6. Л. А. Вулис, В. П. Кашкаров. Теория вязкой жидкости. «Наука», 1965.
7. А. С. Гиневский. Сб. «Промышленная аэродинамика», № 15, Оборонгиз, 1959.
8. J. A. Monters. J. Chem. Phys., 1955, 23, 10.
9. Ш. А. Ершин, Л. П. Ярин. Сб. «Прикладная теплофизика». Изд. АН КазССР, 1964.

УДК 536.463

К РАСЧЕТУ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛАМЕНИ

А. Н. Иванов

(Москва)

Я. Б. Зельдович и Д. А. Франк-Каменецкий [1] установили для случая равенства коэффициентов диффузии и температуропроводности подобие концентрационного и температурного профиля в стационарной волне горения, распространяющейся в газовой системе

$$\frac{N}{N_0}=\frac{T_к - T}{T_к - T_0}. \tag{1}$$

Эта связь позволяет вместо двух уравнений теплопроводности и диффузии рассматривать одно уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{dT}{dx}\right)-\rho u c_p\frac{dT}{dx}+q\,\Phi=0, \tag{2}$$

представив кинетическое уравнение химического превращения в виде

$$\Phi=k_0 c_0^{\nu}\left(\frac{T_0}{T}\right)^{\nu}\left(\frac{T_к - T}{T_к - T_0}\right)^{\nu}\exp\left(-\frac{E}{RT}\right). \tag{3}$$

Перейдя к переменным $T - \frac{dT}{dx}$ и обозначив $\frac{dT}{dx}=y$, преобразуем уравнение (2)

$$\lambda y\frac{dy}{dT}-\rho u c_p y+q k_0 c_0^{\nu}\left(\frac{T_0}{T}\right)^{\nu}\left(\frac{T_к - T}{T_к - T_0}\right)^{\nu}\exp\left(-\frac{E}{RT}\right)=0. \tag{4}$$

Если ввести безразмерные параметры

$$\overline{T}=\frac{T}{T_к};\quad A=\frac{E}{RT_к},\quad M=\frac{q k_0 c_0^{\nu}\lambda}{c_p^2\rho^2u^2T_к};\quad \overline{y}=\frac{\lambda y}{\rho u c_p T_к},$$

то

$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{T}}-1+\frac{M}{\overline{y}}f(\overline{T})=0, \tag{5}$$

где

$$f(\overline{T})=\left(\frac{\overline{T}_0}{1-\overline{T}_0}\right)^{\nu}\left(\frac{1-\overline{T}}{\overline{T}}\right)^{\nu}\exp\left(-\frac{A}{\overline{T}}\right).$$

Для определения массовой скорости горения, которая вошла в безразмерный параметр M, введем граничные условия:

при $\bar{T}=\bar{T}_0$ $\bar{y}=0$,

$$\text{при } \bar{T}=1 \quad \bar{y}=0. \tag{6}$$

Таким образом, для определения параметра M необходимо решить краевую задачу, представленную нелинейным уравнением (5) и граничными условиями (6).

Эта задача решалась численно при практически важном диапазоне изменения определяющих параметров: $\nu=1$ и 2, $A=4$, 6, 8, 10, 15, 20, $\bar{T}_0=0{,}1$, 0,2 и 0,3.

Расчеты проводились методом Рунге-Кутта на БЭСМ-2. Параметр M подбирался автоматически с точностью до шестой значащей цифры. Интегрирование начиналось с точки $\bar{T}=\bar{T}_0$ и $\bar{y}=0$.

Интегральные кривые представлены на рис. 1, 2 и 3.

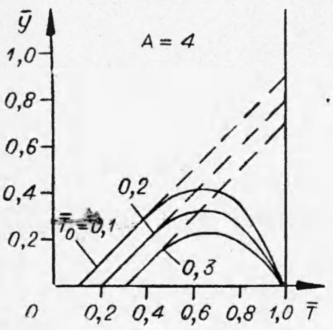

Рис. 1.

