

ДИФфуЗИОННЫЙ ПОТОК НА СФЕРУ ПРИ МАЛЫХ И СРЕДНИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА. ПРИБЛИЖЕНИЕ ДИФфуЗИОННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В. М. Волощук, Л. В. Стужнева

(Обнинск)

При решении некоторых задач физической химии и физики атмосферы представляет интерес значение чисто диффузионного потока вещества на тело сферической формы [1,2]. При этом процесс переноса молекул в очень вязких жидкостях и перенос в результате броуновского движения мелких аэрозольных частиц ( $r_1 < 10^{-4}$  см) в газах, если пренебречь эффектом зацепления частиц, описываются одними и теми же соотношениями. Заметим, что осаждение аэрозольных частиц на тело сферической формы радиуса  $r_2$ , вызванное эффектом зацепления, имеет порядок  $(r_1 / r_2)^2$ . Таким образом, этим эффектом можно пренебречь, если чисто диффузионный поток по крайней мере на порядок превышает величину  $(r_1 / r_2)^2$ .

Критериями подобия задачи являются число Рейнольдса течения  $R$  и число Пекле  $\lambda$

$$R = r_2 u_\infty / \nu, \quad \lambda = r_2 u_\infty / D$$

Здесь  $u_\infty$  — скорость невозмущенного потока,  $\nu$  — кинематическая вязкость среды,  $D$  — коэффициент диффузии вещества. Для  $R \ll 1$ , когда для гидродинамического поля скоростей  $u u_\infty$  при обтекании сферы стационарным потоком можно воспользоваться стоксовым приближением, и  $\lambda \gg 1$  (в приближении диффузионного пограничного слоя) в [1] для безразмерного интегрального потока получена формула

$$I \approx 7,848 \lambda^{-2/3}$$

В данной заметке эта формула будет уточнена для случая средних  $R$  ( $R \leq 20$ ). При этих значениях чисел Рейнольдса течение имеет еще более или менее плавный характер: вихревое кольцо начинает развиваться за сферой при  $R \sim 8$ ; при  $R \sim 20$  оно занимает еще небольшую часть течения. Заметим, что для свободно падающей в воздухе водяной капли  $R \sim 20$  при  $r_2 \sim 0,02$  см.

В сферической системе координат  $\{\xi, \theta, \varphi\}$  ( $\xi$  — расстояние от сферы,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ) для стационарной задачи основные уравнения имеют вид

$$\lambda u_\xi \frac{\partial n}{\partial \xi} + \lambda \frac{u_\theta}{1 + \xi} \frac{\partial n}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 n}{\partial \xi^2} + \frac{2}{1 + \xi} \frac{\partial n}{\partial \xi} + \frac{1}{(1 + \xi)^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \text{ctg } \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] n \quad (1)$$

$$I_1 = u_\infty n_\infty r_2^2 \bar{I}, \quad \bar{I} = \frac{2\pi}{\lambda} \int_0^\pi j(\theta) \sin \theta d\theta, \quad j = \frac{\partial n}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \quad (2)$$

$$n \rightarrow 1, \quad \xi \rightarrow \infty; \quad n \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow 0 \quad (3)$$

$$u_\xi \rightarrow 1, \quad u_\theta \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow \infty$$

$$u_\xi \rightarrow u_1 \xi^2, \quad u_\theta \rightarrow u_2 \xi, \quad \xi \rightarrow 0 \quad (4)$$

$$u_1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta u_2 = 0$$

Заметим, что соотношения (4) не являются ограничением: они всегда имеют место при вязком обтекании достаточно гладкой ограниченной поверхности. В силу этих соотношений, воспользовавшись известным способом преобразования уравнений (1) к уравнениям диффузионного пограничного слоя, имеем

$$u_1 \xi^2 \frac{\partial n_0}{\partial \xi} + u_2 \xi \frac{\partial n_0}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 n_0}{\partial \xi^2} + O(\lambda^{-1/3}) \quad (5)$$

$$I = 2\pi \lambda^{-2/3} \int_0^\pi j_0(\theta) \sin \theta d\theta + O(\lambda^{-1})$$

$$j_0 = \frac{\partial n_0}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}, \quad \xi = \xi \lambda^{1/3}$$

$$n_0 \rightarrow 1, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad \theta < \pi$$

$$n_0 \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow 0; \quad n \rightarrow 0, \quad 0 \leq \xi < \infty, \quad \theta \rightarrow \pi$$

