УДК 541.12.03

ПРОСТОЙ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ТЕМПЕРАТУРЫ УДАРНОГО СЖАТИЯ КОНДЕНСИРОВАННОЙ СРЕДЫ

В. С. Трофимов

(Москва)

В работе [1] разработаны методы расчета температуры ударного сжатия, которые, однако, требуют большого объема вычислений и применения ЭВМ. С другой стороны, во многих случаях представляет интерес получить хотя и не очень точную, но более простую оценку этой температуры. В настоящей работе выводится формула, которая дает возможность сделать такую оценку, исходя из данных по уравнению ударной адиабаты, значения удельной теплоемкости C_p и коэффициента объемного термического расширения α среды в исходном состоянии при нулевом давлении.

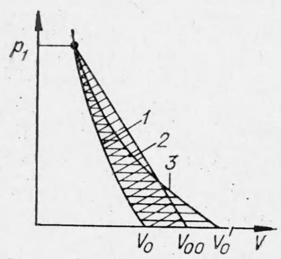

Рис. 1. Геометрическая интерпретация ударного сжатия.
1 — ударная адиабата; *2* — изэнтропа; *3* — прямая Михельсона.

Получим сначала формулу для оценки остаточной температуры T^*, до которой разогревается вещество в результате прохождения по нему ударного фронта с амплитудой p_1 и последующей изэнтропической разгрузки до исходного давления $p_0=0$ (рис. 1). При этом сначала для сохранения общности будем считать, что перед ударным фронтом среда может быть не только сплошной, но и пористой. Кроме того, предположим, что она инертна. Это, в частности, означает, что состояние, которое достигается в результате ударного сжатия и разгрузки, может быть получено также путем обычного разогрева среды при $p_0=0$ и, если она пористая, путем закрытия пор.

Приращение удельной внутренней энергии в процессе ударного сжатия и последующей разгрузки

$$\Delta E = \frac{p_1}{2}(V_{00} - V_1) - \int\limits_{V_1}^{V_0'} p dV, \qquad (1)$$

где в правой части первое слагаемое представляет собой изменение удельной внутренней энергии в ударном фронте, второе — в волне разрежения. Обозначив через σ площадь, заключенную между прямой Михельсона и ударной адиабатой (на рис. 1 заштрихована наклонными линиями), а через $\varkappa$ — площадь между изэнтропой разгрузки и ударной адиабатой (на рис. 1 заштрихована горизонтальными линиями), равенство (1) можно представить в форме

$$\Delta E = \sigma - \varkappa. \qquad (2)$$

Предположим, что удельную теплоемкость C_p при $p_0=0$ и коэффициент объемного термического расширения

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

в интервале температур $[T_0, T^*]$ можно считать постоянными. Вспомогательную величину — эффективное давление — определим равенством

$$\bar{p} = \frac{\varkappa}{V_0' - V_0}. \tag{3}$$

Отсюда имеем

$$\Delta E = C_p (T^* - T_0), \tag{4}$$

$$\varkappa = \bar{p} \alpha V_0 (T^* - T_0). \tag{5}$$

Подстановка (4) и (5) в (2) после простых преобразований приводит к искомой формуле

$$T^* = T_0 + \frac{\sigma}{C_p \left(1 + \frac{\bar{p}}{\beta}\right)}, \tag{6}$$

где

$$\beta = \frac{\rho_0 C_p}{\alpha}.$$

У металлов и многих других твердых веществ величина β имеет значение порядка нескольких сот килобар.

Используя идею, впервые высказанную Я. Б. Зельдовичем [1], определим температуру на ударной адиабате T по температуре разгрузки T^*. Для этого, согласно основному термодинамическому тождеству, имеем

$$T = \left(\frac{dE}{dS}\right)_\text{г} + p \left(\frac{dV}{dS}\right)_\text{г}.$$

Будем предполагать, что здесь производные берутся вдоль ударной адиабаты. Подставив значение E из уравнения ударной адиабаты

$$E - E_0 = \frac{p}{2} (V_{00} - V),$$

получаем

$$T = \frac{1}{2} \left[(V_{00} - V) + p \left(\frac{dV}{dp}\right)_\text{г}\right] \cdot \left(\frac{dp}{dS}\right)_\text{г}.$$

Нетрудно показать, что выражение при $\left(\frac{dp}{dS}\right)_\text{г}$ равно $\left(\frac{d\sigma}{dp}\right)_\text{г}$. Отсюда получим

$$T = \left(\frac{d\sigma}{dS}\right)_\text{г}.$$

С другой стороны, имеем очевидное равенство

$$dS = \frac{C_p}{T^*} \cdot dT^*,$$

которое дает возможность связать T и T^*

$$T = \frac{T^*}{C_p} \cdot \frac{d\sigma}{dT^*}. \tag{7}$$

Найдем производную $\frac{d\sigma}{dT^*}$ из выражения (6). В результате его дифференцирования имеем

$$\frac{d\sigma}{dT^*} = C_p \left(1 + \frac{\bar{p}}{\beta}\right) + (T^* - T_0) \frac{C_p}{\beta} \cdot \frac{d\bar{p}}{dp} \cdot \frac{dp}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dT^*}.$$

