

УДК 621.454.3

О РАСЧЕТЕ ДАВЛЕНИЯ В РДТТ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ СКОРОСТИ ГОРЕНИЯ ТВЕРДОГО ТОПЛИВА ОТ ДАВЛЕНИЯ

А. М. Липанов

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, 125047 Москва, aml35@yandex.ru

Рассмотрены пять вариантов расчета скорости горения твердого топлива в зависимости от давления в твердотопливном ракетном двигателе. Для аппроксимации реальных зависимостей предложено два варианта аналитических выражений. Показано, что во всех вариантах расчета давление в двигателе может быть представлено простыми аналитическими выражениями в зависимости от параметров твердого топлива, условий заряжания и конструктивных факторов заряда и двигателя.

Ключевые слова: твердое топливо, скорость горения, ракетный двигатель.

DOI 10.15372/FGV20170510

Традиционно зависимость скорости горения твердого топлива от давления в твердотопливном ракетном двигателе (РДТТ) принято рассматривать в виде степенного закона [1]:

$$u_T = u_1^{ст} p^{\nu_{ст}}, \quad (1)$$

где $u_1^{ст}$ и $\nu_{ст}$ — постоянные величины. Что касается экспериментальных зависимостей $u_T(p)$, то они существенно отличаются от степенных. На рис. 1 приведены пять кривых $u_T(p)$. Графики 1, 2, 3, 5 заимствованы из литературных источников, кривая 4 предложена автором настоящей работы.

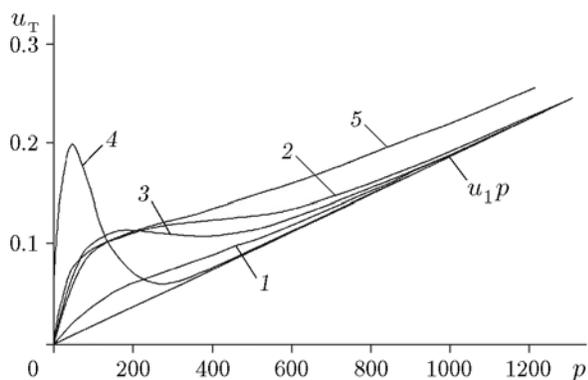


Рис. 1. Результаты расчета зависимости $u_T(p)$: кривая 1 заимствована из [2]; кривые 2 и 5 построены на основе данных [5]; кривая 3 аналогична приведенной в [5]; кривая 4 предложена автором

Как следует из анализа кривой 1 (см. рис. 1) [2], $u_T = 0$ при $p = 0$. При увеличении давления в пределах ракетного диапазона (до $30 \div 60$ МПа, к ракетам относим и активно-реактивные снаряды) скорость горения растет близко к степенному закону. В окрестности точки перегиба эту кривую можно аппроксимировать прямой. При дальнейшем увеличении давления зависимость $u_T(p)$ выходит асимптотически на прямую — одночленный закон скорости горения $u_1 p$, который выполняется уже в пределах артиллерийского диапазона давления (более 60 МПа). Видим, что кривая $u_T(p)$ — это более сложная функция, чем степенная. Ниже покажем, что данная кривая хорошо аппроксимируется функцией

$$u_T = u_1 p + a p^m e^{-np}, \quad (2)$$

где u_1 , a , m и n — положительные коэффициенты, $0 < m < 1$.

Согласно формуле (2) при $p = 0$ получаем $u_T = 0$. При $p > 0$ скорость горения топлива растет, но, так как $m < 1$, рост происходит с отрицательной второй производной. При этом экспонента e^{-np} только уменьшается. Поэтому произведение $p^m e^{-np}$, пройдя через точку максимального отклонения от асимптоты $u_1(p)$, начинает приближаться к ней. При $p \rightarrow \infty$ зависимость $u_T(p)$ стремится к одночленному закону. Из сказанного следует, что коэффициент u_1 необходимо определять за пределами ракетного диапазона давления, а в его пределах следует считать u_1 известным. Остается найти три коэффициента: a , m и n .

Перепишем формулу (2) в виде

$$u_T - u_1 p = a p^m e^{-np}.$$

Отсюда находим

$$\ln(u_T - u_1 p) = \ln a + m \ln p - np.$$

Видно, что в логарифмических координатах это линейное соотношение. К нему без проблем подходит метод наименьших квадратов [3] при обработке экспериментальных данных, полученных, например, в устройстве постоянного давления [4].