Решение уравнения (5) имеет вид

$$n_0 = i - \frac{\Gamma(1/3, \zeta^3/\mu)}{\Gamma(1/3)} \quad (6)$$

$$\mu = 9u_2^{-3/2} \sin^{-3/2}\theta \int_0^\theta \sin^{3/2}\theta u_2^{1/2} d\theta$$

$$f_0 = \frac{1}{\Gamma(1+1/3)} \mu^{-1/3}, \quad I = \frac{2\pi}{\Gamma(1+1/3)} \lambda^{-2/3} \left[ \int_0^\pi \frac{\sin\theta}{\mu^{1/3}} d\theta + O(\lambda^{-1/3}) \right]$$

$$\left( \Gamma(1/3, x) = \int_x^\infty z^{-2/3} e^{-z} dz \right)$$

Для  $R \lesssim 8$  имеет место неравенство  $u_2 > 0$  при  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Таким образом, для этого случая

$$I = \frac{3^{1/3}\pi \lambda^{-2/3}}{\Gamma(1+1/3)} \left[ \int_0^\pi \sin^{3/2}\theta u_2^{1/2} d\theta \right]^{2/3} + O(\lambda^{-1}) \quad (7)$$

Для  $R \gtrsim 8$  в некотором интервале изменения  $\theta$   $u_2$  становится отрицательным:  $u_2 < 0$ ,  $\theta_0 < \theta \leq \pi$ . Ниже будет показано, что вклад в  $I$  интервала  $\theta_0 < \theta \leq \pi$  пренебрежимо мал, поэтому при вычислении интегрального потока верхний предел в (7) можно заменить на  $\theta_0$ . Следует заметить к тому же, что при  $\theta \rightarrow \pi$  формула (6) вообще не пригодна. Действительно, существенное изменение  $n$  происходит на расстояниях от сферы порядка  $\mu \lambda^{-1/3}$ . В то же время  $\mu$  становится неограниченно большим при  $\theta \rightarrow \pi$ . Так как при получении (6) были использованы первые члены разложений  $u_\zeta$  и  $u_0$  по  $\xi$ , то, естественно, формула (6) не может правильно отображать поведение  $n$  в донной части течения. К тому же из (6) следует противоречащее условиям осевой симметрии неравенство

$$\partial n_0 / \partial \theta \neq 0, \quad \theta \rightarrow \pi \quad (8)$$

При помощи неравенства (8) можно получить один важный вывод. Несмотря на то что поведение концентрации в донной части течения формула (6) описывает неправильно, сомневаться в правильности асимптотического соотношения (7) для интегрального потока нет причин. Более того, воспользовавшись способом, аналогичным примененному в [3] при рассмотрении диффузии из вязкого потока на круговой цилиндр (и систему цилиндров), можно в принципе построить для  $I$  асимптотическое разложение

$$I \approx \sum_{(0 \leq m \leq N)} I^{(m)} \lambda^{-(m+2)/3} \quad (9)$$

$$I^{(m)} = 2\pi \int_0^\pi j_m(\theta) \sin\theta d\theta, \quad j_m = \left. \frac{\partial n_m}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} \quad (10)$$

$$u_1 \zeta^2 \frac{\partial n_m}{\partial \zeta} + u_2 \zeta \frac{\partial n_m}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 n_m}{\partial \zeta^2} = F(\theta, \zeta) + \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial n_m}{\partial \theta} \quad (m \geq 2)$$

В разложении (9)  $N$  будет конечным (заметим, однако, что оно заведомо не меньше 1). Действительно в силу (8) должно существовать такое  $m_0 > 1$ , что при  $m > m_0$  величина  $j_m \sin\theta$  будет обладать неотделимой особенностью при  $\theta \rightarrow \pi$ .

При малых  $R$  для  $u$  можно воспользоваться осевым приближением, дающим следующий по  $R$  после стоксового член асимптотического разложения. Имеем

$$u_2 \approx \frac{3}{2} (1 + \frac{3}{8}R) \sin\theta + \frac{3}{4}R \sin\theta \cos\theta$$

$$\mu = \frac{3}{2} \frac{1 - \frac{3}{4}R \cos\theta}{1 + \frac{3}{8}R} \frac{2\theta - \sin 2\theta + \frac{2}{3}R \sin^3\theta}{\sin^3\theta}$$

