

ОСОБЕННОСТИ РАДИАЦИОННОГО ОСТЫВАНИЯ
ПЛОТНОЙ ПЛАЗМЫ С БОЛЬШИМ β

Г. Е. Векштейн

(Новосибирск)

В обсуждаемых в настоящее время квазистационарных термоядерных системах с плотностью плазмы $n \sim 10^{17} - 10^{18} \text{ см}^{-3}$ обеспечение отрыва плазмы от стенок при помощи магнитного поля технически очень сложно, так как требует создания мегагауссных магнитных полей. Одна из возможностей состоит в удержании плазмы стенками сосуда и использовании магнитного поля только для подавления поперечной теплопроводности плазмы [1], что может быть достигнуто уже при достаточно умеренных магнитных полях (таких, что $\beta = 16\pi nT/H^2 \gg 1$). Кроме очевидных особенностей, связанных с непосредственным контактом плазмы со стенками, при таком (немагнитном) удержании появляются существенные отличия и в поведении плазмы во всем ее объеме. Пусть плазма находится в длинной цилиндрической трубе радиуса R . Поскольку представляющие практический интерес времена удержания много больше инерционного времени R/c_s (c_s — скорость звука), то в плазме с $\beta \gg 1$ газокинетическое давление $p = 2nT$ должно быть в каждый момент времени однородно по сечению трубы. Поэтому плотность плазмы у относительно холодных стенок будет намного выше плотности в центре системы. Это может привести к резкому возрастанию роли тормозного излучения, свободно уходящего из плазмы, так как объемная мощность излучения Q_r , пропорциональная $n^2 T^{1/2}$, при условии $T \sim n^{-1}$ растет как $n^{3/2}$ с увеличением плотности плазмы. Уменьшение при этом энергетического времени жизни плазмы могло бы сделать немагнитное удержание в принципе неприемлемым, так как у термоядерной плазмы с температурой $T \sim 10^4 \text{ эВ}$ даже для $D - T$ -смеси время радиационного остывания $\tau_r = 3nT/Q_r$ всего лишь в 30 раз больше необходимого времени удержания, следующего из критерия Лоусона.

Пусть в начальный момент времени в центре имеется горячая плазма с температурой T_0 , плотностью n_0 и магнитным полем H_0 , направленным вдоль трубы. Температуру плазмы у стенок будем считать равной нулю. В центре горячая плазма сильно замагничена, так что величина $\delta_0 = \omega_{Hi}\tau_i \gg 1$ (ω_{Hi} — ионная циклотронная частота, τ_i^{-1} — частота ионных столкновений), но магнитное давление мало: $\beta_0 = 16\pi n_0 T_0 / H_0^2 \gg 1$. Задача состоит в определении времени τ_E , в течение которого плазма потеряет заметную часть своей начальной энергии $W_0 \sim n_0 T_0 R^2$ (рассматриваются только поперечные потери энергии, так что все величины относятся к единице длины системы). Источники тепловых потерь — излучение и поперечная теплопроводность плазмы. Так как в плазме с большим β давление $2nT$ остается все время однородным, то при остывании такой плазмы обязательно будет происходить ее перераспределение по сечению,

т. е. возникнет радиальное течение плазмы. Изменение параметров плазмы во времени описывается при этом уравнениями [2]

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial r} (nT) = 0, \quad \frac{dn}{dt} + \frac{n}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) = 0;$$

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{H}{n} \right) = \frac{c^2}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{\sigma_{\perp}} \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{c}{er} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\beta_{\perp}^{uT}}{n} \frac{\partial T}{\partial r} \right);$$

$$(3) \quad 3n \frac{dT}{dt} - 2T \frac{dn}{dt} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\kappa_{\perp} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{c\beta_{\perp}^{uT}}{4\pi ne} \frac{\partial H}{\partial r} \right) - Q_r,$$

где v — радиальная скорость течения плазмы; κ_{\perp} , σ_{\perp} — теплопроводность и проводимость плазмы поперек магнитного поля; β_{\perp}^{uT} — коэффициент, определяющий поперечную к ∇T и H составляющую термосилы. Объемная мощность тормозного излучения из плазмы

$$Q_r = bn^2 T^{1/2} \approx 10^{-13} n^2 T^{1/2},$$

где Q , эВ/см³·с; n , см⁻³; T , эВ. В уравнении баланса тепла (3) опущены несущественные слагаемые, связанные с вязкой и омической диссипацией энергии.