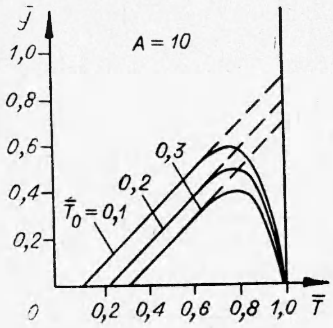

Рис. 2.

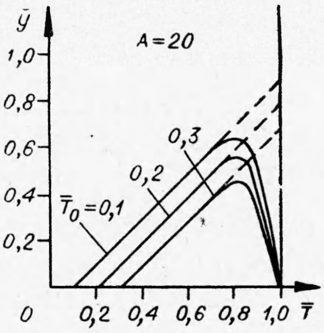

Рис. 3.

Для этих решений характерным является наличие в начале прямолинейного участка, что обусловлено малым значением функции $\frac{M}{\bar{y}} f$ по сравнению с единицей. Этот участок почти чистого подогрева за счет распространения тепла из более нагретых зон известен как Михельсоновское решение.

При дальнейшем увеличении температуры в связи с тепловыделением, обусловленным химическими превращениями, производная $\frac{d\bar{y}}{d\bar{T}}$ начинает уменьшаться, и кривая $\bar{y}=\bar{y}(\bar{T})$ приходит в точку $\bar{T}=1$ и $\bar{y}=0$.

Результаты машинного расчета параметра M сравнивались с его значением, определенным по методу Я. Б. Зельдовича и Д. А. Франк-Каменецкого, согласно которому процесс горения разбивается на два этапа: подогрев и химическое превращение.

Первый этап описывается решением В. А. Михельсона

$$\bar{y}=\bar{T}-\bar{T}_0. \tag{7}$$

На втором этапе полагается, что $\frac{M}{\bar{y}} f \gg 1$. В связи с этим укороченное уравнение $\frac{d\bar{y}}{d\bar{T}} + \frac{M}{\bar{y}} f(\bar{T}) = 0$ решается в квадратурах

$$y^2 = 2M \int_{\bar{T}}^{1} f(\bar{T})\, d\bar{T}. \tag{8}$$

Решения обоих этапов удовлетворяют граничным условиям. В некоторой точке $\overline{T}=\overline{T}^*$ и $\overline{y}=\overline{y}^*$ оба решения смыкаются

$$(\overline{T}^* - \overline{T}_0)^2 = 2M \int\limits_{\overline{T}^*}^{1} f(\overline{T})\, d\,\overline{T}. \tag{9}$$

Для определения скорости горения в левой части полученного выражения (9) температура $\overline{T}^*$ принимается равной температуре горения (т. е. единице), а в правой части эта же температура принимается равной ее начальному значению, т. е. $\overline{T}_0$,

$$(1 - \overline{T}_0)^2 = 2M \int\limits_{\overline{T}_0}^{1} f(\overline{T})\, d\,\overline{T}. \tag{10}$$

Из (10) и определяется параметр M:

$$M = \frac{(1 - \overline{T}_0)_2}{2\int\limits_{\overline{T}_0}^{1} f(\overline{T})\, d\,\overline{T}}. \tag{11}$$

Тот же результат может быть получен формально без физического обоснования малости единицы по сравнению со значением функции $\frac{M}{y} f$ на втором этапе, что было сделано в работе [1].

