

**О ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ В НЕКРУГОВЫХ ЦИЛИНДРАХ
ПРИ НАЛИЧИИ ПЕРЕПАДА ДАВЛЕНИЯ**

Г. И. Быковцев, А. Д. Чернышов

(Воронеж)

Вязко-пластические течения в некруговых цилиндрах без перепада давления обсуждаются в работах [1-3]. Ниже находится частное решение задачи о течении вязко-пластического материала в некруговом цилиндре параллельно его образующим под действием постоянного перепада давления.

При движении вязко-пластической среды под действием постоянного перепада давления в области, ограниченной цилиндрической поверхностью, образуется жесткое ядро, которое движется с постоянной скоростью.

Введем подвижную систему координат, жестко связанную с ядром. Ось z направим параллельно образующим цилиндра, а оси x и y расположим в плоскости его поперечного сечения. Скорость $w(x, y)$ каждой частицы среды будет направлена вдоль положительного направления оси z и скорость сдвига всюду будет положительна.

Для тела Бингама [4] напряжения τ_{xz} и τ_{yz} выражаются через скорости деформаций ϵ_{xz} и ϵ_{yz} по формулам

$$\tau_{xz} = \frac{k + \mu\gamma}{\gamma} \epsilon_{xz}, \quad \tau_{yz} = \frac{k + \mu\gamma}{\gamma} \epsilon_{yz}$$

$$\gamma = \sqrt{\epsilon_{xz}^2 + \epsilon_{yz}^2} \quad (1)$$

где k — предел текучести, μ — коэффициент вязкости.

Скорости деформаций связаны со скоростями перемещений соотношениями

$$\epsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \epsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2)$$

Уравнение равновесия запишем в виде

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = p \quad (3)$$

Сохраняя прежние обозначения, перейдем к безразмерным величинам. Отнесем линейные размеры к величине k/p , скорости — к $k^2/p\mu$, а напряжение — к пределу текучести k . Учитывая равенства (1), уравнение (3) можно записать в виде

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial \gamma}{\partial y} \sin \varphi + (1 + \gamma) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sin \varphi \right) = 1 \quad (4)$$

Здесь φ — угол наклона вектора γ к оси x . Исключая w из (2), получаем

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y} \cos \varphi - \gamma \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \sin \varphi - \gamma \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

Сделаем следующую замену:

$$X(\gamma, \varphi) = x(\gamma, \varphi) \cos \varphi + y(\gamma, \varphi) \sin \varphi, \quad Y(\gamma, \varphi) = y(\gamma, \varphi) \cos \varphi - x(\gamma, \varphi) \sin \varphi \quad (6)$$

Производя в уравнениях (4) и (5) эту замену независимых переменных и искомых функций, получаем два уравнения для определения X и Y

$$\frac{\partial Y}{\partial \varphi} + X + (1 + \gamma) \frac{\partial X}{\partial \gamma} = \frac{\partial X}{\partial \gamma} \frac{\partial Y}{\partial \varphi} - \frac{\partial Y}{\partial \gamma} \frac{\partial X}{\partial \varphi} + \frac{\partial X}{\partial \gamma} X + \frac{\partial Y}{\partial \gamma} Y$$

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \gamma} \gamma Y = 0 \quad (7)$$

Решение уравнений (7) будем искать в виде

$$X = 2\gamma u(\varphi) + v(\varphi), \quad Y = \gamma u'(\varphi) + v'(\varphi) \quad (8)$$

Подставляя (7) в (6) и приравнявая члены с одинаковыми степенями γ , получаем два уравнения для определения u и v

$$u'' + 4u = 4u^2 + 2uu'' - (u')^2, \quad v'' + v = -\frac{2u}{1 - 2u} \quad (9)$$

