



**ПРЕДЕЛЬНАЯ НАГРУЗКА В ЗАДАЧЕ О ВНЕДРЕНИИ КЛИНОВИДНОГО
ИНСТРУМЕНТА В АНИЗОТРОПНУЮ СРЕДУ**

А. И. Чанышев^{1,2}, И. М. Абдулин¹

¹*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, E-mail: a.i.chanyshev@gmail.com,
Красный проспект 54, г. Новосибирск 630091, Россия*

²*Новосибирский государственный университет экономики и управления,
ул. Каменская 56, г. Новосибирск 630099, Россия*

Построена математическая модель пластического деформирования первоначально анизотропной среды в предположении, что собственные тензоры упругого деформирования остаются собственными в состояниях пластичности и разрушения. В качестве бойка в задаче о внедрении рассмотрен цилиндр с наконечником в виде клина. При заданной начальной скорости бойка рассчитывается максимальная глубина его погружения. Исследовано влияние параметров анизотропии среды и бойка на глубину проникания.

Анизотропия, пластичность, клин, внедрение, начальная скорость, максимальная глубина проникания

**ULTIMATE LOAD IN THE PROBLEM OF WEDGE-LIKE TOOL PENETRATION
INTO ANISOTROPIC MEDIUM**

A. I. Chanyshev^{1,2} and I. M. Abdulin¹

¹*Chinakal Institute of Mining, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences,
E-mail: a.i.chanyshev@gmail.com, Krasny pr. 54, Novosibirsk 630091, Russia*

²*Novosibirsk State University of Economics and Management,
ul. Kamenskaya 52, Novosibirsk 630099, Russia*

A mathematical model of plastic deformation is constructed for initially anisotropic medium. It is assumed that the deformation process for elastic body dictating its own tensors of strain, which continue to act as eigen tensors in the states of plasticity and fracture. In the problem of indentation, the cylinder of a given length with a wedge-like tip is considered as a striker. At a given initial speed of the striker, its maximum penetration depth is determined. The influence of the medium anisotropy and parameters of the striker on the penetration depth is investigated.

Anisotropy, plasticity, wedge, penetration, initial velocity, maximum penetration depth

Задачам внедрения жесткого инструмента в пластически деформируемую среду посвящено множество работ [1 – 10]. С помощью решения этих задач определяется микротвердость материалов (проба Бринелля), оценивается устойчивость фундаментов строительных конструкций, рассчитывается глубина проникания рабочих органов пробойников в грунт и скальные основания. В то же время в большинстве этих работ исследовалась пластичность не первоначально анизотропных сред, а первоначально изотропных. Это обусловлено прежде всего историей развития теории пластичности, которая первоначально не связывалась с теорией упругости. Она

зарождалась благодаря наблюдениям за поверхностями пластически деформируемых тел, где обнаруживались линии скольжения, похожие на следы плоскостей действия максимальных касательных напряжений (линии Чернова–Людерса). Отсюда возникли сначала критерий Треска, связанный с этими площадками, затем теории пластичности, отражающие закон градиентальности пластических деформаций к площадкам действия максимальных касательных напряжений. Условие Мизеса являлось в то время (начало XX в.) аппроксимацией условия Треска для первоначально анизотропных сред и стало развитием квадратичного условия для первоначально изотропных сред.

Одними из первых, кто обратили внимание на произвольность допущения, что теории пластичности и упругости никак не связаны, были авторы работ [11, 12]. Они отметили, что собственные тензоры теории упругости продолжают оставаться собственными и для теории пластичности. Это особенно ярко выражается в теориях пластичности и ползучести первоначально изотропных сред, где собственными тензорами являются шаровой тензор и девиатор. С другой стороны, в [13] говорится о подобии эллипсоидов, построенных на основе констант упругости и пределов прочности первоначально анизотропных сред.

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ПЛАСТИЧНОСТИ ПЕРВОНАЧАЛЬНО АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Будем исходить из работ [11, 12], где решалась задача вдавливания штампа в первоначально анизотропную среду. Пусть имеется плоскодеформированное состояние. В системе координат xOy закон Гука берется в виде:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = a_{11}\sigma_x - a_{12}\sigma_y, \\ \varepsilon_y = -a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y, \\ \varepsilon_{xy} = a_{33}\tau_{xy}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь a_{ij} — податливости $a_{ij} > 0$. Выбираем тензорный базис:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Этот базис — ортонормированный и ортогональный [14].