Будем рассматривать давление как безразмерную величину, отнесенную к 1 атм. Скорость горения топлива представим как отношение к ее значению, например, при $p = 500$ МПа. Тогда в ракетном диапазоне давления всегда скорость горения будет меньше единицы.

Кривой 1 на рис. 1 соответствуют коэффициенты $u_1 = 0.0002$, $a = 0.0004280$, $m = 0.99753$, $n = 0.00663044$. Кривая 1 относится к топливам без катализаторов.

Рассмотрим, как для кривой 1 изменяется параметр ν . Этот параметр появляется при варьировании сомножителей в уравнении [1]

$$S_T \rho_T u_T(p) f(T_3) = \frac{\varphi_2 B(k) F_{кр} p}{\sqrt{RT_p}}, \quad (3)$$

которое соответствует равенству прихода продуктов сгорания (левая часть равенства (3)) их расходу через сопло двигателя. Здесь S_T — поверхность горения заряда твердого топлива, ρ_T — плотность твердого топлива, T_3 — температура заряда, $f(T_3)$ — функция, характеризующая зависимость скорости горения твердого топлива от температуры заряда, $F_{кр}$ — площадь минимального (критического) поперечного сечения сопла, T_p — термодинамическая температура продуктов сгорания при постоянном давлении, R — газовая постоянная продуктов сгорания, φ_2 — коэффициент расхода, k — отношение изобарной (c_p) и изохорной (c_v) теплоемкостей, $B(k) = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{(k+1)/[2(k-1)]} \sqrt{k}$.

Из уравнения (3) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_T}{S_T} + \frac{\delta \rho_T}{\rho_T} + \frac{\delta u_T^0}{u_T} + \frac{p}{u_T} \frac{\partial u_T}{\partial p} \frac{\delta p}{p} + \frac{T_3}{f} \frac{\partial f}{\partial T_3} \frac{\delta T_3}{T_3} = \\ = \frac{\delta \varphi_2}{\varphi_2} + \frac{\delta F_{кр}}{F_{кр}} - \frac{1}{2} \frac{T_3}{RT_p} \frac{\partial RT_p}{\partial T_3} \frac{\delta T_3}{T_3} + \frac{\delta p}{p}. \end{aligned} \quad (4)$$

Обозначив согласно [1]

$$\nu = \frac{p}{u_T} \frac{\partial u_T}{\partial p}$$

(см. в (4) четвертое слагаемое справа), находим

$$\frac{\delta p}{p} = \frac{1}{1-\nu} \sum_{i=1}^6 \frac{\delta X_i}{X_i}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 \frac{\delta X_i}{X_i} = \\ = \frac{\delta S_T}{S_T} + \frac{\delta \rho_T}{\rho_T} + \frac{\delta u_T^0}{u_T} + \beta \frac{\delta T_3}{T_3} - \frac{\delta \varphi_2}{\varphi_2} - \frac{\delta F_{кр}}{F_{кр}}, \\ \beta = \frac{T_3}{f} \frac{\partial f}{\partial T_3} + \frac{1}{2} \frac{T_3}{RT_p} \frac{\partial RT_p}{\partial T_3}. \end{aligned}$$

Если для расчета u_T использовать степенной закон, то полученное значение ν будет совпадать с $\nu_{ст}$.

Рассматривая малые относительные отклонения $\frac{\delta X_i}{X_i}$ как независимые случайные величины, имеющие равные нулю математические ожидания, и используя известные значения дисперсий, для дисперсии давления получим соотношение

$$D_p = \frac{1}{(1-\nu)^2} \sum_{i=1}^6 D_i.$$

Отсюда определим среднеквадратическое отклонение σ :

$$\sigma = \frac{1}{1-\nu} \sqrt{\sum_{i=1}^6 D_i}.$$

После этого запишем формулу Соркина для предельного отклонения:

$$\frac{\Delta p}{p} \rightarrow n \sqrt{\sum_{i=1}^6 D_i}.$$

Здесь величина n зависит от вероятности, с которой определяется предельное отклонение $\Delta p/p$. Если требуемая вероятность равна 0.997, то $n = 3$, если равна 0.999, то $n = 3.3$, и т. д.

