

## ТРЕХМЕРНАЯ ТОМОГРАФИЯ В ДИАГНОСТИКЕ ГАЗОВЫХ ПОТОКОВ ПРИ НАЛИЧИИ НЕПРОЗРАЧНОГО ТЕЛА

А. В. Лихачев, В. В. Пикалов

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается возможность томографического восстановления распределения плотности в трехмерном газовом потоке сложной структуры. Исследуется влияние наличия непрозрачного тела на результат реконструкции. В процессе численного моделирования учитываются особенности обратной задачи, связанные с практическим осуществлением эксперимента, а именно, малое число ракурсов и наличие шумов в проекционных данных.

На протяжении последних десятилетий томографические методы широко применяются в физических экспериментах. Здесь основным полем использования томографии является диагностика низко- и высокотемпературной плазмы (см., например, [1–3]). Однако современный уровень развития техники и методики эксперимента позволяет применять томографию во многих других приложениях. Некоторые вопросы, связанные с использованием томографических методов в газодинамике, рассмотрены в [4, 5]. В [6] с большой точностью было восстановлено поле температур в сечении конвективного потока нагретого воздуха по изменению его коэффициента преломления. При этом томографическими алгоритмами обрабатывались данные, полученные методом голографической интерферометрии.

С точки зрения томографии в [6] производилась реконструкция функции двух переменных по набору ее одномерных проекций. В данной работе рассматривается восстановление функции трех переменных, описывающей трехмерное распределение коэффициента преломления в потоке, по ее двумерным проекциям. Ниже эту задачу будем называть задачей трехмерной томографии. Некоторые вопросы трехмерной томографии разбираются в [4, 7]. Несмотря на большую информативность, трехмерная томография редко применяется в физических экспериментах. С одной стороны, это связано с техническими трудностями при сборе проекционных данных, с другой — с большим объемом вычислений, который возрастает по мере стремления достигнуть лучшего пространственного разрешения.

Настоящая работа посвящена изучению проблем, которые могут возникнуть при реализации эксперимента по трехмерному томографическому восстановлению плотности потока. Поскольку часто предметом исследования в газодинамике служит обтекание твердого тела, являющегося, как правило, оптически непрозрачным, рассматривается влияние присутствия непрозрачного тела в потоке на результат реконструкции. Изучаются также характерные особенности задачи трехмерной томографии с повышенным пространственным разрешением. Некоторые ее аспекты рассмотрены в [8]. Особое внимание уделяется вопросам, связанным с малым числом ракурсов наблюдения, неравномерностью их распределения по углам, наличием шумов в проекционных данных.

**1. Постановка задачи.** Исследуются две постановки задачи трехмерной томографии.

1. Пусть непрозрачное тело отсутствует. Тогда задачу можно сформулировать следующим образом. Функция  $g(x, y, z)$  реконструируется внутри ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  по конечному набору своих проекций  $f_m(u, v)$ ,  $m = 1, \dots, M$  ( $z$  — одна из проекций на

рис. 1). Функция  $f(u, v)$  на рис. 1 определена на плоскости  $D$ , не пересекающей  $\Omega$ . Значение  $f(u, v)$  в некоторой точке плоскости  $D$  равно интегралу от  $g(x, y, z)$  вдоль прямой, проходящей через эту точку и перпендикулярной плоскости  $D$ .

2. Пусть непрозрачное тело 2 присутствует. Приведенная выше задача при этом усложняется. По-прежнему восстанавливается функция  $g(x, y, z)$  по набору функций  $f_m(u, v)$ ,  $m = 1, \dots, M$ . Однако теперь значения  $f_m(u, v)$  не всюду равны интегралам вдоль прямых от  $g(x, y, z)$ . В области тени непрозрачного тела значение проекции равно нулю. На рис. 1 эта тень представлена черным треугольником на плоскости  $D$ . Таким образом, внесение непрозрачного тела ведет к потере части информации об исследуемом газодинамическом объекте 1.