В базисе (2) закон Гука представляется в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $\Omega_i = (T_\varepsilon, T_i)$, $S_i = (T_\sigma, T_i)$, $\Omega_1 = \varepsilon_x$, $\Omega_2 = \varepsilon_y$, $\Omega_3 = \sqrt{2}\varepsilon_{xy}$, ...

Рассматривая (3), преобразуем базис (2) к такому виду, в котором закон (3) имел бы диагональный вид. Для этого надо решить уравнение $|A - \lambda E|$, где A — матрица, определяемая (3).

Корни этого уравнения

$$\lambda_1 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}^2}, \quad \lambda_2 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}^2}, \quad \lambda_3 = a_{33}. \quad (4)$$

Для корней (4) находим собственные векторы

$$\vec{b}_1 = (\cos \beta, -\sin \beta, 0), \quad \vec{b}_2 = (-\sin \beta, \cos \beta, 0), \quad \vec{b}_3 = (0, 0, 1).$$

В итоге собственные тензоры (1) получаем в виде:

$$\tilde{T}_1 = \cos \beta T_1 - \sin \beta T_2, \quad \tilde{T}_2 = \sin \beta T_1 + \cos \beta T_2, \quad \tilde{T}_3 = T_3$$

или

$$\tilde{T}_1 = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 \\ 0 & -\sin \beta \end{pmatrix}, \quad \tilde{T}_2 = \begin{pmatrix} \sin \beta & 0 \\ 0 & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad \tilde{T}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для построения теории пластичности требуется проанализировать кратность корней (4). Для первоначальной изотропности среды $\lambda_1 = \lambda_3$. Возьмем этот случай как основной. Для него условие пластичности записывается в виде [12]:

$$S_1^2 + S_3^2 = k^2 \quad \text{или} \quad S_1 = k \cos \varphi, \quad S_3 = k \sin \varphi,$$

где k — предел упругости; φ — полярный угол в плоскости переменных S_1, S_3 . Другими словами, вводятся зависимости:

$$\sigma_x \cos \beta - \sigma_y \sin \beta = k \cos \varphi, \quad \sqrt{2} \tau_{xy} = k \sin \varphi. \quad (5)$$

Отметим, что здесь

$$\operatorname{tg} 2\beta = 2a_{12} / (a_{11} - a_{22}). \quad (6)$$

Вдоль орта \tilde{T}_2 предполагаем, что связь напряжений с деформациями упругая, а пластичность развивается в плоскости, образованной ортами \tilde{T}_1, \tilde{T}_3 . Далее пренебрегаем всеми деформациями упругости, уравнение (5) подставляем в уравнение равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (7)$$

Для определения функций $\varphi(x, y), \sigma_y(x, y)$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -\frac{k \sin \varphi}{\cos \beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{k \cos \varphi}{\sqrt{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \operatorname{tg} \beta \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} = 0, \\ \frac{k \cos \varphi}{\sqrt{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Находим характеристики (8) в виде:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_1 = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi + \sin 2\beta}}{\sqrt{2} \sin \beta}, \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)_2 = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi + \sin 2\beta}}{\sqrt{2} \sin \beta}. \quad (9)$$

Соотношения на них

$$d\sigma_y \frac{dy}{dx} + \frac{k \cos \varphi \operatorname{ctg} \beta}{\sqrt{2}} d\varphi = 0$$

или с учетом (9):

$$d\sigma_y - \frac{k}{2 \sin \beta} \left[\sin \varphi \mp \sqrt{\sin 2\beta + (1 - \sin 2\beta) \sin^2 \varphi} \right] d\varphi = 0. \quad (10)$$

Интегралами (10) служат выражения

$$\sigma_y + \frac{k(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}{2 \sin \beta} \pm \frac{k}{2 \sin \beta} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{1 - \aleph^2 \sin^2 \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right)} d\varphi = C, \quad (11)$$

где $\aleph^2 = 1 - \sin 2\beta$; C — константа интегрирования. Для решения задач требуется еще определить центрированные поля.