При $\nu \rightarrow 1$ имеем $\frac{\Delta p}{p} \rightarrow \infty$ при конечном значении $n\sqrt{\sum_{i=1}^6 D_i}$. Если $\nu \rightarrow 0$, то $\frac{\Delta p}{p} \rightarrow n\sqrt{\sum_{i=1}^6 D_i}$. Если же $\nu < 0$, то $\frac{\Delta p}{p} < n\sqrt{\sum_{i=1}^6 D_i}$, так как $\frac{\Delta p}{p} = \frac{n}{1+|\nu|}\sqrt{\sum_{i=1}^6 D_i}$, где $\frac{1}{1+|\nu|} < 1$.

Вернемся к анализу параметра ν . Для расчета его значения, используя формулу (2), находим выражение

$$\nu = \frac{u_1 p + ap^m(m - np)e^{-np}}{u_1 p + ap^m e^{-np}}. \quad (5)$$

С помощью коэффициентов a , m и n , соответствующих кривой 1 на рис. 1, получаем зависимость $\nu(p)$ в виде кривой 1 на рис. 2. Видно, что параметр ν сначала убывает, примерно при $p = 240$ он достигает минимума, равного 0.518, и после этого растет, стремясь к единице при $p \rightarrow \infty$. В целом значения ν достаточно велики.

Для определения давления в двигателе перепишем равенство (3) в виде

$$S_T \rho_T u_1 f(T_3) = \frac{\varphi_2 B(k) F_{кр}}{\sqrt{RT_p}} \frac{u_1 p}{u_T(p)}. \quad (6)$$

Обозначим

$$\varphi = \frac{u_1 p}{u_T(p)}. \quad (7)$$

Тогда из уравнения (6) находим

$$\varphi = \frac{S_T \rho_T u_1 f(T_3)}{\varphi_2 B(k) F_{кр}} \sqrt{RT_p} = A. \quad (8)$$

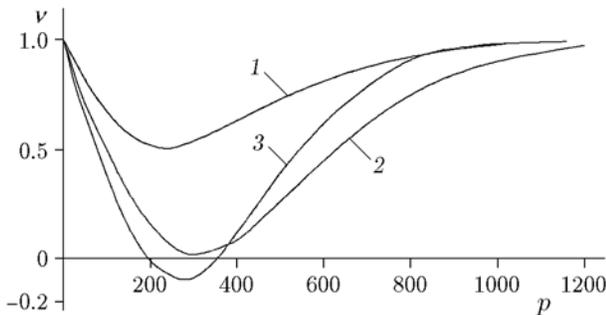


Рис. 2. Изменение параметра ν для кривых 1–3, приведенных на рис. 1

Отношение (7) с учетом (2) можно записать в виде

$$\varphi = \frac{1}{1 + ae^{-np}/u_1 p^{1-m}}. \quad (9)$$

Из выражения (9) следует, что $\varphi \rightarrow 0$ при $p \rightarrow 0$ и $\varphi \rightarrow 1$ при $p \rightarrow \infty$, т. е. функция φ изменяется в интервале от нуля до единицы. В окрестности $p = 0$ она круто растет, а при $p \rightarrow \infty$ медленно приближается к единице.

Вид зависимости $\varphi(p)$ для кривой 1 на рис. 1 в интервале давления $10 \div 200$ соответствует кривой 1 на рис. 3, а. Как видим, практически это прямая (особенно, если иметь в виду ограниченный диапазон давления для конкретного двигателя).

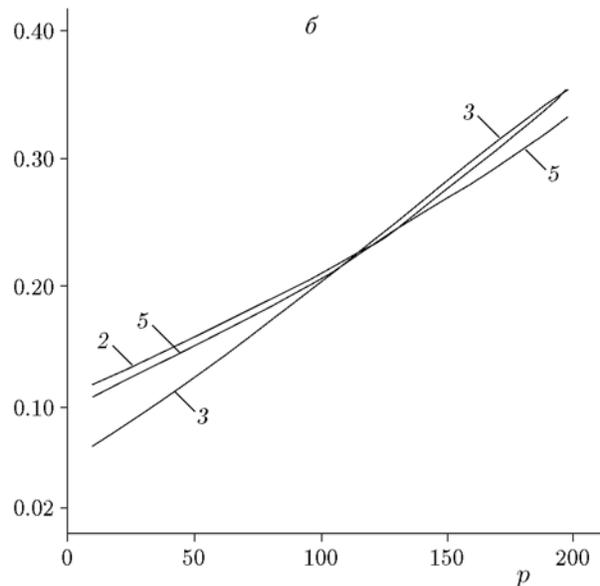
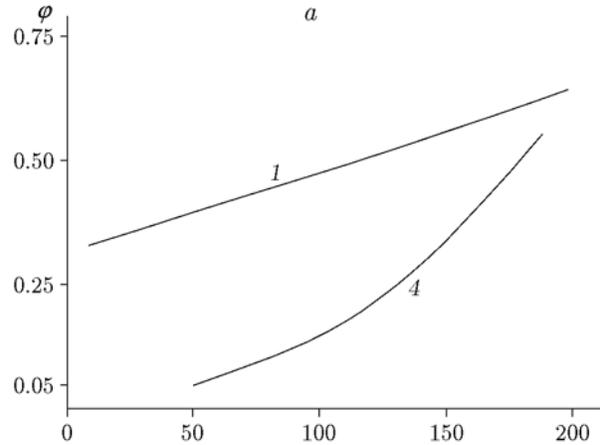


