

в среднем в 1,75 раза, что и привело к разрушению образца 6. Теоретическая определяющая форма движения ($m_* = 2$, $n_* = 3$) в экспериментах на образцах 5, 6 не реализовалась из-за сложной программы нагружения. В последнем столбце табл. 2 приведены оценки сверху для полученных амплитуд прогибов соответственно первого и второго, третьего и четвертого, пятого и шестого стержней.

Как видим, полученная оценка величины остаточного прогиба дает удовлетворительные совпадения с экспериментом. Наилучшее совпадение получено на третьем образце, где значительно выделилась вторая форма движения. На образцах 1, 2 зафиксирована начальная стадия движения, формы выпучивания равноправны, прогибы малы. Отметим большую чувствительность процесса выпучивания стержня к изменению времени действия нагрузки. Увеличение времени нагружения в 2 раза приводит к возрастанию прогибов на порядок.

Поступила 29 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем. — ДАН СССР, 1949, т. 64, № 6.
2. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М., Физматгиз, 1963.
3. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., Наука, 1967.
4. Механические свойства инструментальных сталей. Сборник под ред. А. П. Гуляева. ЦБТИ ЭНИМС, 1958.
5. Горнев В. М. Развитие динамических форм потери устойчивости упругих систем при интенсивном нагружении на конечном отрезке времени. — ПМТФ, 1972, № 4.

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТСКОКА ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СТЕРЖНЕЙ ОТ ТВЕРДОЙ ПРЕГРАДЫ

А. И. Гулидов, В. М. Фомин
(Новосибирск)

Явления распространения и взаимодействия волн нагрузки и разгрузки особенно в одномерном и двумерном приближениях исследовались в целом ряде работ (см. например, [1—6]). Анализ процесса отскока стержней в настоящее время рассмотрен только в одномерном приближении [7—10].

В данной работе численно моделируется процесс отскока деформируемых стержней конечной длины от абсолютно жесткой преграды в двумерной постановке.

Будем рассматривать класс задач, связанных с соударением твердых деформируемых тел с различными скоростями в двумерной постановке. Так как объемные силы, теплопроводность и источники тепла отсутствуют, то уравнения движения, описывающие напряженно-деформированное состояние такой среды в лагранжевых координатах, имеют вид [11, 12]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} + \alpha \frac{u}{r} \right], \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial S_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} + \alpha \frac{S_{rr} - S_{\theta\theta}}{r} - \frac{\partial p}{\partial r}, \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial S_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} + \alpha \frac{S_{rz}}{r} - \frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned}$$

$$(1) \quad \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \left[S_{rr} \frac{\partial u}{\partial r} + S_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} + \alpha S_{\theta\theta} \frac{u}{r} + S_{rz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right],$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = u, \quad \frac{\partial S_{rr}}{\partial t} = 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{3\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = w, \quad \frac{\partial S_{zz}}{\partial t} = 2\mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{3\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right),$$

$$\frac{\partial S_{\theta\theta}}{\partial t} = 2\mu \left(\alpha \frac{u}{r} + \frac{1}{3\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial S_{rz}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right),$$

где ρ — плотность среды; u, w — компоненты вектора скорости в проекции на оси координат r, z соответственно; t — время; e — удельная внутренняя энергия. Тензор напряжения представлен в виде

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + S_{ij} \quad (i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3),$$

где $p = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii}$; S_{ij} — девиатор напряжения с компонентами $S_{rr}, S_{zz},$

$S_{\theta\theta}, S_{rz}$; $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$; μ — модуль сдвига. Считается, что напряже-

ния при растяжении положительны и отрицательны при сжатии. Величина $\alpha = 0$ соответствует плоскому деформированному состоянию, а $\alpha = 1$ — осесимметричному.