$$I \approx 7.848 (1 + \frac{1}{8}R) \lambda^{-2/3} \quad (11)$$

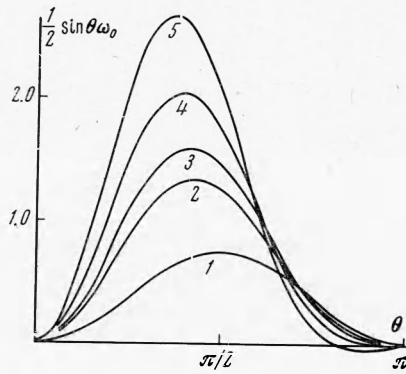
Согласно [4], следующий член после осеенового имеет порядок  $R^2 \ln R$ . Таким образом

$$u_2 = \frac{3}{2} (1 + \frac{3}{8}R + \frac{9}{40}R^2 \ln R) \sin \theta + \frac{3}{4} R \sin \theta \cos \theta + O(R^2)$$

$$\mu \approx \frac{3}{2} \frac{1 - \frac{3}{4}R \cos \theta}{1 + \frac{3}{8}R + \frac{9}{40}R \ln R} \frac{2\theta - \sin 2\theta + \frac{2}{3}R \sin^3 \theta}{\sin^3 \theta}$$

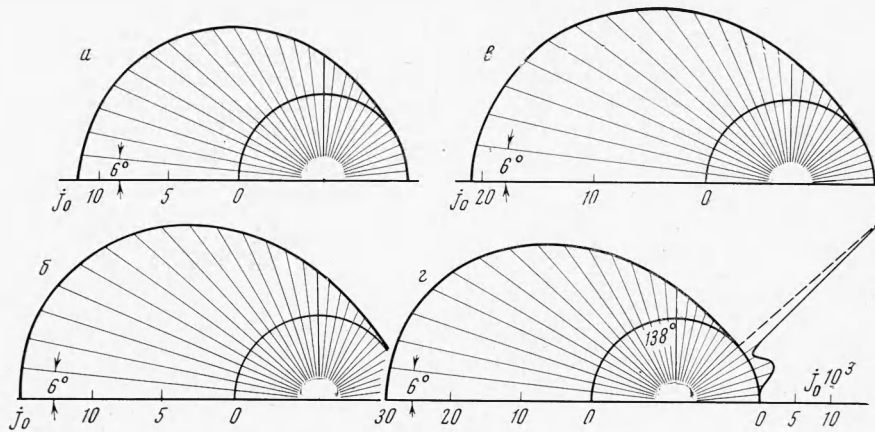
$$I \approx 7.848 (1 + \frac{1}{8}R + \frac{3}{40}R^2 \ln R + O(R^2)) \lambda^{-2/3} \quad (12)$$

Для средних значений чисел Рейнольдса можно воспользоваться численными расчетами Дженсона [5]. Нетрудно показать, что  $u_2 = \omega_0$ , где  $\omega_0$  — завихренность поля скоростей  $u$  на поверхности сферы. В [5] приведены значения  $\omega_0$  для  $R = 2.5, 5, 10$  с шагом  $12^\circ$  и для  $R = 20$  с шагом  $6^\circ$ . Зависимости величины  $\frac{1}{2} \sin \theta \omega_0$  от  $\theta$ , построенные с помощью этих данных, представлены на фиг. 1; кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют  $R = 0, 2.5, 5, 10, 20$ . Зависимости  $j_0$  от  $\theta$  представлены на фиг. 2; графики а, б, в, г соответствуют значениям  $R = 2.5, 5, 10, 20$ . Заметим, что при вычислении  $j_0$  для углов, близких к  $\pi$ , было принято предположение об очень большом диффузионном переносе вещества через границу стационарной вихревой зоны. Это предположение сильно увеличило значение  $j_0$  для этих углов, ибо в действительности диффузионный перенос мал, а конвективного подноса вещества в зону вихревого кольца нет, так как при этих значениях  $R$  имеет место стационарное обтекание сложного тела: сферы и присоединенного вихревого кольца без втекания жидкости в переднюю часть вихревого кольца и вытекания в задней части.



Фиг. 1

Конвективный поднос вещества в зону следа будет иметь место при более высоких  $R$ , когда течение становится существенно нестационарным. Однако, несмотря на такое фиктивное увеличение  $j_0$ , как видно на фиг. 2, его значение в задней части сферы пренебрежимо мало по сравнению со значением в передней части сферы.