Рис. 3. Зависимости $\varphi(p)$, соответствующие (а) кривым 1, 4 и (б) кривым 2, 3, 5 на рис. 1

Обозначим через p_{\min} минимальное давление для такого двигателя, а через φ_{\min} — соответствующее ему значение φ . Тогда

$$\varphi = \varphi_{\min} + a_1(p - p_{\min}).$$

Максимальному давлению p_{\max} соответствует φ_{\max} . Теперь коэффициент a_1 можно определить по формуле

$$a_1 = \frac{\varphi_{\max} - \varphi_{\min}}{p_{\max} - p_{\min}}.$$

Тогда

$$\varphi = \varphi_{\min} + (\varphi_{\max} - \varphi_{\min}) \frac{p - p_{\min}}{p_{\max} - p_{\min}}. \quad (10)$$

Пусть $A = 0.42$, $p_{\min} = 60$, $p_{\max} = 90$, $\varphi_{\min} = 0.407$, $\varphi_{\max} = 0.452$. Приравнявая φ к A , из уравнения (10) находим

$$\bar{p} = p_{\min} + (p_{\max} - p_{\min}) \frac{A - \varphi_{\min}}{\varphi_{\max} - \varphi_{\min}}.$$

Подставляя вместо p_{\min} , p_{\max} , φ_{\min} , φ_{\max} и A их значения, получаем

$$\bar{p} = 68.67.$$

Рассмотрим кривую 2 на рис. 1 [5]. Соответствующие ей коэффициенты равны $a = 0.0017779$, $m = 0.95$, $n = 0.0060655$. Видно, что кривая 2 сначала растет интенсивно (до $p \cong 100$), а затем более медленно, асимптотически приближаясь к прямой $u_1 p$. Такое ее поведение можно объяснить природой используемого топлива или воздействием катализатора. Изменение ν для этой кривой соответствует кривой 2 на рис. 2.

При $p = 150$ имеем $\nu = 0.3$. Далее этот параметр уменьшается до $\nu \approx 0.02$ при $p = 300$, а затем начинает расти. Значения 0.3 он вновь достигает при $p = 520$. Таким образом, $0.02 \leq \nu \leq 0.3$ в интервале давления $150 \div 520$. Функция φ для этой кривой показана на рис. 3, б (кривая 2). Она тоже не очень сильно отличается от прямой, особенно если иметь в виду ограниченный диапазон давления для конкретного двигателя.

Рассмотрим кривую 3 на рис. 1. Она получена при коэффициентах $a = 0.0019085$, $m = 0.99$, $n = 0.0078707$. Зависимость $u_T(p)$ подобного вида приведена в книге [5]. Согласно данной кривой скорость горения достигает максимума примерно при $p = 180$. Соответствующая ей

зависимость $\nu(p)$ представлена на рис. 2 (кривая 3). Видно, что значение ν сначала убывает, затем при $p = 180$ этот параметр меняет знак и становится отрицательным. Но так как максимум на кривой $u_T(p)$ достаточно пологий, то наибольшее отрицательное значение производной от u_T по p будет небольшим, а следовательно, незначительным будет и модуль величины ν в отрицательной области (не выше -0.1). Тем не менее, если $\nu < 0$, то

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{n}{1 + |\nu|} \sqrt{\sum_{i=1}^6 D_i},$$

т. е.

$$\frac{\Delta p}{p} < n \sqrt{\sum_{i=1}^6 D_i},$$

а это интересный результат. Кривая для φ в данном случае (см. рис. 3, б) хотя и напоминает S-образную форму, но всё же близка к прямой.