Для замыкания системы уравнений (1) используем модель пластического течения, т. е. второй инвариант девиатора тензора напряжений в области пластичности удовлетворяет условию текучести Мизеса

$$(2) \quad S_{rr}^2 + S_{zz}^2 + S_{\theta\theta}^2 + 2S_{rz}^2 \leq \frac{2}{3} Y_0^2,$$

где Y_0 — предел текучести, определяемый из результатов экспериментов на одноосное растяжение. Уравнение состояния среды представим в виде

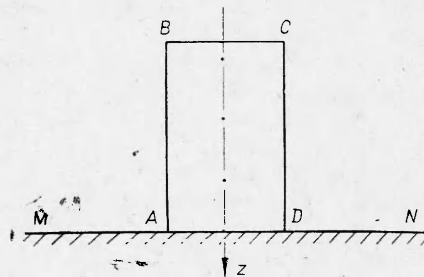
$$(3) \quad \underline{I}_2 P = a_1(\eta - 1) + a_2(\eta - 1)^2 + a_3(\eta - 1)^3 + a_4\eta e,$$

где $\eta = \rho/\rho_0$; ρ_0 — начальная плотность; a_1, a_2, a_3, a_4 — постоянные. Далее $a_1 = K, a_2 = a_3 = a_4 = 0$. При наличии упрочнения поверхность текучести изменяется в процессе нагружения, что может быть учтено в первом приближении за счет переменного предела текучести [3].

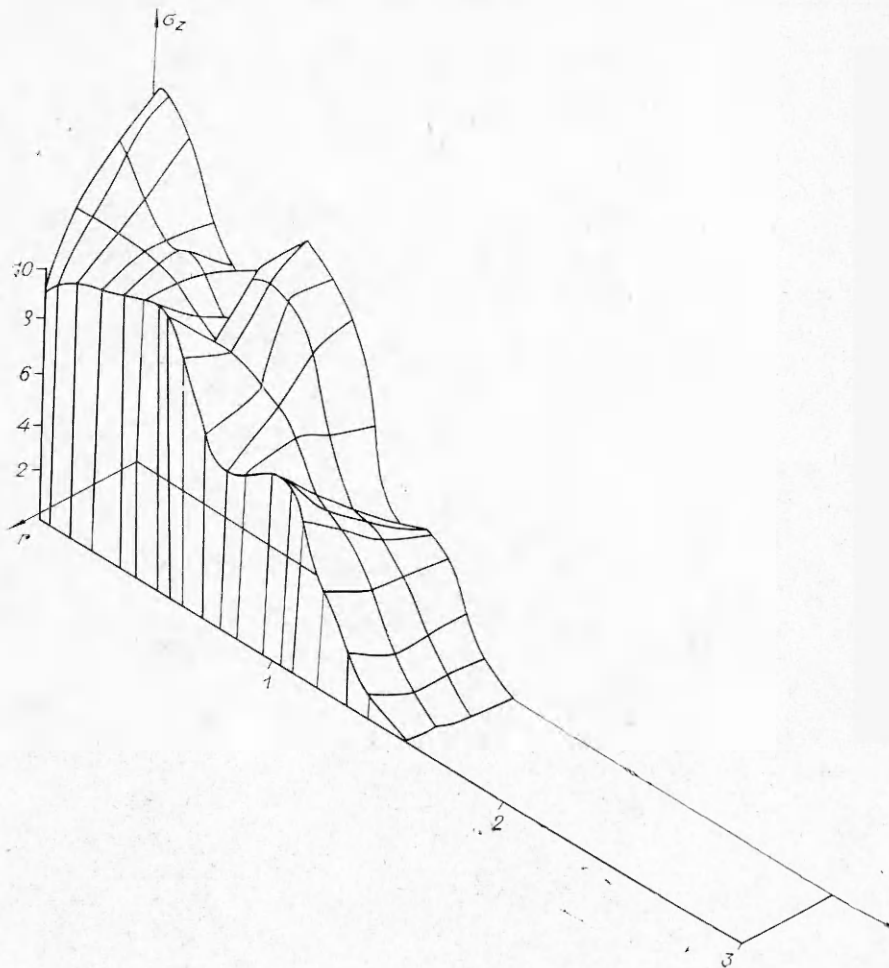
Задача 1. Рассмотрим задачу о продольном ударе цилиндрического стержня длины L_0 и радиуса R_0 об абсолютно твердую преграду со скоростью v_0 (фиг. 1). Масса цилиндра m .