Общее решение первого уравнения (9) имеет вид

$$u = a \cos 2(\varphi + \alpha) + b \quad (a = \pm \sqrt{b^2 - b}) \quad (10)$$

Не уменьшая общности, в дальнейшем будем считать

$$a = \text{sign } b \sqrt{b^2 - b} \quad (11)$$

Из второго уравнения (9) найдем

$$v = C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi + 1 + \sin \varphi (J_1) + \cos \varphi J_2 \quad (12)$$

$$J_1 = \frac{1}{8a \sqrt{A}} \ln \left| \frac{\sqrt{A} + \sin \varphi}{\sqrt{A} - \sin \varphi} \right|, \quad J_2 = \frac{1}{4a \sqrt{B}} \text{arctg} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{B}} \quad (13)$$

$$A = \frac{2b + 2a - 1}{4a}, \quad B = \frac{2b - 2a - 1}{4a}$$

Из (6) следует, что изменение величин C_1 и C_2 равносильно переносу начала координат x, y в точку $x = C_1, y = C_2$, а изменение величины a в (11) равносильно повороту осей x и y на угол α , поэтому в дальнейшем эти постоянные полагаются равными нулю.

Подставляя значения для X и Y в (6), получаем решение уравнений (7) в виде

$$x = (2\gamma u + v) \cos \varphi - (\gamma u' + v') \sin \varphi, \quad y = (2\gamma u + v) \sin \varphi + (\gamma u' + v') \cos \varphi \quad (14)$$

Используя выражения (2) для ε_{xz} и ε_{yz} , получим

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy = \gamma \cos \varphi dx + \gamma \sin \varphi dy \quad (15)$$

Из соотношений (6) имеем

$$x = X \cos \varphi - Y \sin \varphi, \quad y = Y \cos \varphi + X \sin \varphi \quad (16)$$

Подсчитывая из соотношений (16) значения dx и dy , получим

$$dw = \gamma dX - \gamma Y d\varphi \quad (17)$$

Подставляя (8) в (17) и учитывая, что $w = 0$ на границе жесткого ядра при $\gamma = 0$, найдем

$$w = \gamma^2 u \quad (18)$$

Так как на контуре трубы $w = w_0$, то из (18) получаем зависимость $\gamma = \gamma(\varphi)$ на контуре трубы

$$\gamma = \frac{\sqrt{w_0}}{\sqrt{a \cos 2\varphi + b}} \quad (19)$$

Определение в параметрической форме координат $x_1(\varphi), y_1(\varphi)$ профилей труб, для которых применимо построенное решение, определяется из (14) и (19)

$$x_1 = 2 \sqrt{w_0(a \cos 2\varphi + b)} \cos \varphi + \frac{2a \sqrt{w_0} \sin \varphi \sin 2\varphi}{\sqrt{a \cos 2\varphi + b}} + \cos \varphi + J_2 \quad (20)$$

$$y_1 = 2 \sqrt{w_0(a \cos 2\varphi + b)} \sin \varphi - \frac{2a \sqrt{w_0} \cos \varphi \sin 2\varphi}{\sqrt{a \cos 2\varphi + b}} + \sin \varphi + J_1$$

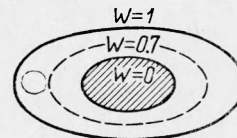
Уравнение контура ядра в параметрической форме получим из (14), полагая $\gamma = 0$, в виде

$$x_0 = \cos \varphi + J_2, \quad y_0 = \sin \varphi + J_1 \quad (21)$$

Полученные частные решения уравнений (7) можно применять для изучения некоторых особенностей течений вязкопластической среды в цилиндрической области замкнутого и незамкнутого профилей под действием постоянного перепада давления.

Для контуров трубы и ядра (20) и (21) оси координат x, y являются осями симметрии.

Из (20) и (11) заметим, что при $b \geq 1$ и $a^2 = b^2 - b$ контуры поперечных сечений трубы и ядра всегда замкнуты (фиг. 1). При $b = 1$ и $a = 0$ получаем решения для течения материала в круглой трубе под действием перепада давления.