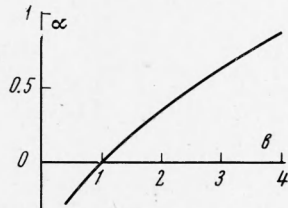
Фиг. 2

Численным интегрированием  $j_0$  по сфере получен интегральный поток для  $R = 2.5, 5, 10, 20$ . Результаты расчетов хорошо аппроксимируются аналитической формулой

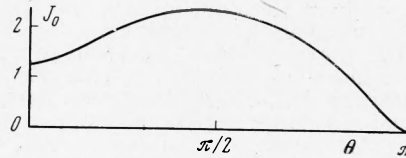
$$I \approx 7.848 (1 + 0.127 R^{1/2}) \lambda^{-2/3} + O(\lambda^{-1}) \quad (13)$$

Из формулы (13) следует, что относительное увеличение  $I$  при изменении  $R$  от 0 до 20 составляет  $\sim 30\%$ . Следует заметить, что это изменение  $I$  невелико при столь больших изменениях числа Рейнольдса.

Интересно влияние деформации сферической поверхности на диффузионный поток. Рассмотрим осаждение на эллипсоиды вращения при  $R \rightarrow 0$  (стоксово приближение). При расчетах  $I$  для не слишком малых значений  $b$  — отношения продольной оси к по-



Фиг. 3



Фиг. 4

перечной — удобно пользоваться системой координат

$$\begin{aligned} x &= x_1^{(0)} - \xi \cos \theta \cos \varphi, & y &= x_2^{(0)} + \xi \sin \theta \cos \varphi \\ z &= x_3^{(0)} + \xi \sin \theta \sin \varphi, & 0 \leq \xi < \infty, & \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ x_1^{(0)} &= -\frac{b^2}{\sqrt{b^2 + \operatorname{tg}^2 \theta}}, & \frac{x_2^{(0)}}{\cos \varphi} &= \frac{x_3^{(0)}}{\sin \varphi} = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{b^2 + \operatorname{tg}^2 \theta}} \\ L_\xi &= 1, & L_\theta &= \frac{b^2}{\cos^2 \theta (b^2 + \operatorname{tg}^2 \theta)^{3/2}} + \xi, & L_\varphi &= \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{b^2 + \operatorname{tg}^2 \theta}} + \xi \sin \theta \end{aligned}$$

Здесь  $L_\xi$ ,  $L_\theta$ ,  $L_\varphi$  — коэффициенты Ламэ. В этих координатах таким же образом, как и в случае сферы, можно получить уравнение для диффузионного пограничного слоя. Решение этого уравнения при не слишком малых  $b$  снова будет иметь вид (6) только с другим значением  $\mu$ . В этом случае

$$\begin{aligned} \mu &= 3\dot{\nu}^2 \frac{(1+\alpha)^3}{\sin^3 \theta} \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{\operatorname{tg} \theta}{b} \right) - b \frac{\operatorname{tg} \theta}{b^2 + \operatorname{tg}^2 \theta} \right\} \\ (1+\alpha)^3 &= \frac{4}{3} (1-b^2) \left\{ 1 + \frac{1-2b^2}{b \sqrt{1-b^2}} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{b}{\sqrt{1-b^2}} \right\}^{-1} \\ i_0 &= \frac{1}{\Gamma(1+1/3)} \mu^{-1/3} \\ I &= 2\pi \lambda^{-2/3} \left[ \int_0^\pi d\theta \frac{(L_\theta L_\varphi)_{\xi=0}}{\mu^{1/3}} \right]^{2/3} + O(\lambda^{-1}) = 7.848 (1+\alpha) \lambda^{-2/3} + O(\lambda^{-1}) \quad (14) \end{aligned}$$

График зависимости  $\alpha$  от  $b$  представлен на фиг. 3. Заметим, что с уменьшением  $b$  происходит значительная деформация толщины диффузионного осадка в передней части сферы, а именно: в боковых частях толщина осадка увеличивается, в центре — уменьшается (график зависимости  $j_0$  от  $\theta$ , иллюстрирующий эффект, представлен на фиг. 4, где дана толщина диффузионного осадка на эллипсоиде вращения при  $b = 0.4$ ).

Поступила 25 VII 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л е в и ч В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
2. С т ы р о Б. И. Самоочищение атмосферы от радиоактивных загрязнений. Л., Гидрометеоздат, 1968.
3. С т е ч к и н а И. Б. Диффузионное осаждение аэрозолей в волокнистых фильтрах. Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 6.
4. P r o u d m a n I., P e a r s o n R. A., Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and circular cylinder. J. Fluid Mech., 1957, vol. 2.
5. J e n s o n V. G. Viscous flow round a sphere at low Reynolds numbers ( $R \leq 40$ ). Proc. Roy. Soc., 1959, Ser. A, vol. 249, No. 1258.