Подставляя сюда значение $T^* - T_0$ из (6) после несложных преобразований находим

$$\frac{d\sigma}{dT^*} = \frac{C_p \left(1 + \frac{\bar{p}}{\beta}\right)^2}{1 + \delta \frac{\bar{p}}{\beta}}, \tag{8}$$

где введено обозначение

$$\delta = 1 - \frac{d \ln \bar{p}}{d \ln \sigma}. \tag{9}$$

Как станет ясно из дальнейшего, величина δ слабо зависит от давления и в пределе при $p_1 \to 0$ стремится к 2/3. Подстановка (8) и (9) в (7) приводит к искомой формуле

$$T = T^* \frac{\left(1 + \frac{\bar{p}}{\beta}\right)^2}{1 + \delta \frac{\bar{p}}{\beta}}. \tag{10}$$

Если коэффициент термического расширения α устремить к нулю (т. е. $\beta \to \infty$), получим приближенную формулу, установленную в работе [2]

$$T \approx T_0 + \frac{\sigma}{C_p}. \tag{11}$$

В этом приближении, очевидно, $T_1 = T^*$.

При выводе формулы (10), кроме предположения о постоянстве C_p и α, других приближений не делалось. Значит, если бы удалось установить точную зависимость $\bar{p}$ от p_1, эта формула с указанной оговоркой давала бы точные значения температуры сжатия. Однако значение $\bar{p}$ можно установить лишь на основе уравнения состояния среды, которое предполагаем неизвестным. Поэтому произведем приближенную оценку этой величины на основании общих термодинамических соображений.

Разложим производную $\left(\frac{dV}{dp}\right)_S$ в ряд по степеням $\Delta p = p - p_0 = p$, $\Delta S = S - S_0$, где p_0, S_0 — значения давления и энтропии в исходном состоянии среды. Как известно, в случае сплошной среды энтропия на ударной адиабате меняется по закону $\Delta S \sim p_1^3$. Поэтому с точностью до членов второго порядка относительно p всем изэнтропам, пересекающим ударную адиабату ниже точки p_1, можно сопоставить одно и то же разложение

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{S_0} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_{S_0} p + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3 V}{\partial p^3}\right)_{S_0} p^2. \tag{12}$$

Таким образом, с указанной точностью все изэнтропы можно получить из одной путем ее параллельного смещения в направлении оси V. Это свойство изэнтроп используется при обосновании закона удвоения массовой скорости при выходе ударного фронта на свободную поверхность тела [1]. Поэтому естественно предположить, что отброшенные члены в разложении (12) являются малыми вплоть до тех же давлений, до которых справедлив закон удвоения.

Напишем для ударной адиабаты аналогичное разложение

$$\left(\frac{dV}{dp}\right)_\Gamma = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{S_0} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_{S_0} p + \frac{1}{2}\left(\frac{d^3 V}{dp^3}\right)_{\Gamma_0} p^2, \tag{13}$$

которое отличается от (12) только последним членом. Подставив (12) и (13) в выражения

$$\Delta V = V_0' - V_0 = \int_0^{p_1} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S - \left(\frac{dV}{dp}\right)_\Gamma\right] dp,$$

$$\varkappa = \int_0^{p_1} p\left[\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S - \left(\frac{dV}{dp}\right)_\Gamma\right] dp,$$

согласно определению $\bar{p}$ (3), находим

$$\bar{p} \approx \frac{3}{4} p. \tag{14}$$

Аналогичным путем для пористых сред можно получить

$$\bar{p} \approx \frac{1}{2} p_1, \tag{15}$$

так как в этом случае разложения типа (12) и (13) для изэнтроп и ударной адиабаты различаются между собой уже в членах нулевого порядка относительно p.

Соотношения (14) и (15) в пределе при $p_1 \to 0$ становятся точными. Отсюда следует, что формулы (10), (14), (15) в пределе дают точное выражение для температуры [1]. Действительно, в случае сплошной среды имеем

$$\lim_{p_1 \to 0} \left(\frac{dT}{dp}\right)_\Gamma = \frac{T_0}{\beta} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{S_0}.$$

Аналогично для пористой среды

$$\lim_{p_1 \to 0} \left(\frac{dT}{dp}\right)_\Gamma = \frac{1}{2} \frac{V_{00} - V_0}{C_p} + \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{S_0}.$$

Приближенная формула (11) этим предельным условиям не удовлетворяет. Когда уравнение ударной адиабаты сплошной среды представляется в D—u-координатах линейной зависимостью

$$D = a + bu,$$

легко получить аналитические выражения для величин, входящих в формулу (10),

$$p = \frac{\rho_0 a^2}{b} x (1 + x), \tag{16}$$

$$V = V_0 - \frac{V_0}{b} \frac{x}{1 + x},$$

где

$$x = \frac{bu}{a}.$$

С помощью этих выражений находим

$$\sigma = \frac{a^2}{b^2} \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(1 + x)\right]. \tag{17}$$