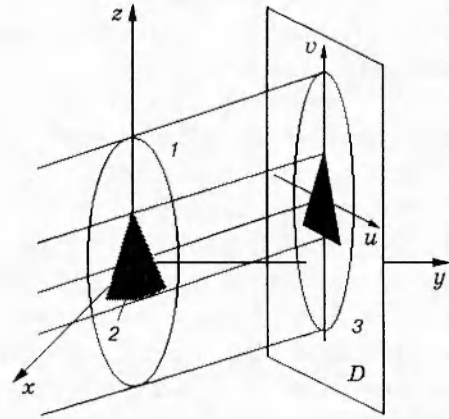


Рис. 1

Проекционные данные для задачи трехмерной томографии могут быть получены, например, методами голографической интерферометрии. В этом случае функции  $f_m(u, v)$  будут описывать разность набега фаз при прохождении соответствующего луча через область  $\Omega$  при наличии и отсутствии исследуемого возмущения среды. Эта величина может быть связана с суммарным (вдоль луча) изменением показателя преломления. Таким образом, функция  $g(x, y, z)$  будет равна разности показателей преломления среды и объекта. Реконструировав функцию  $g(x, y, z)$  томографическими методами и зная показатель преломления среды, можно определить показатели преломления объекта. Подробно голографическая интерферометрия описана в [5], ее применение для получения данных для томографии можно найти в [6].

**2. Используемые алгоритмы.** Задача трехмерной томографии, описанная в п. 1, была предварительно дискретизована обычным образом [7]. Область реконструкции разбивалась на кубические воксели, значение функции  $g(x, y, z)$  в каждом вокселе предполагалось постоянным. На носителях проекций определялись квадратные сетки, в них с каждым из узлов связывалось по одному лучу, вдоль которого производилось интегрирование. Значение  $f_m(u, v)$  в узле приравнивалось интегралу вдоль этого луча. После дискретизации задача трехмерной томографии сводится к системе линейных алгебраических уравнений:

$$Ag = f. \tag{2.1}$$

Здесь  $A$  — матрица размерностью  $I \times J$ ;  $g \in \mathbb{R}^J$ ;  $f \in \mathbb{R}^I$ ;  $g$  и  $f$  — векторы, отвечающие реконструируемой функции и проекционным данным соответственно. Элемент  $a_i^j$  матрицы  $A$  определяется как длина пути  $i$ -го луча внутри  $j$ -го вокселя,  $i = 1, \dots, I$ ,  $j = 1, \dots, J$  (нумерация лучей сквозная по всем проекциям).

Особенности системы (2.1) в применении к томографированию потоков — ее существенная недоопределенность ( $I \ll J$ ) и большая разреженность (т. е. равенство нулю большинства элементов матрицы  $A$ ), а также большие значения  $I$  и  $J$ . Для решения подобных систем разработан ряд итерационных алгоритмов. Среди них в томографии наиболее распространенным является ART (Algebraic Reconstruction Technique). Следуя [7],  $(k + 1)$ -е итерационное решение для ART записывается в виде

$$g^{(k+1)} = g^{(k)} + \lambda^{(k)} \frac{f_{i(k)} - (a^{i(k)}, g^{(k)})}{\|a^{i(k)}\|^2} a^{i(k)}, \quad \|a^{i(k)}\| \neq 0, \quad g^{(k+1)} = g^{(k)}, \quad \|a^{i(k)}\| = 0, \tag{2.2}$$

где  $a^{i(k)}$  —  $i(k)$ -я строка матрицы  $A$ ;  $\lambda^{(k)}$  — параметр релаксации;  $i(k) = [k \pmod I + 1]$ , т. е. строки матрицы  $A$  перебираются циклически. Скалярное произведение и норма в  $\mathbb{R}^J$

определены обычным образом. В [7] указано, что итерационный процесс (2.2) сходится, если  $0 < \lambda \leq 2$  для любого начального приближения  $g^{(0)} \in R^J$ . Алгоритм ART использован в данной работе при решении модельной задачи в отсутствие непрозрачного тела.