Пусть точка A является полюсом. Координаты любой другой точки с помощью полярных координат ρ и θ выражаются формулами:

$$y = y_A + \rho \sin \theta, \quad x = x_A + \rho \cos \theta. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (9), получаем:

$$\begin{cases} d\rho \left[\sin \theta - \frac{\operatorname{tg} \varphi + \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi + \sin 2\beta}}{\sqrt{2} \sin \beta} \cos \theta \right] + \rho \left[\cos \theta + \frac{\operatorname{tg} \varphi + \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi + \sin 2\beta}}{\sqrt{2} \sin \beta} \sin \theta \right] d\theta = 0, \\ d\rho \left[\sin \theta - \frac{\operatorname{tg} \varphi - \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi + \sin 2\beta}}{\sqrt{2} \sin \beta} \cos \theta \right] + \rho \left[\cos \theta + \frac{\operatorname{tg} \varphi - \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi + \sin 2\beta}}{\sqrt{2} \sin \beta} \sin \theta \right] d\theta = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Положим во втором уравнении (13) $\theta = \operatorname{const}$, $d\theta = 0$. Для его выполнения потребуем, чтобы

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi + \sin 2\beta}}{\sqrt{2} \sin \beta}. \quad (14)$$

Эти два условия означают, что характеристики второго семейства из (9) превращаются в лучи $\theta = \operatorname{const}$, где крайние значения θ определяются через крайние значения угла φ посредством (14). Рассмотрим, во что преобразуются характеристики первого семейства (9). Подстановка (14) в первое уравнение (13) дает

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\sin \beta - \cos \beta}{\sqrt{2} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi + \sin 2\beta}}. \quad (15)$$

Учитывая (14), находим

$$\sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi + \sin 2\beta} = \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \theta \sqrt{2} \sin \beta. \quad (16)$$

После возведения (16) во вторую степень получаем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg}^2 \theta \sin \beta - \cos \beta}{\sqrt{2} \operatorname{tg} \theta} \quad (17)$$

Подставляя (17) в (16), имеем

$$\sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi + \sin 2\beta} = -\frac{\operatorname{tg}^2 \theta \sin \beta + \cos \beta}{\sqrt{2} \operatorname{tg} \theta} \quad (18)$$

Из (18), (15) следует, что

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{(1 - \operatorname{tg} \beta) \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg}^2 \theta} d\theta. \quad (19)$$

Интегрируем (19). Имеем

$$\ln \rho - \ln c = -\frac{1}{2} \ln(\cos^2 \theta + \operatorname{tg} \beta \sin^2 \theta)$$

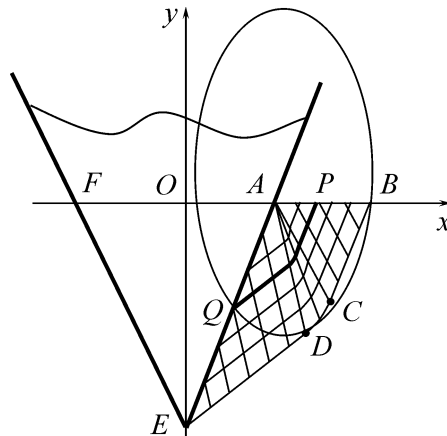
или

$$\rho^2 \cos^2 \theta + \operatorname{tg} \beta \rho^2 \sin^2 \theta = C^2. \quad (20)$$

Очевидно, что условие (20) определяет эллипс с полуосями $a = |C|$, $b = \sqrt{\operatorname{ctg} \beta} |C|$, где C — константа интегрирования. Так как $b/a = \sqrt{\operatorname{ctg} \beta}$, то имеем семейство подобных эллипсов.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВНЕДРЕНИИ ЖЕСТКОГО КЛИНА В ПЕРВОНАЧАЛЬНО АНИЗОТРОПНУЮ СРЕДУ

Пусть имеется первоначально анизотропная среда с законом упругости (1) и условием $\lambda_1 = \lambda_3$, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ определяется (4). Пусть условие пластичности $S_1^2 + S_3^2 = k^2$, представленное в виде (5), приводит к характеристикам (9) с отношениями на них (10), (11). В эту среду внедряется жесткий недеформируемый клин с раствором угла при вершине 2γ (рисунок). Считается, что клин движется вниз с начальной скоростью v_0 . По схеме жесткопластического тела предлагается найти максимальную глубину проникания этого клина.



Клин AEF внедряется в массив пород; области ABC, ADE соответствуют областям равномерного напряженного состояния, область ADC — центрированное поле, образованное лучами, выходящими из точки A и дугами подобных эллипсов

Решение начинаем строить с границы AB . Эта граница свободна от напряжений, потому что на ней $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$. Из (5) следует, что здесь $\varphi = \pi$, так как при этом значении φ

$$\sigma_x = -k / \cos \beta < 0.$$

На границе AE $\tau_n = 0$, другими словами,

$$\tau_n = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\gamma + \tau_{xy} \cos 2\gamma = 0. \quad (21)$$