Рассмотрим кривую 4 на рис. 1. Ей соответствуют коэффициенты $a = 0.022325$, $m = 0.8$, $n = 0.02$. Данная кривая значительно отличается от других своим выраженным максимумом. Максимальное значение $u_T = 0.2$ достигается примерно при $p = 42$, после чего скорость горения уменьшается и при $p = 260$ проходит через минимум — $u_T = 0.061$. Таким образом, в интервале давления $42 \div 260$ скорость горения уменьшается более чем в три раза. Во всем этом диапазоне давления $\nu < 0$ (рис. 4) и минимум $\nu = -1.18$ достигается при $p \cong 142$. При $p = 253$ зависимость пересекает ось абсцисс и параметр ν становится положительным. Далее с ростом давления он стремится к единице. Во всем диапазоне отрицательных значений ν пре-

дельное отклонение $\frac{\Delta p}{p}$ меньше $n \sqrt{\sum_{i=1}^6 D_i}$, при-

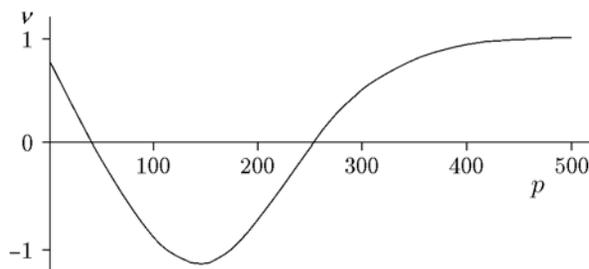


Рис. 4. Изменение параметра ν в зависимости от давления для кривой 4 на рис. 1

чем в точке $(-1.18; 142)$ меньше более чем в два раза.

Если бы удалось создать топливо с такой зависимостью скорости горения от давления, можно было бы изготовить наиболее легкий корпус РДТТ под требуемое максимальное давление, соответствующее максимальной температуре заряда.

Отношение φ для данного варианта расчета показано на рис. 3, *a* (кривая 4). С ростом давления функция φ прогрессивно увеличивается и при давлениях, характерных для каждого конкретного двигателя, может быть аппроксимирована или экспонентой

$$\varphi = \varphi_{\min} e^{k(p-p_{\min})},$$

или кривой 2-го порядка

$$\varphi = \varphi_{\min} + a_1(p - p_{\min}) + a_2(p - p_{\min})^2.$$

Рассмотрим вариант расчета с $A = 0.3$. Искомый корень будет находиться между значениями давления 140 и 150. Примем $p_{\min} = 140$, а $p_{\max} = 150$, $\varphi_{\min} = 0.283$, $\varphi_{\max} = 0.328$. Тогда $k = 0.0148$. Запишем уравнение

$$\varphi_{\min} e^{k(\bar{p}-p_{\min})} = A.$$

Отсюда, логарифмируя, получаем

$$\bar{p} = p_{\min} + \frac{1}{k} \ln \frac{A}{\varphi_{\min}}.$$

Таким образом, $\bar{p} = 143.9$, что соответствует зависимости 4 на рис. 1.

Чтобы воспользоваться кривой 2-го порядка, помимо двух точек с p_{\min} и p_{\max} необходима еще одна точка. С этой целью используем $\bar{p} = 145$, которому соответствует $\tilde{\varphi} = 0.305$. Обозначим

$$B_1 = \frac{\varphi_{\max} - \varphi_{\min}}{p_{\max} - p_{\min}}, \quad \tilde{B} = \frac{\tilde{\varphi} - \varphi_{\min}}{\bar{p} - p_{\min}}.$$

Тогда

$$a_2 = \frac{B_1 - \tilde{B}}{p_{\max} - \bar{p}}, \quad a_1 = B_1 - a_2(p_{\max} - p_{\min}).$$

Давление \bar{p} находим из квадратного уравнения

$$a_2 y^2 + a_1 y - (A - \varphi_{\min}) = 0,$$

где $y = \bar{p} - p_{\min}$. Выбирая перед корнем квадратным знак плюс, получаем $\bar{p} = 143.9$, что

совпадает с решением при использовании экспоненты.

Таким образом, для определения давления в камере РДТТ совсем не обязательно использовать приближенный степенной закон. Не сложнее рассчитывать давление, используя функцию φ и приближая ее или прямой, или параболой 2-го порядка, или экспонентой.