Для этого проинтегрируем уравнение (5) по $\overline{T}$ от $\overline{T}=\overline{T}_0$ до $\overline{T}=1$

$$\int\limits_{\overline{T}_0}^{1} \overline{y}\, \frac{d\,\overline{y}}{d\,\overline{T}}\, d\,\overline{T} = \int\limits_{\overline{T}_0}^{1} \overline{y}\, d\,\overline{T} - M \int\limits_{\overline{T}_0}^{1} f(\overline{T})\, d\,\overline{T}. \tag{12}$$

Интеграл в левой части соотношения (12) в связи с граничными условиями (6) равен нулю, а поэтому

$$M = \int\limits_{\overline{T}_0}^{1} \overline{y}\, d\,\overline{T} \Big/ \int\limits_{\overline{T}_0}^{1} f(\overline{T})\, d\,\overline{T}. \tag{13}$$

Таким образом, для расчета параметра M, согласно формуле (13), необходимо знать функциональную зависимость $\overline{y}=\overline{y}(\overline{T})$ для определения интеграла, стоящего в числителе.

Сравнение формул (11) и (13) показывает, что в методе Я. Б. Зельдовича и Д. А. Франк-Каменецкого в качестве функциональной зависимости $\overline{y}=\overline{y}(\overline{T})$ принято решение первого этапа (7).

Сравнение площадей, ограниченных истинными решениями $\overline{y}=\overline{y}(\overline{T})$ (см. рис. 1, 2 и 3) и осью абсцисс и площадей, ограниченных прямыми $\overline{y}=\overline{T}-\overline{T}_0$ и $\overline{T}=1$ и осью абсцисс, вполне достаточно для того, чтобы определить, во сколько раз точное применение метода Я. Б. Зельдовича и Д. А. Франк-Каменецкого завышает параметр M по сравнению с его действительным значением. Эта разница будет тем меньше, чем больше значение параметра A. Однако для практически важных случаев завышение является весьма существенным. В среднем оно может быть оценено в 2—3 раза.

Но при оценке рассматриваемого метода весьма важно обратить внимание на то, что в формулах (11) и (13) есть также второй интеграл (в знаменателе), который определен Я. Б. Зельдовичем и Д. А. Франк-

Каменецким с погрешностями, почти в точности компенсирующими (для практически важного диапазона изменения определяющих параметров (A и $\overline{T}$)) погрешности определения первого интеграла.

Подынтегральная функция $f(\overline{T})$ несколько упрощается.

$$f(\overline{T}) \approx \left(\frac{\overline{T}_0}{1-\overline{T}_0}\right)^{\nu} (1-\overline{T})^{\nu} \exp(-A) \exp[-A(1-\overline{T})], \qquad (14)$$

т. е. плотность газа принята своим меньшим значением при температуре горения, а кроме того в показателе экспоненты принято

$$\frac{1}{\overline{T}} \approx 2 - \overline{T}, \qquad (15)$$

что весьма существенно увеличивает значение интеграла.

В связи с проведенными упрощениями получим

$$\int_{\overline{T}_0}^{1} f(\overline{T})\, d\overline{T} \approx \overline{T}_0^{\nu} \exp(-A)(1-\overline{T}_0) \int_0^1 z^{\nu} \exp(-\theta z)\, dz, \qquad (16)$$

где

$$z = \frac{1-\overline{T}}{1-\overline{T}_0}; \quad \theta = A(1-\overline{T}_0).$$

В соответствии с [2] принято, что

$$\int_0^1 z^{\nu} \exp(-\theta z)\, dz \approx \frac{\nu!}{\theta^{\nu+1}} \approx \frac{\nu!}{(1-\overline{T}_0)^{\nu+1} A^{\nu+1}}, \qquad (17)$$

а поэтому

$$\int_{\overline{T}_0}^{1} f(\overline{T})\, d\overline{T} \approx \left(\frac{\overline{T}_0}{1-\overline{T}_0}\right)^{\nu} \frac{\nu!}{A^{\nu+1}} \exp(-A). \qquad (18)$$

Е. С. Щетинков [3] приводит данные по соотношениям приближенных значений интеграла (16), рассчитанных по формуле (18), к соответствующим истинным значениям его, рассчитанным численным интегрированием (табл. 1)