Применение алгоритма (2.2) для реконструкции потока при наличии в нем непрозрачного тела ведет к возникновению существенных искажений. Это связано с тем, что значения проекций в точках, попадающих в тень непрозрачного тела, становятся равными нулю, в то время как интегралы от функции  $g(x, y, z)$ , взятые вдоль соответствующих прямых, пересекающих непрозрачное тело, вообще говоря, нулю не равны. Таким образом, некоторые уравнения системы (2.1) становятся неадекватными задаче, однако алгоритм (2.2) этого не учитывает.

Естественным способом коррекции результата в данном случае является отбрасывание уравнений, ставших неадекватными, и решение вновь полученной системы с помощью алгоритма ART. В настоящей работе этот подход был реализован следующим образом. Назовем *тенью тела* проекцию, принимающую два значения: 0 (соответствующий луч не пересекает тела) и 1 (в противном случае). Предполагалось, что тени от непрозрачного тела известны в тех же направлениях, что и проекции функции, подлежащей реконструкции, причем те и другие заданы на одинаковых сетках. При этом вместо алгоритма (2.2) использовался следующий алгоритм:

$$g^{(k+1)} = g^{(k)} + \lambda^{(k)} \frac{f_{i(k)} - (a^{i(k)}, g^{(k)})}{\|a^{i(k)}\|^2} a^{i(k)}, \quad \|a^{i(k)}\| \neq 0,$$

$$g^{(k+1)} = g^{(k)}, \quad \|a^{i(k)}\| = 0, \quad g^{(k+1)} = g^{(k)}, \quad f_{i(k)}^{op} = 1.$$

Здесь  $f^{op} \in R^I$  — вектор, соответствующий теням от непрозрачного тела; остальные обозначения те же, что и в (2.2).

**3. Вычислительный эксперимент. Общие замечания.** В процессе численного моделирования исследовались возможности методов трехмерной томографии при обработке данных, полученных в аэрофизическом эксперименте. В качестве трехмерной модели была выбрана функция

$$g(x, y, z) = \sum_{l=1}^5 g_l(x, y, z), \quad (3.1)$$

где

$$g_l(x, y, z) = \begin{cases} 1 - \frac{r_l^2}{\rho_l^2}, & r_l^2 \leq \rho_l^2, \\ 0, & r_l^2 > \rho_l^2; \end{cases}$$

$$r_l = (\alpha_l((x - x_l)^2 + (y - y_l)^2))^{1/2} + \gamma_l z; \quad z_1 \leq z \leq z_2;$$

$$x_l = \rho_l \cos(2\pi\omega_l(z - z_1) + \varphi_l); \quad y_l = \rho_l \sin(2\pi\omega_l(z - z_1) + \varphi_l).$$

Дополнительно функция  $g(x, y, z)$  ограничена по амплитуде единицей, т. е. если сумма в (3.1) превышает 1, то ее значение заменяется единицей. Каждую из функций  $g_l(x, y, z)$  можно представить как параболоид от переменных  $(x, y)$ , заданный в области, где он принимает неотрицательные значения, с вершиной в точке  $(x_l(z), y_l(z))$ . Функции  $x_l(z), y_l(z)$  определяют вращение вершины параболоида вокруг оси  $z$  с частотой  $\omega_l$  и начальной фазой  $\varphi_l$ , при этом расстояние до оси вращения линейно зависит от координаты  $z$  с коэффициентом  $\gamma_l$ .

Поскольку целью вычислительного эксперимента является исследование томографических аспектов восстановления структуры потока сложной формы в присутствии непрозрачного тела, а не изучение обтекания твердого тела как такового, авторы не стремились

создать модель какого-либо реального течения. Выбранная модель лишь в общих чертах описывает закрученные линии тока, которые в принципе могли бы образоваться при обтекании вращающегося конуса струйками подогретого газа.

При такой интерпретации модели некоторое усредненное значение  $\omega$  характеризовало бы угловую скорость вращения конуса, значения  $\gamma_l$  были бы близки к тангенсу угла при вершине конуса. Величины  $\alpha_l$  и  $\rho_l$  определяли бы радиус сечения плоскостью  $z = \text{const}$  струйки горячего газа. При этом предполагается, что изменение коэффициента преломления, вызванное увеличением температуры, максимально в центре сечения (где оно равно 1 в некоторых условных единицах) и уменьшается к периферии по квадратичному закону.