Возвратимся к анализу рис. 1. Здесь помимо четырех рассмотренных кривых, полученных с помощью формулы

$$u_{\tau} = u_1 p + a p^m e^{-np},$$

есть еще кривая 5. Она получена с помощью формулы

$$u_{\tau} = u_1 p + a(1 - e^{-mp})e^{-np}.$$

Кривая 5 отличается от кривой 1 тем, что в ней вместо функции $y_1 = p^m$ использована функция [6] $y_2 = 1 - e^{-mp}$. Функция y_2 , как и функция y_1 , при $p = 0$ равна нулю, но при $p \rightarrow \infty$ она стремится к единице. С использованием этой функции получить зависимость с выраженным максимумом не удастся. Зато можно получить кривую 5 с очень медленным приближением к $u_1 p$.

При построении кривой 5 были использованы следующие значения коэффициентов: $a = 0.092393$, $m = 0.034616$, $n = 0.0011214$. Соответствующий данной кривой параметр ν сначала довольно быстро убывает (рис. 5), затем изменяется очень медленно и в области давления до $p = 250$ не поднимается выше 0.3, но и не опускается ниже 0.18. Что же касается функции φ (кривая 5 на рис. 3, *b*), то характер ее изменения близок к поведению кривой 4 на рис. 1 на участке спада давления. Это значит, что проще всего такую кривую аппроксимировать экспонентой.

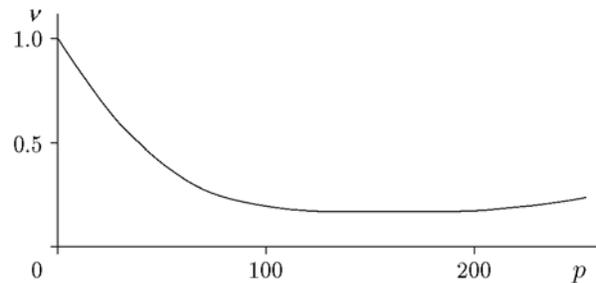


Рис. 5. Изменение параметра ν в зависимости от давления для кривой 5 на рис. 1

В итоге для аппроксимации зависимости $u_T(p)$ можно рекомендовать два выражения:

$$u_T = u_1 p + a p^m e^{-np}$$

и

$$u_T = u_1 p + a(1 - e^{-mp})e^{-np}.$$

Они отличаются тем, что в первом из них используется функция $y_1 = p^m$, а во втором — функция $y_2 = 1 - e^{-mp}$. Используя первую из них, можно описать все кривые $u_T(p)$, кроме 5; при использовании второй функции можно описать все кривые $u_T(p)$, кроме 4. Если же взять систему из двух функций $y_1(p)$ и $y_2(p)$, то задачу можно полностью решить.

Сформулируем основные выводы работы.

1. Реальные зависимости скорости горения твердого топлива от давления являются более сложными, чем степенная зависимость.

2. Используя зависимости скорости горения от давления, можно получить функцию φ , которая в ракетном диапазоне давления монотонно растет вместе с ростом давления и может быть аппроксимирована или экспонентой, или прямой, или кривой 2-го порядка.

3. С учетом вывода 2 давление в двигателе в зависимости от параметров твердого топлива, условий заряжания (температуры заряда) и конструктивных факторов заряда и двигателя может быть рассчитано с помощью выражения для реальной зависимости скорости горения от давления.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Соркин Р. Е.** Теория внутрикамерных процессов в ракетных системах на твердом топливе. — М.: Наука, 1983.
2. **Абугов Д. И., Бобылев В. М.** Теория и расчет твердотопливных ракетных двигателей. — М.: Машиностроение, 1987.
3. **Вентцель Е. С.** Теория вероятностей. — М.: Наука, Физматгиз, 1969.
4. **Внутренняя баллистика РДТТ** / под ред. А. М. Липанова, Ю. М. Милехина. — М.: Машиностроение, 2007.
5. **Жегров Е. Ф., Милехин Ю. М., Берковская Е. В.** Химия и технология баллистических порохов твердых ракетных и специальных топлив. — М.: РИЦ МГУП им. И. Федорова, 2011.
6. **Липанов А. М.** Скорость горения твердого топлива как функция давления // Физика горения и взрыва. — 2013. — Т. 49, № 3. — С. 283–287.

*Поступила в редакцию 30/XI 2016 г.,
в окончательном варианте — 26/XII 2016 г.*