Данную физическую задачу математически можно сформулировать следующим образом: найти функции ρ, u, w, σ_{ij} , удовлетворяющие системе уравнений (1) — (3), начальным условиям $w = v_0, \rho = \rho_0, \sigma_{ij} = 0$ в области D ($ABCD$) и граничным условиям $\sigma^{ij}n_j = 0$ на $ABCD, S_{rz} = 0$ и $w = 0$ на DA , где n_j — компоненты единичного вектора нормали к границе $ABCD$. Следует заметить, что граница $ABCD$ в процессе деформирования изменяется, а поверхность контакта AD , следовательно, будет переменной. Это учитывается при решении задачи.

Решение данной задачи осуществляется методом Уилкинса [11]. Основной целью работы при этом является



Ф и г. 1



Ф и г. 2

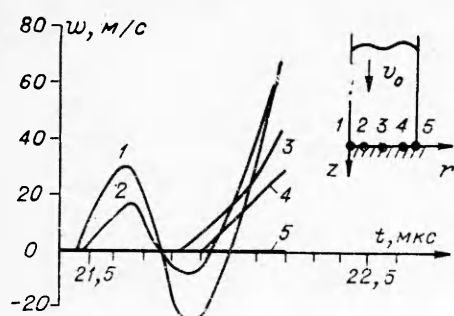
выяснение физики явления продолжительности удара. Данное явление только в одномерной постановке исследовалось ранее в работах [3—9].

За начало отсчета продолжительности удара принимается момент времени, когда между границей тела $ABCD$ и преградой MN появится хотя бы одна общая точка. Этот момент времени принимаем за $t = 0$.

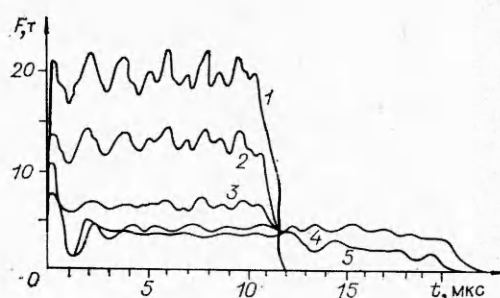
Если в процессе взаимодействия тела $ABCD$ с преградой MN возникнет состояние, когда поверхности тела и преграды не будут иметь общих точек, то этот момент времени будем считать окончанием продолжительности удара. Примем его за $t = t_*$.

О п р е д е л е н и е. Отскоком будем называть явления, которые происходят при соударении тела $ABCD$ с преградой MN за промежуток времени t_* . В данном случае t_* есть время контакта или время продолжительности удара.

Проведенные серии расчетов при различных скоростях соударения позволили выяснить картину распространения упругопластических волн и понять явление отскока. Пример сложного напряженного состояния, возникающего в стальном стержне с параметрами $Y_0 = 0,012$ мбар, $R_0 = 0,3175$ см, $L_0 = 3$ см, $\rho = 7,87$ г/см³, $K = 1,7$ мбар, $\mu = 0,8$ мбар,