Выразим отсюда с применением (5) напряжение σ_y . Из (5) находим

$$\sigma_x = \frac{k \cos \varphi + \sigma_y \sin \beta}{\cos \beta}, \quad \tau_{xy} = \frac{k \sin \varphi}{\sqrt{2}}. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (21), получаем

$$\sigma_y = k \frac{\cos \varphi \sin 2\gamma + \sqrt{2} \sin \varphi \cos 2\gamma \cos \beta}{\sin 2\gamma (\cos \beta - \sin \beta)}. \quad (23)$$

Отметим, что в (22) и (23) остается неизвестной величина φ . Обозначим ее как φ_* . Далее обратимся к соотношениям на характеристиках (10). Учтем, что вдоль первой характеристики (9) выполняется соотношение (10) с верхним знаком перед радикалом. Проинтегрируем его от точки P , где $\sigma_y = 0$, $\varphi = \pi$, до точки Q , где σ_y вычисляется из (23), а значение $\varphi = \varphi_*$. В результате получаем трансцендентное уравнение для определения φ_* на границе EA :

$$\frac{\cos \varphi_* \sin 2\gamma + \sqrt{2} \sin \varphi_* \cos 2\gamma \cos \beta}{\sin 2\gamma (\cos \beta - \sin \beta)} + \frac{\cos \varphi_* + 1}{2 \sin \beta} - \frac{1}{2 \sin \beta} \int_{\pi}^{\varphi_*} \sqrt{1 - \mathfrak{N}^2 \sin^2(\varphi - \pi/2)} d\varphi = 0. \quad (24)$$

Нормальное напряжение σ_n восстанавливается по формуле:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \gamma - 2\tau_{xy} \cos \gamma \sin \gamma + \sigma_y \sin^2 \gamma, \quad (25)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ выражаются через (22), (23) при $\varphi = \varphi_*$. Зная σ_n из (25), находим силу, действующую на грань клина AE , для этого σ_n умножаем на длину AE . Такая же сила действует на грань FE . После этого находится вертикальная сила, препятствующая движению клина вниз. Интегрируется уравнение движения Ньютона при начальном условии $v = v_0, t = t_0$. Определяется время, при котором скорость обращается в нуль, а через это время — максимальная глубина погружения клина.

В таблице представлены результаты расчетов для кварца (горного хрусталя) при $\beta = 0.442$, (характеристики упругости приведены в [15], МПа⁻¹: $a_{11} = 19.66 \cdot 10^{-6}$, $a_{22} = 12.73 \cdot 10^{-6}$, $a_{12} = 4.23 \cdot 10^{-6}$) и для изотропной среды, МПа⁻¹ ($\beta = 0.785$, $a_{11} = 19.66 \cdot 10^{-6}$, $a_{22} = 19.60 \cdot 10^{-6}$, $a_{12} = 4.23 \cdot 10^{-6}$).

В таблице представлены результаты расчетов для кварца (горного хрусталя) для значений параметра $\beta = 0.442$, характеристики упругости приведены в [15], МПа⁻¹ ($a_{11} = 19.66 \cdot 10^{-6}$, $a_{22} = 12.73 \cdot 10^{-6}$, $a_{12} = 4.66 \cdot 10^{-6}$), а также для изотропного массива пород $\beta = 0.785$, МПа ($a_{11} = 19.66 \cdot 10^{-6}$, $a_{22} = 19.60 \cdot 10^{-6}$, $a_{12} = 4.23 \cdot 10^{-6}$), где значения σ_y / k пропорциональны выражению $-1 - 2\gamma + \cos 2\gamma$.

Напряжения вблизи гладкого клина для разных значений углов γ

γ , град.	σ_y / k	σ_x / k	τ_{xy} / k	φ , рад.
В массиве пород				
10	-0.282	-1.208	0.169	2.901
15	-0.421	-1.242	0.237	2.780
20	-0.559	-1.268	0.298	2.707
25	-0.698	-1.29	0.352	2.620
30	-0.842	-1.308	0.403	2.535
Для изотропного массива пород				
γ , рад.				
10	-0.289	-1.616	0.241	2.793
15	-0.465	-1.687	0.353	2.619
20	-0.658	-1.74	0.454	2.445
25	-0.869	-1.776	0.541	2.271
30	-1.093	-1.799	0.612	2.096

ВЫВОДЫ

Построена математическая модель пластического деформирования первоначально анизотропной среды в случае кратных корней характеристического уравнения. Решена задача о введении жесткого клина в первоначально анизотропную среду.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. **Kachanov M. V.** Fundamentals of the theory of plasticity, Moscow, Nauka, 1969, 420 pp. (in Russian) [Качанов Л. М. Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969. — 420 с.]
2. **Sokolovskii V. V.** Theory of plasticity, Higher School, 1969, 608 pp. (in Russian) [Соколовский В. В. Теория пластичности. — М.: Высш. шк., 1969. — 608 с.]
3. **Tomas T.** Plastic flow and fracture in solids, Moscow, Mir, 1964, 308 pp. (in Russian) [Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. — М.: Мир, 1964. — 308 с.]