Параметры, задающие пять функций  $g_l(x, y, z)$ , приведены в таблице.

$l$	$\rho$	$\alpha$	$p$	$\gamma$	$\omega$	$\varphi$ , град	$l$	$\rho$	$\alpha$	$p$	$\gamma$	$\omega$	$\varphi$ , град
1	0,15	3,0	0,7	-0,7	1,85	0	4	0,15	3,0	0,7	-0,7	2,00	216,0
2	0,15	3,0	0,7	-0,7	1,95	72,0	5	0,15	3,0	0,7	-0,7	1,90	288,0
3	0,15	3,0	0,7	-0,7	2,00	144,0							

На рис. 2 схематически изображены конус и одна из обтекающих его струек, а на рис. 3 — изолинии модели в сечении плоскостью  $x = 0$ .

В качестве области реконструкции рассматривался куб с центром в начале координат и длиной стороны, равной 2 в безразмерных единицах. В качестве непрозрачного тела выбран прямой конус, ось которого совпадает с осью  $z$ , вершина расположена в точке  $(0; 0; 0,4)$ , высота 1,2, радиус основания 0,3.

При моделировании проекционных данных вычислялось шесть проекций в направлениях, перпендикулярных оси  $z$ , при этом углы с положительным направлением оси  $x$  составляли 80; 100; 180; 190; 340; 350°. Такое распределение проекций по углам отражает особенности сбора данных при диагностике потоков. Как правило, в экспериментах исследуемый поток окружен непрозрачным кожухом аэродинамической трубы, в котором имеется ограниченное число окон для обзора. В пределах каждого окна проекции можно снимать только в узком диапазоне углов. В приводимом вычислительном эксперименте моделируются данные, собираемые с установки, имеющей три окна обзора в направлениях 0; 90; 180°, в каждом из которых регистрируется по две проекции.

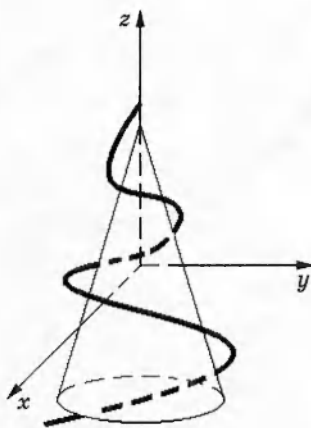


Рис. 2

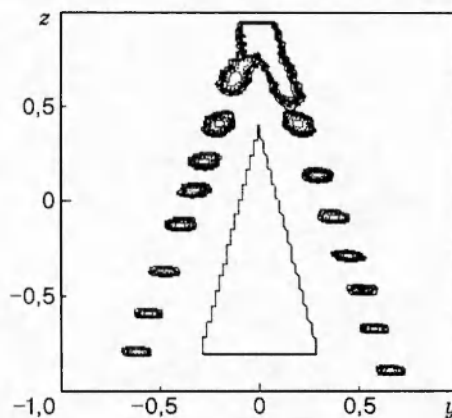


Рис. 3

Область реконструкции разбивалась на  $101 \times 101 \times 101$  вокселей. На носителях проекций были заданы сетки  $129 \times 129$  узлов. Для численной оценки качества реконструкции использовалась нормированная среднеквадратичная ошибка

$$\Delta = \left( \frac{\sum_{j=1}^J (g_j^M - g_j^{(k)})^2}{\sum_{j=1}^J (g_j^M)^2} \right)^{1/2}, \quad (3.2)$$

где  $g_j^M$  и  $g_j^{(k)}$  — значения функции для  $j$ -х вокселей модели и итерационного решения соответственно. (Оценка погрешности решения в процентах получается из (3.2) умножением на 100.) При описании результатов удобнее изменить определение итерации для алгоритма ART, использованное в п. 2. Теперь будем называть итерацией цикл, в котором обрабатываются один раз все проекционные данные. Таким образом, эта «большая» итерация соответствует  $I$  итерациям, определенным ранее.