Ф и г. 3



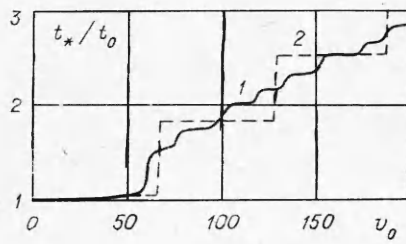
Ф и г. 4

$v_0 = 75$ м/с для момента времени $t_1 = 2,3$ мкс, приведен на фиг. 2, когда волна не дошла до поверхности BC . От контактной границы DA в начале данного процесса соударения формируется волна сжатия двухволновой конфигурации, причем скорости движения этих волн существенно различны. Первая — упругая волна, а вторая — пластическая, амплитуда и скорость которой существенно зависят от начальной скорости удара. Наличие поперечных волн разгрузки, идущих от боковых поверхностей AB и DC , снижают интенсивность продольных волн, и поэтому вычисленное напряженно-деформированное состояние стержня отличается от результатов решения задач, полученных по одномерному приближению. Достигнув свободной поверхности CB , упругая волна сжатия отражается от нее упругой волной разгрузки и движется навстречу фронту пластической волны нагрузки. В момент их взаимодействия, как следует из решения локальной задачи распада разрыва, интенсивность пластической волны уменьшается скачком, а в сторону CB будет опять распространяться фронт упругой волны сжатия. В дальнейшем описанный процесс повторяется до тех пор, пока система волн упругой разгрузки не снимет полностью амплитуду пластической волны сжатия. В каждом сечении $r = \text{const}$ описанный выше процесс взаимодействия волн будет качественно аналогичным и будет отличаться только амплитудами и скоростями распространения. Этот факт приводит к тому, что волна разгрузки приходит к поверхности MN в каждом сечении $r = \text{const}$ в различные моменты времени. Следовательно, контакт точек DA с MN нарушится неодновременно. Особенно это хорошо видно на фиг. 3. Цифрами 1—5 показано изменение скорости точек границы DA в зависимости от времени. Интересно отметить, что отошедшие точки контакта DA могут через некоторое время снова присоединяться к твердой границе MN . Неодновременное отделение точек контакта DA от MN в данном случае в отличие от одномерного приближения существенно связано с двумерностью.

Для практического определения момента отскока удобно воспользоваться соотношением

$$F = \int_{S(t)} \sigma_z dS,$$

где $S(t)$ — граница контакта DA . Обращение F в нуль соответствует моменту отскока. Расчеты, проведенные при больших значениях предела упругости Y_0 , таких, что пластичность не возникает, показывают, что время отскока практически постоянно у стержней одинаковой длины при различных скоростях соударения (кривые 1—3 на фиг. 4). Скорости удара соответственно 150, 100 и 50 м/с. Кривые 4 и 5 — расчеты при $Y_0 = 0,012$ мбар и скоростях удара 75 и 50 м/с. Осциллирующий вид зави-



Ф и г. 5

симостей обусловлен волнами разгрузки от свободной боковой поверхности. Время отскока для кривых 1—3 совпадает со временем прихода отраженной от свободного торца стержня волны,двигающейся со стержневой скоростью.

Рассмотрим зависимость безразмерной величины времени продолжительности удара t_*/t_0 от скорости v_0 (фиг. 5, кривая 1, t_0 — время продолжительности удара при упругом соударении). Рост продолжительности удара (t_*/t_0) с увеличением скорости носит существенно ступенчатый характер, что, вообще говоря, качественно подтверждается результатами экспериментов [8, 9]. Ступенчатый вид этой зависимости объясняется в первую очередь волновым характером взаимодействия пластической волны с упругой волной разгрузки. Качественная картина такого процесса была описана выше.

Рассмотрим решение задачи 1, но только в одномерной постановке в приближении напряженного состояния, когда $\sigma_\theta = \sigma_r = 0$ — модели идеальной пластичности. Покажем, что данная задача в классе непрерывных функций решения не имеет. Для доказательства воспользуемся известным решением аналогичной задачи, предложенной в [1] в рамках упругопластического приближения схемы Прандтля. В полученных формулах работы [1, 2] перейдем к пределу при $C_1 \rightarrow 0$, где C_1 — скорость пластической волны. Тогда значение деформаций на границе контакта будет $\epsilon \rightarrow \infty$, что доказывает утверждение.

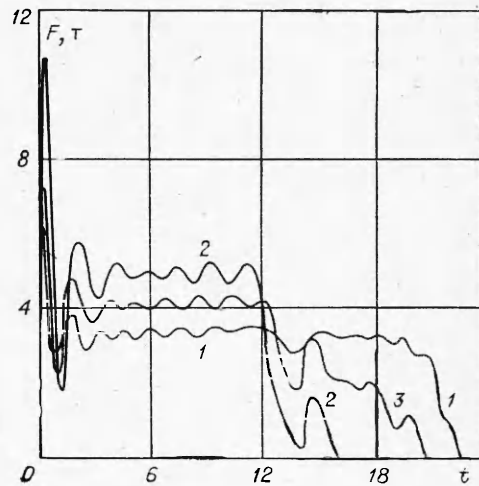
Таким образом, остается выяснить, почему решение в двумерной постановке дает качественно правильный результат. Этот факт объясняется тем, что при решении задачи 1 в двумерной постановке по сравнению с одномерной учитывается изменение площади сечения стержня, особенно в пластической области при прохождении упругопластической волны по стержню. Учет в данном случае изменения площади сечения в процессе нагружения на поведение решения задачи качественно аналогичен учету упрочнения в зависимости ($\sigma_z - \epsilon$) при решении в одномерном приближении.