Если предположить, что в p—u-координатах ударная адиабата и изэнтропа разгрузки являются зеркальными отражениями друг **друга**, то нетрудно найти соответствующую формулу для отношения $\frac{\bar{p}}{p}$:

$$\frac{\bar{p}}{p} = \frac{\frac{x^2}{4} - \frac{3}{4} x + \ln(1 + x) - \frac{1}{8} \ln(1 + 2x)}{x \left\{1 - (1 + x)\left[1 - \frac{1}{2} \ln(1 + 2x)\right]\right\}}, \tag{18}$$

которая в пределе при $x \to 0$ переходит в (14). В практически важном интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$ формула (18) очень точно аппроксимируется квадратичным выражением

$$\frac{\bar{p}}{p} = 0{,}750 - 0{,}281x + 0{,}100x^2. \tag{19}$$

В том же предположении о зеркальной симметрии ударной адиабаты и изэнтропы в p—u-координатах получаем

$$\frac{d \ln p}{d \ln \sigma} = \frac{1+2x}{x^3}\left[\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right].$$

Отсюда совместно с (18) можно найти аппроксимирующее выражение для величины δ (19), которое по сравнению с точным выражением в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$ дает ошибку только в третьем десятичном знаке

$$\delta = 0{,}667 - 0{,}212\,x + 0{,}024\,x^2. \qquad (20)$$

С помощью формул (6), (9), (10), (16), (17), (19), (20) был произведен расчет температур T^* и T для меди по данным работ [3, 4] ($\rho_0 = 8{,}90$ г/см^3, $a = 3{,}96$ км/с; $b = 1{,}50$; $C_p = 410 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{град}}$; $\alpha = 55\cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}$; $\beta = 663$ кбар; $\frac{\rho_0 a^2}{b} = 929$ кбар; $\frac{a^2}{C_p b^2} = 17\,000$ град). Принятые значения C_p и α обеспечивают определение приращений удельной энергии и удельного объема в интервале температур от 293 до 1300° K с погрешностью не более 6%. В том же интервале значение β отклоняется от принятого не больше чем на 1,5%. Поэтому в данном случае предположение о постоянстве C_p и α можно считать оправданным.

Результаты расчета представлены в виде графиков на рис. 2 сплошными кривыми. Здесь же для сравнения (штриховые кривые) приведены данные, полученные в результате более сложного расчета на ЭВМ в работе [3]. В их основу было положено уравнение состояния Грюнайзена и формула Дугдала—Мак-Дональда. Кроме того, на графике нанесены две экспериментальные точки, взятые из работы [5], полученные путем измерения интегральной яркости свечения свободной поверхности меди после выхода на нее ударного фронта. Свечение регистрировалось фотоумножителем, поставленным вблизи этой поверхности.

Между результатами настоящего расчета и данными работы [3], а также высокотемпературной точкой из работы [5] имеются существенные расхождения. Однако есть серьезное основание считать, что указанные данные по остаточной температуре T^* завышены, а по температуре ударного сжатия T занижены. Действительно, если предположить, что эти данные являются точными, то из формулы (7) нетрудно найти соответствующие или эффективные значения $\bar{p}$, которые оказываются значительно ниже, чем полученные из выражения (18). Можно показать, что в этом случае скорость свободной поверхности должна превышать массовую скорость за ударным фронтом на 10% и более. В то же время известно (см., например, [3]), что это отклонение в рассматриваемом интервале давлений не превышает 2÷3%. Дополнительно заметим, что обеим экспериментальным точкам в работе [5] отвечает одно и то же эффективное давление $\bar{p}$. Это возможно лишь в том случае, если разные изэнтропы разгрузки существенно различаются по форме, что маловероятно в случае простых веществ. Скорее можно допустить, что в результаты указанных измерений вкралась неизвестная ошибка.

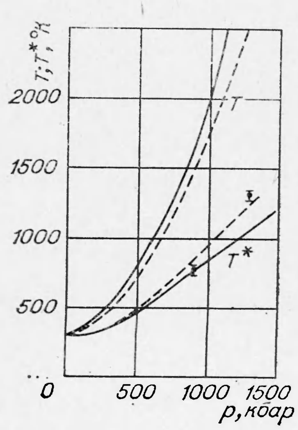

Рис. 2. Зависимость остаточной температуры T^* и температуры ударного сжатия T от амплитуды ударного фронта.

Из рис. 2 видно, что между результатами работы [3] и проведенными в настоящей работе расчетами имеется расхождение по температуре ударного сжатия вплоть до $p_1 = 0$. Но, как уже отмечалось, формулы (10), (18), (20) в области