rho_0 F_0}{(\kappa - 1)\rho_1 F_1 + (\kappa + 1)\rho_0 F_0}.$$

Отношение плотностей и квадратов скоростей звука, а следовательно, и давлений постоянно. Так как течение перед фронтом изэнтропично, то оно остается таким и за фронтом. Таким образом, уравнение (3.3) и квадратура (3.4) описывают также течение и за фронтом отраженной ударной волны. Начальные данные определяются требованиями равенства нулю скорости и конечности скорости звука в центре при временах $t > 0$. Величина ζ в центре при $t > 0$ равна нулю. Поэтому скорость звука в центре может быть конечна лишь при условии $F(0) = \infty$. При этом, как следует из квадратуры (3.4), величина ζ обратится в нуль лишь при значении $w(0) = 2(3 - \sqrt{3})/3(3\kappa - 1)$. Учитывая это, решение в окрестности центра при временах $t > 0$ удобно исследовать в переменных

$$\chi = 1/F; \quad \tau = w - w(0).$$

При этом уравнение (3.3), начальные данные и квадратура (3.4) имеют вид

$$(4.2) \quad \frac{1}{\chi} \frac{d\chi}{d\tau} = - \frac{2 + \{-2\kappa(\tau + w(0))^2 + [5 - \kappa + \sqrt{3}(\kappa - 1)](\tau + w(0) - \alpha)\}}{3\tau + (\tau + w(0))(1 - w(0) - \tau)(\tau + w(0) - \alpha)\chi},$$

$$\zeta = \zeta_b \exp \int_{\tau(\zeta_b)}^{\tau} \frac{[\tau + w(0) - \alpha]^2 \chi - 1}{3\tau + (\tau + w(0))(1 - w(0) - \tau)(\tau + w(0) - \alpha)\chi} d\tau.$$

Точка $\chi = 0$, $\tau = 0$ является особой точкой уравнения (4.2). Характер особенности — седло. Искомая интегральная кривая — сепаратриса седла с угловым коэффициентом касательной в начале:

$$\frac{d\chi}{d\tau} = \frac{135(3\kappa - 1)^2}{2\sqrt{3}(3 - \sqrt{3})[9(\kappa - 1) + 2\sqrt{3}]}.$$

Фронт волны и значения газодинамических функций на нем определяются следующим образом. Для каждой точки w_0 , f_0 интегральной кривой уравнения (3.4) при $w_0 < 0$ определяются, согласно (4.1), значения w_1 , f_1 . Точка пересечения полученной таким образом кривой $F_1 = F_1(w_1)$ с интегральной кривой (4.2) соответствует значениям газодинамических функций на фронте волны, а соответствующее значение ζ_b определяется квадратурой (3.4). Так, согласно численным расчетам, проведенным для значения $\kappa = 5/3$, величина $\zeta_b = 6,9826$, $w_0(\zeta_b) = -0,22115$, $F_0(\zeta_b) =$

$= 0,38587$, $w_1(\zeta_b) = 0,24992$, $F_1(\zeta_b) = 0,62893$. Согласно представлению функций (3.2), на фронте отраженной ударной волны скорость $u \sim r^{(\sqrt{3}-3)(\kappa-1)/[2+\sqrt{3}(\kappa-1)]}$, плотность $\rho \sim r^{2(\sqrt{3}-3)/[2+\sqrt{3}(\kappa-1)]}$, давление $p \sim r^{2\kappa(\sqrt{3}-3)/[2+\sqrt{3}(\kappa-1)]}$, температура $T \sim r^{2(\kappa-1)(\sqrt{3}-3)/[2+\sqrt{3}(\kappa-1)]}$. Из асимптотик (3.6), (3.7) следует, что таков же порядок этих величин и на линии $t = 0$, а из асимптотики (3.5) следует, что в центре при $t > 0$ и $t \rightarrow 0$ плотность $\sim t^{2(\sqrt{3}-3)/(3\kappa-1)}$, давление $\sim t^{2\kappa(\sqrt{3}-3)/(3\kappa-1)}$, температура $\sim t^{2(\kappa-1)(\sqrt{3}-3)/(3\kappa-1)}$.

Автор выражает благодарность Л. В. Альтшулеру за постановку автору вопросов данной работы, Г. Х. Соловьеву, А. Е. Луцкому за выполненные численные расчеты на ЭВМ, Н. И. Куранчевой за оформление работы.

Поступила 26 II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М., «Наука», 1971.
2. Змигренко Н. В., Курдюмов С. П. Автомодельный режим сжатия конечной массы плазмы. Препринт № 16. М., ИПМ АН СССР, 1973.
3. Clarke J. S., Fisher H. N., Mason R. J. Laser-driven implosion of spherical DT targets to thermonuclear burn conditions.— «Phys. Rev. Lett.», 1973, vol. 30, N 3.
4. Kidder R. E. Theory of homogeneous isentropic compression and its application to laser fusion.— «Nuclear fusion», 1974, vol. 14, N 1.
5. Каждан Я. М. Сферический разлет газа к центру. Препринт № 2. М., ИПМ АН СССР, 1969.

УДК 533.6.011.72

О КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ РЕЛАКСАЦИИ МНОГОАТОМНЫХ МОЛЕКУЛ В ПОЛЕ МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ЗА ФРОНТОМ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

В. М. Кузнецов

(Москва)

Исследованию колебательной релаксации в течениях многоатомных газов посвящено много работ (см., например, [1—3] и библиографию к ним), где подробно изучены процессы, в которых возбуждение и деактивация колебательной энергии происходят за счет столкновений молекул друг с другом в объеме газа. Внешнее излучение, в том числе монохроматическое, также может играть значительную роль в распределении внутренней, в частности, колебательной энергии. Вопросы взаимодействия когерентного излучения с многоатомным газом представляют интерес в связи с исследованиями его усиления или поглощения в газодинамических средах, воздействия на характеристики обтекания тел, инициирования химических реакций и т. д. Отметим, что теоретический анализ этого класса задач оказывается весьма сложным и требует привлечения численных методов. Если же удастся получить аналитические решения, которые