Выделим в первоначально цилиндрическом стержне элементарный объем dV

$$dV = f dz,$$

полученный сечением стержня двумя параллельными плоскостями, расстояние между которыми dz . Здесь $f(z) \approx f(z + dz/2) \approx [f(z) + f(z + dz)]/2$. Уравнение сохранения массы этого элементарного объема имеет вид

$$\rho dV = \rho_0 dV_0,$$



Ф и г. 6

где ρ_0 и V_0 — начальные величины. Уравнения движения в этом случае для квазидномерного приближения в лагранжевых координатах запишем в виде

$$f\rho dw/dt = dT/dz, \quad dz/dt = w, \quad T = T(z).$$

Полученная система уравнений в упругой области замыкается законом Гука, записанным в форме

$$(4) \quad \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial t} - (1 - 2\nu) \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = E \frac{\partial w}{\partial z},$$

где $v = \rho_0/\rho$; $\nu = \lambda/2(\lambda + \mu)$; $E = \mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$; λ и μ — параметры Ламэ. Соотношение (4) получено при условии, что $\sigma_r = \sigma_\theta = 0$, $\sigma_z \neq 0$, $\dot{\epsilon}_r = -\nu \dot{\epsilon}_z$, где точки означают дифференцирование по времени.

В области пластической деформации имеем

$$\sigma_z = -p + S_z, \\ S_z = \pm(2/3)Y_0, \quad p = \pm(1/3)Y_0.$$

Так как в пластической области материал среды несжимаем, то объем остается постоянным, что позволяет найти изменение площади сечения f .

Таким образом, данная физическая задача сводится к следующей математической: найти функции ρ , w , σ_z , f , удовлетворяющие в области $D_z(0 \leq t < \infty, -L_0 \leq z \leq 0)$ системе уравнений

$$(5) \quad f\rho \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial z}, \quad \rho dV = \rho_0 dV_0, \quad T = \sigma_z f(z),$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = E \frac{\partial w}{\partial z}, \quad f = \frac{\partial V}{\partial z}, \quad \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial t} = (1 - 2\nu) \frac{\partial w}{\partial z} \quad \text{при } \sigma_z < Y_0;$$

$$(6) \quad f\rho \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial z}, \quad \rho dV = \rho_0 dV_0, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = E \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$T = \sigma_z f(z), \quad \sigma_z = \text{sgn}(\sigma_z) Y_0 \quad \text{при } \sigma_z \geq Y_0,$$

$$dV^* = \left[(1 - 2\nu) \frac{\sigma_z}{E} + 1 \right] dV_0, \quad f = \frac{dV^*}{dz};$$

начальным условиям $\rho = \rho_0$, $\sigma_z = 0$, $w = w_0$ в области D_z ; граничным условиям

$$z = -L_0, \quad \sigma_z = 0 \quad \text{для (5)}, \quad z = 0, \quad w = 0 \quad \text{для (6)}$$

и условию на неизвестной подвижной границе $-L_0 \leq z_1(t) \leq 0$

$$\sigma_z = Y_0, \quad [v_1] = 0.$$

Здесь v_1 — перемещение; $[]$ — скачок соответствующей величины.

Поставленная задача решалась численно методом, аналогичным [11]. Результаты рассчитанных зависимостей t_*/t_0 от скорости удара представлены на фиг. 5 кривой 2. Видно, что данная зависимость так же, как и кривая 1, является четко выраженной ступенчатой функцией. Однако количественные результаты этих двух решений существенно отличаются.