Поскольку полное решение системы уравнений (1) — (3) можно получить лишь численным интегрированием, проведем качественный анализ различных режимов остывания плазмы. Очевидно, что для очень малых размеров системы (при R , стремящемся к нулю) излучением из плазмы можно пренебречь. Энергетическое время жизни плазмы в этом случае будет порядка R^2/χ_0 , где $\chi_0 \sim cT_0/eH_0\delta_0$ — температуропроводность замагниченной горячей плазмы [2]. С другой стороны, при больших R τ_E ограничено сверху радиационным временем остывания горячей плазмы $\tau_0 = 3n_0 T_0 / bn_0^2 T_0^{1/2}$.

Существует область радиусов, когда потери энергии из системы определяются излучением из тонкого слоя (с толщиной, много меньшей R) холодной пристеночной плазмы, причем время остывания τ_E в этом случае много меньше как τ_0 , так и диффузионного времени R^2/χ_0 . Остывание горячей плазмы происходит при этом за счет конвективного потока тепла от центра к стенкам, т. е. из-за адиабатического расширения горячей плазмы. Возникающее течение плазмы можно описывать следующим образом. Пристеночный слой плазмы с низкой температурой быстро остывает из-за излучения и сжимается (так как давление плазмы должно быть однородно). Теплопроводность приводит к отбору тепла у следующего слоя плазмы, который остывает, сжимается и т. д. Поскольку толщина слоя плотной остывшей плазмы мала по сравнению с радиусом трубы, то горячая плазма как бы «съедается» стенками.

Скорость расширения горячей плазмы можно найти из решения следующей модельной задачи. Пусть параметры плазмы зависят от одной координаты x (при малой по сравнению с R толщине переходного слоя от горячей к остывшей плазме движение плазмы можно считать одномерным). При $x = -\infty$ имеется горячая плазма, а при $x = +\infty$ — остывшая. Если пренебречь излучением горячей плазмы (что оправдано при $\tau_E \ll \tau_0$), то по плазме будет распространяться стационарная «волна остывания», связанная с излучением из переходного слоя, причем конвективный поток тепла из горячей плазмы должен компенсировать полную излучаемую энергию. Для нахождения профиля такой волны в уравнениях (1) — (3) удобно перейти к безразмерным переменным. За единицы плотности, температуры и напряженности магнитного поля примем соответственно n_0 , T_0 и H_0 . Длину будем измерять в единицах $(\chi_0 \tau_0)^{1/2}$,

а скорость $-(\chi_0/\tau_0)^{1/2}$. Для стационарного течения из (1) получим (4)

$$T = n^{-1}, \quad nv = v_0$$

(v_0 — скорость горячей плазмы). В плазме с большим β вмороженность магнитного поля нарушается главным образом из-за действия термосилы (второй член в правой части уравнения (2)). Но в данном случае ею можно пренебречь и считать магнитное поле вмороженным в плазму

$$(5) \quad H = n$$

(параметром является большой множитель $(M/m)^{1/2}$ в температуропроводности χ_0 замагниченной горячей плазмы). При условии (5) параметр замагниченности плазмы $\delta = \omega_{Hi}\tau_i$ зависит только от температуры и равен $\delta_0 T^{3/2}$. При $T > \delta_0^{-2/3}$ плазма замагничена, и уравнение (3) в безразмерных переменных записывается в виде

$$(6a) \quad 5v_0 \frac{dT}{dx} = \frac{d}{dx} \left(T^{-1/2} \frac{dT}{dx} \right) - T^{-3/2}$$

(здесь учтены условия (4), (5) и опущена малая добавка в потоке тепла, возникающая из-за термосилы). При $\delta < 1$, т. е. при $T < \delta_0^{-2/3}$, магнитное поле не влияет на теплопроводность плазмы* и вместо (6a) получаем

$$(6b) \quad 5v_0 \frac{dT}{dx} = \delta_0^2 \frac{d}{dx} \left(T^{5/2} \frac{dT}{dx} \right) - T^{-3/2}.$$

Интегрируя уравнения (6a), (6b) по координате и пренебрегая диффузионным потоком тепла в холодную плазму (условие $\tau_E \ll R^2/\chi_0$), находим, что

$$(7) \quad v_0 = \frac{1}{5} \int_{-\infty}^{+\infty} T^{-3/2} dx$$

(излучение горячей и остывшей плазмы «выключено», а вклад в интеграл (7) дает только переходная область).