4. **Hill R.** Mathematical theory of plasticity, Moscow, Izd-vo Inostr. lit., 1956, 529 pp. (in Russian) [**Хилл Р.** Математическая теория пластичности. — М.: Изд-во иностр. лит., 1956. — 529 с.]
5. **Khromov A. I.** Deformation and destruction of rigid-plastic bodies, Vladivostok, Dalnauka, 1996, 181 pp. (in Russian) [**Хромов А. И.** Деформация и разрушение жесткопластических тел. — Владивосток: Дальнаука, 1996. — 181 с.]
6. **Buhanko A. A. and Khromov A. I.** Deformation fields at intrusion of wedge-shaped and flat stamps, part 3, Far Eastern Mathematical Journal, 2002, no. 2, pp. 311–319 (in Russian) [**Буханько А. А., Хромов А. И.** Поля деформаций при внедрении клинообразных и плоских штампов. Ч. 3 // Дальневост. матем. журн. — 2002. — № 2. — С. 311–319.]
7. **Ivlev D. D.** Pressing a thin blade into a plastic medium, Izv. USSR Academy of Sciences, 1957, no. 10, pp. 89–93 (in Russian) [**Ивлев Д. Д.** Вдавливание тонкого лезвия в пластическую среду // Изв. АН СССР. ОТН. — 1957. — № 10. — С. 89–93.]
8. **Ivlev D. D. and Maksimova L. A.** About forcing down the indenter into an ideal rigid-plastic strip, Bulletin of the Russian Academy of Sciences, Mechanics of solid bodies, 2000, no. 3, pp. 131–136 [**Ивлев Д. Д., Максимова Л. А.** О вдавлении индентора в идеальную жесткопластическую полосу // Изв. РАН. МТТ. — 2000. — № 3. — С. 131–136.]
9. **Hill R., Lee E. H., and Tupper S. J.** The theory of wedge indentation of ductile materials, Proc. Roy. Soc. Leningrad, 1947, Ser. A., vol. 188, pp. 273–290.
10. **Davydov D. V. and Myasnikin Yu. M.** On the introduction of bodies into a rigid-plastic medium, Bulletin of the Voronezh State University, Ser. Phiz.-Mat. Science, Ser. 1, 2009, pp. 943–100 (in Russian) [**Давыдов Д. В., Мясников Ю. М.** О внедрении тел в жесткопластическую среду // Вестник ВГУ, Физ.-мат. науки. Сер. 1. — 2009. — № 1. — С. 94–100.]
11. **Ryhlevskii Ya.** On Hooke's law, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1984, vol. 48, issue 3, pp. 420–435 (in Russian) [**Рыхлевский Я.** О законе Гука // ПММ. — 1984. — Т. 48. — Вып. 3. — С. 420–435.]
12. **Chanyshev A. I.** About the plasticity of anisotropic media, Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 1984, no. 2, pp. 149–151 (in Russian) [**Чаньшев А. И.** О пластичности анизотропных сред // ПМТФ. — 1984. — № 2. — С. 149–151.]
13. **Ashkenazi E. K. and Ganov E. V.** Anisotropy of structural materials: Handbook, Leningrad, Machine Building [Leningr. branch], 1972, 215 pp. (in Russian) [**Ашкенази Е. К., Ганов Э. В.** Анизотропия конструкционных материалов: справочник. — Ленинград: Машиностроение [Ленингр. отделение], 1972. — 215 с.]
14. **Novojilov V. V.** On the forms of relationship between stresses and strains in initially isotropic inelastic bodies (geometric side of the question), Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1963, vol. 27, issue 5, pp. 794–812 (in Russian) [**Новожилов В. В.** О формах связи между напряжениями и деформациями в первоначально изотропных неупругих телах (геометрическая сторона вопроса) // ПММ. — 1963. — Т. 27. — Вып. 5. — С. 794–812.]
15. **Lekhnitckii S. G.** Theory of elasticity of an anisotropic body, Moscow, Nauka, 1977, 416 pp. (in Russian) [**Лехницкий С. Г.** Теория упругости анизотропного тела. — М.: Наука, 1977. — 416 с.]