Фиг. 1

Если $a = \delta \geq 0$, где δ мало, то, разложив (20) и (21) по параметру δ , найдем

$$\begin{aligned} x_1 &= (1 + \sqrt{w_0}) (2 + \delta) \cos \varphi + \delta \sqrt{w_0} \sin \varphi \sin 2\varphi + \dots \\ y_1 &= (1 + \sqrt{w_0}) (2 - \delta) \sin \varphi + \dots \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} x_0 &= (2 + \delta) \cos \varphi + \dots \\ y_0 &= (2 - \delta) \sin \varphi + \dots \end{aligned} \quad (23)$$

В этом случае контур ядра имеет форму эллипса, а контур поперечного сечения трубы — форму овала.

Если $b < 0$ и $a = -\sqrt{b^2 - b}$, то получаем решение задачи о течении вязко-пластической среды под действием постоянного перепада давления в области, клинообразной в плане (фиг. 2).

Для удобства перенесем начало координат вдоль оси y на величину $\beta = J_2(\varphi_1) \operatorname{ctg} \varphi_1 + J_1(\varphi_1) + \operatorname{csc} \varphi_1$. Тогда в выражениях (14), (20) и (21) из координаты y следует вычесть β . Теперь неподвижный контур S_1 представляет собой две пересекающиеся прямые, уравнения которых

$$\begin{aligned} y &= -x \operatorname{ctg} \varphi_1 & y &= -x \operatorname{ctg} \varphi_2 \\ \varphi_1 &= \frac{1}{2} \arccos(-b/a), & \varphi_2 &= \pi - \varphi_1 \end{aligned} \quad (24)$$

Область ABC , прилегающая к вершине клина, находится в жестком состоянии. Уравнение линии, ограничивающей эту область, определяется равенством (21) при

$$\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \quad (25)$$

Координаты точки A сопряжения застойной зоны с областью течения найдем из (21) при $\varphi = \varphi_1$. Получим

$$x = \cos \varphi_1 + J_2(\varphi_1), \quad y = \sin \varphi_1 + J_1(\varphi_1) - \beta \quad (26)$$

Из (21) при $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ найдем координаты точки B

$$x = 0, \quad y = J_1(\frac{1}{2}\pi) - \beta$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что застойная зона ABC в точках A и C плавно сопрягается с прямыми (24).

При $b \rightarrow -\infty$ угол $\varphi_1 \rightarrow \frac{1}{2}\pi$ и точки A , B и C стремятся к началу координат, т. е. при увеличении угла раствора клина застойная зона в его вершине уменьшается до нуля. Линейные размеры застойной зоны пропорциональны величине k/p , а ее площадь пропорциональна величине k^2/p^2 .

Продолжение решения в жесткую зону осуществляется по формулам (14), так как точкам области ABC соответствует отрицательное значение γ , и, следовательно, напряжения в этой области удовлетворяют уравнениям равновесия и не превышают предела текучести.

Построенное решение имеет место только для тупого клина раствором $\arccos(-b/a)$.

На фиг. 2 пунктиром показаны линии $w = \text{const}$, на бесконечности эти линии асимптотически стремятся к контуру.

Необходимо отметить, что уравнения замкнутых контуров, для которых имеют место построенные выше решения, зависят от величины перепада давления. Исключение представляет случай течения в области, клинообразной в плане, где в результате переноса начала координат по оси y можно сделать геометрию контура S_1 неизменной.

Поступила 4 V 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Oldrond J. G. Rectilinear plastic flow of a Bingham Solid, Proc. Cambridge Philos. Soc. 1948, Vol. 44, p. 2.
2. Мясников В. П. Некоторые точные решения для прямолинейных движений вязко-пластической среды. ПМТФ, 1961, № 2.
3. Мирзаянзаде А. Х. Некоторые вопросы вязко-пластических жидкостей в применении к нефтедобыче. Изд. Азнефть, Баку, 1959.
4. Bingham E. C. Fluidity and Plasticity Mc. Gray — Hill Book Company. Inc. New York. № 4, 1922, p. 215—218.