Таблица 1

ν	A	$\overline{T}_0$	δ
1	4,16	0,125	1,82
	8,32	0,125	1,73
2	4,16	0,125	2,44
	8,32	0,125	1,67
	5,56	0,166	2,14
	11,12	0,166	1,67

Из совместного решения соотношений (11) и (18) следует, что

$$M \approx \frac{(1-\overline{T}_0)^{\nu+2} A^{\nu+1}}{2\nu!\, \overline{T}_0^{\nu}} \exp(A). \qquad (19)$$

Сделаны сравнения результатов расчетов по формуле (19) с результатами машинного подбора значений параметра M, удовлетворяющих условиям краевой задачи (5) и (6). В табл. 2 и 3 приведены отношения значений параметра M, определенных машиной, к его значениям, рассчитанным по формуле (19). В табл. 2 приведены результаты для реакции первого порядка ($\nu=1$), а в табл. 3 — для реакций второго порядка ($\nu=2$).

Анализ этих результатов свидетельствует о достаточно высокой точности формулы (19). Тем более, что при сравнении скоростей распространения пламени относительные ошибки в табл. 2 и 3 должны быть уменьшены вдвое.

При оценке формул для расчета скорости стационарного распространения пламени в тепловой теории Я. Б. Зельдовича и Д. А. Франк-Каменецкого необходимо учитывать не только приближенный характер решения дифференциального уравнения теплопроводности, но и приближенное определение интеграла от функции скорости тепловыделения.

Таблица 2

$\overline{T}_0$	A					
	4	6	8	10	15	20
0,1	1,15	1,12	1,10	1,08	1,06	1,05
0,2	0,98	1,04	1,04	1,04	1,03	1,03
0,3	0,84	0,94	0,97	1,00	1,00	1,00

Таблица 3

$\overline{T}_0$	A					
	4	6	8	10	15	20
0,1	1,13	1,12	1,10	1.09	1,07	1.06
0,2	0,92	0,99	1,01	1,02	1,02	1,02
0,3	—	0,82	0,89	0,95	0,97	1,00

Для практически важного диапазона изменения значений определяющих параметров приближенные формулы этой теории дают достаточно точные результаты.

В последующей работе [4] Я. Б. Зельдович, основываясь на том, что при изменении температуры на величину $\frac{RT^2}{E}$ константа скорости реакции изменяется в e раз, и полагая этот интервал малым по сравнению с интервалом $T_к - T_0 / E \gg RT_к$, определил значение интеграла (16)

$$\int_{\overline{T}_0}^{1} f(\overline{T})\, d\overline{T} \approx \frac{1}{A} f_{max}, \tag{20}$$

где f_{max} — максимальное значение функции тепловыделения

$$f_{max} = \left(\frac{\overline{T}_0}{1 - \overline{T}_0}\right)^{\nu} \left(\frac{1 - \overline{T}_m}{\overline{T}_m}\right)^{\nu} \exp\left(\frac{A}{\overline{T}_m}\right). \tag{21}$$

Безразмерная температура максимального тепловыделения равна

$$\overline{T}_m = \frac{1}{1 + \frac{\nu}{A}}.$$

В связи с этим

$$f_{max} = \left(\frac{\overline{T}_0}{1 - \overline{T}_0}\right)^{\nu} \left(\frac{\nu}{A}\right)^{\nu} \exp(-A - \nu). \tag{22}$$

Если следовать рекомендации Я. Б. Зельдовича об упрощенном определении интеграла (16) по формуле (22), то параметр M определится так:

$$M = \frac{(1 - \overline{T}_0)^{\nu + 2} A^{\nu + 1}}{2\nu^{\nu}\, \overline{T}_0^{\nu}} \exp(A + \nu). \tag{23}$$

Сравнение формулы (23) с формулой (19) показывает, что определение интеграла (16) в форме (22) дает завышение параметра M.

Таким образом, расчетные формулы тепловой теории газового горения [1] имеют достаточно высокую точность для практически важного диапазона изменения определяющих параметров. Однако, введе-