**Реконструкция по идеальным данным.** Некоторые результаты реконструкции по идеальным данным представлены кривыми 1 на рис. 4, иллюстрирующими зависимость величины  $\Delta$  от номера итерации  $N$ . Рис. 4, *а* относится к реконструкции функции  $g(x, y, z)$  в отсутствие непрозрачного тела, а рис. 4, *б* — к реконструкции той же функции при наличии непрозрачного тела. Как видно из сравнения кривых 1 на рис. 4, присутствие непрозрачного тела принципиально не меняет характера сходимости алгоритма, однако при этом величина  $\Delta$  возрастает приблизительно в 1,3 раза.

Визуально качество восстановления при наличии непрозрачного тела можно оценить по рис. 5, где приведены изолинии в сечении плоскостью  $x = 0$  результата реконструкции по шести идеальным проекциям после 20-й итерации алгоритма ART.

**Реконструкция по зашумленным данным.** Предварительная обработка проекций. Для исследования устойчивости алгоритма к ошибкам во входных данных использовалась следующая модель случайных шумов в проекционных данных. Шум полагался нормально распределенным с нулевым средним и переменной дисперсией, имеющей значение 30% (линии 2–4, рис. 4) величины проекции в рассматриваемой точке. Столь высокий уровень шумов выбран с целью продемонстрировать эффективность применения предварительной обработки данных, а также показать преимущества адаптивной частотной фильтрации проекций по сравнению с их усреднением в скользящем окне.

В задачах томографии при наличии существенных шумов в эксперименте для улучшения качества реконструкции иногда используется предварительная фильтрация проекций (см., например, [2–4]). В данной работе рассмотрено два типа фильтрации: усреднение в скользящем окне  $3 \times 3$  и низкочастотная фильтрация.

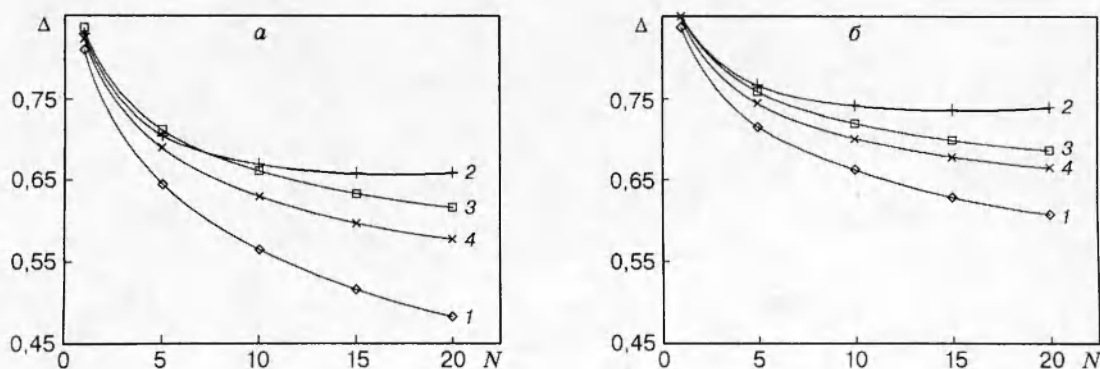


Рис. 4

Для низкочастотной фильтрации проекций использовался фильтр  $H_\Omega$ . Применение в томографии трехмерных аналогов этого фильтра описано в [9]. Фильтр  $H_\Omega$  задается следующим образом. Значение фурье-образа каждой проекции в узле  $(\nu_k, \nu_l)$  фильтруется согласно уравнению  $\tilde{H}_\Omega \tilde{f}(\nu_k, \nu_l) = \tilde{f}(\nu_k, \nu_l) / [1 + \alpha(\nu_k^2 + \nu_l^2)]$ . На основе предположения, что фильтр должен вносить в проекции искажения порядка тех, что привносятся шумами, параметр регуляризации  $\alpha$  определялся по критерию невязки:

$$\sum_{k,l} |\tilde{f}(\nu_k, \nu_l) - H_\Omega \tilde{f}(\nu_k, \nu_l)|^2 = \delta^2 \|\tilde{f}\|^2, \quad (3.3)$$

где  $\delta^2$  — оценка нормы шума:  $\delta^2 = \sigma^2 / [\sum_{k,l} f^2(\nu_k, \nu_l)]$ ;  $\sigma^2$  — суммарная дисперсия шума.