Задача 2. Рассмотрим задачу о продольном ударе усеченных конических стержней длины L_0 с радиусами R_0 и R_1 об абсолютно твердую преграду со скоростью v_0 в двумерной постановке.

Математическая постановка этой задачи практически аналогична задаче 1, поэтому ее здесь не приводим. Величины сил взаимодействия F для двух конусов ($L_0 = 3$ см, $R_0 = 0,335$ см, $R_1 = 0,3$ см — кривая 1; $L_0 = 3$ см, $R_0 = 0,3$ см, $R_1 = 0,335$ см — кривая 2) и цилиндра ($L_0 = 3$ см, $R_0 = 0,3175$ см), масса и кинетическая энергия которых одинакова,

приведены на фиг. 6 ($v_0 = 75$ м/с). Даже при малых углах конусности время отскока существенно отличается от времени отскока цилиндрического стержня. Это явление связано с процессом кумуляции упругой волны нагрузки и разгрузки из-за изменения площади сечения и их взаимодействия с падающей пластической волной. При этом следует заметить, что и импульс действия у конического стержня ($L_0 = 3$ см, $R_0 = 0,3$ см, $R_1 = 0,335$ см) будет больше, чем у цилиндрического. Этот факт интересен еще тем, что одну и ту же кинетическую энергию можно по-разному перевести в пластическое деформирование в зависимости от возбуждаемого волнового процесса в среде.

Поступила 10 V 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Ленский В. С. Об упругопластическом ударе стержня о жесткую преграду.— ПММ, 1949, т. 13, № 2.
2. Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М., Физматгиз, 1961.
3. Баренблат Г. И., Ишлинский А. Ю. Об ударе вязкоупругого стержня о жесткую преграду.— ПММ, 1962, т. 26, № 3.
4. Уилкинс М. Л., Гуннан М. У. Удар цилиндра по жесткой преграде.— Сб. пер. Механика, 1973, № 3.
5. Коротких Ю. Г., Белевич С. М. Некоторые результаты численного исследования процесса соударения стержня с жесткой преградой.— В кн.: Методы решения задач упругости и пластичности. Горький, 1972.
6. Bertholf L. D., Karnes C. H. Axisymmetric elastic-plastic wave propagation in 6061-T6 aluminum bars of finite length.— Trans. ASME, ser. D, 1969, N 3.
7. Веклич Н. А., Кукуджанов В. Н., Малышев Б. М. О продолжительности упругопластического удара по стержню. Тезисы докладов IV симпозиума по распространению волн. Кишинев, Наука, 1968.
8. Веклич Н. А. О распространении и взаимодействии упругопластических волн в стержне при ударе о преграду.— Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 4.
9. Веклич Н. А., Малышев Б. М. Продолжительность удара упругопластического стержня.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 2.
10. Кукуджанов В. Н. Одномерные задачи распространения волн напряжения в стержнях.— Труды ВЦ АН СССР, 1977, вып. 7.
11. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений.— В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике. М., Мир, 1967.
12. Станюкович К. П. и др. Физика взрыва. М., Наука, 1975.

УДК 539.21

УДАРНЫЕ АДИАБАТЫ ОКИСЛОВ ЩЕЛОЧНО-ЗЕМЕЛЬНЫХ МЕТАЛЛОВ

А. А. Вааль, А. В. Жуков, В. Ф. Конусов

(Томск)

Расчет ударных адиабат ионных кристаллов (щелочно-галлоидных соединений, окислов) является необходимым звеном в переходе к рассмотрению поведения при ударном сжатии многих неорганических материалов (минералов, горных пород) [1—3]. Параметры ударного сжатия большинства щелочно-галлоидных кристаллов хорошо определены как экспериментально [4], так и теоретически [5, 6]. Менее исследовано поведение окислов в условиях ударного нагружения. В данной работе на основе предлагаемой полуэмпирической функции энергии связи, учитывающей парные и тройные взаимодействия ионов, проводится расчет ударных адиабат окислов щелочно-земельных металлов MgO, CaO, SrO, BaO в фазах B1 (решетка NaCl) и B2 (решетка CsCl).