В данной работе уравнение (3.3) численно решалось методом деления пополам.

Вычислительный эксперимент показал, что предварительная обработка проекций ведет к улучшению качества реконструкции. Причем частотная фильтрация проекций дала лучшие результаты. Рис. 4 иллюстрирует это. Здесь кривые 2 отвечают восстановлению без предварительной обработки проекций, 3 и 4 — восстановлению по сглаженным и фильтрованным посредством  $H_\Omega$  проекциям соответственно.

На основе проведенного теоретического анализа и численного моделирования показано, что возможно удовлетворительное томографическое восстановление трехмерных потоков сложной структуры вблизи непрозрачных тел. В вычислительных экспериментах получено, что среднеквадратичная ошибка при реконструкции модели сложного потока с вихрями по шести неравномерно распределенным проекциям колеблется от 35 до 70 % в зависимости от наличия или отсутствия непрозрачного тела и уровня шумов. Для реконструкции такой сложной трехмерной модели по столь ограниченному набору проекционных данных этот результат вполне удовлетворителен. В частности, из сравнения рис. 3 и 5 видно, что основные характерные черты распределения плотности восстановились достаточно хорошо.

При реконструкции по зашумленным случайным образом проекциям наиболее эффективным оказалась предварительная частотная фильтрация проекций. В данной работе для этой цели предложен двумерный регуляризующий фильтр низких частот. Параметр регуляризации при этом вычисляется по суммарной норме шума на проекциях.

Авторы выражают признательность за частичную финансовую поддержку работы Российскому фонду фундаментальных исследований (код проекта 95-02-03615).

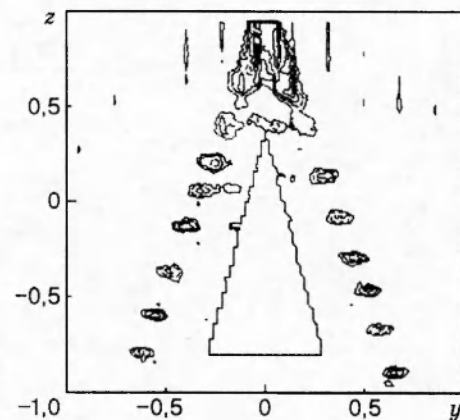


Рис. 5

## ЛИТЕРАТУРА

1. Minerbo G. N., Sanderson J. G., van Hulsteyn D. B., et al. Three-dimensional reconstruction of the x-ray emission in laser imploded targets // Appl. Optics. 1980. V. 19, N 10. P. 1723–1728.
2. Преображенский Н. Г., Пикалов В. В. Неустойчивые задачи диагностики плазмы. Новосибирск: Наука, 1982.
3. Balandin A. L., Likhachov A. V., Panferov N. V., et al. Emission microtomography of plasma // Proc. SPIE. 1991. V. 1843. P. 68–82.



4. Пикалов В. В., Преображенский Н. Г. Реконструктивная томография в газодинамике и физике плазмы. Новосибирск: Наука, 1987.
5. Вест Ч. Голографическая интерферометрия. М: Мир, 1982.
6. Vukićević D., Jäger H., Nijer T., et al. Tomographic reconstruction of the temperature distribution in a convective heat flow using multidirectional holographic interferometry // Appl. Optics. 1989. V. 28, N 8. P. 1508–1516.
7. Herman G. T. Image Reconstruction from Projections: The Fundamentals of Computerized Tomography. N. Y.: Acad. Press, 1980.
8. Likhachov A. V., Picalov V. V. A modification of the ART method for cone-beam tomography of high space resolution // Computerized Tomography: Proc. Fourth Intern. Symp., Novosibirsk, Russia, 1993. Utrecht: VSP, 1995. P. 309–317.
9. Лихачев А. В., Пикалов В. В. Частотная фильтрация в алгебраических алгоритмах трехмерной томографии // Автометрия. 1995. № 4. С. 83–89.

*Поступила в редакцию 6/V 1996 г.*

---