Для оценки v_0 рассмотрим отдельно область высоких температур (назовем ее областью 1), где излучение несущественно, а конвективный и диффузионный потоки тепла уравновешивают друг друга, и область низких температур (область 2), где можно пренебречь конвективным потоком тепла. Оценивая по порядку величины dT/dx как T/l , из (6a) в области 1 имеем

$$(8) \quad v_0 T/l \sim T^{1/2}/l^2, \quad l \sim 1/v_0 T^{1/2}.$$

Сравнивая теперь члены в правой части (6a), находим границу T_1 областей 1 и 2: $T_1 \sim v_0^{-2/3}$ (как будет видно из дальнейшего, $T_1 \gg \delta_0^{-2/3}$, так что вся область 1 описывается уравнением (6a)). В области 2 при $T > \delta_0^{-2/3}$ из (6a) следует

$$(9) \quad T^{1/2}/l^2 \sim T^{-3/2}, \quad l \sim T;$$

при $T < \delta_0^{-2/3}$ из (6b)

$$(10) \quad \delta_0^2 T^{7/2}/l^2 \sim T^{-3/2}, \quad l \sim \delta_0 T^{5/2}.$$

Теперь при помощи (8) — (10) можно оценить интеграл (7), определяю-

* Для простоты не рассматриваем узкую область температур, где происходит переход от ионной к электронной теплопроводности.

щий v_0 . Основной вклад дает область температур $T \sim \delta_0^{-2/3}$, где величина $\omega_{Hi}\tau_i \sim 1$,

$$(11) \quad v_0 \sim \int T^{-3/2} dx \sim \int dT l(T) T^{-5/2} \sim \delta_0^{1/3}.$$

В приведенных вычислениях полностью пренебрегали магнитным давлением по сравнению с газокINETическим давлением плазмы. Но сколь велико ни было бы β_0 , при замороженном в плазму магнитном поле магнитное давление растет с уменьшением температуры и при достаточно малом T станет больше давления плазмы. Из условия однородности полного давления можно подсчитать, что условие $n = T^{-1}$ будет выполняться до температур $T \sim \beta_0^{-1/2}$. При меньших температурах n и H уже не меняются. Отсюда видно, что оценка (11) справедлива, если $\beta_0^{1/2} \geq \delta_0^{2/3}$. В противоположном случае, который обычно и осуществляется для практически интересных параметров плазмы (так, например, при $n_0 \sim 10^{18} \text{ см}^{-3}$, $T_0 \sim 10 \text{ кэВ}$, $H_0 \sim 10^5 \text{ Гс}$, $\beta_0 \sim 10^2$, $\delta_0 \sim 10^3$), основной вклад в излучение вносит область температур $T \sim \beta_0^{-1/2}$. При этом скорость расширения горячей плазмы $v_0 \sim \beta_0^{1/4}$.

Для энергетического времени жизни горячей плазмы получаем теперь, возвращаясь к размерным величинам, оценку

$$(12) \quad \tau_E \sim \beta_0^{-1/4} R (\tau_0/\chi_0)^{1/2}.$$

Интересно отметить, что время остывания горячей плазмы оказывается пропорциональным радиусу системы R . Очевидно, что такой режим остывания осуществляется, если оцененная по формуле (12) величина τ_E меньше как R^2/χ_0 , так и τ_0 . Это условие дает следующий интервал поперечных размеров*:

$$\beta_0^{-1/4} (\chi_0 \tau_0)^{1/2} \leq R \leq \beta_0^{1/4} (\chi_0 \tau_0)^{1/2}.$$

Качественный вид зависимости времени τ_E от R при различных режимах остывания плазмы изображен на фиг. 1. Применяя полученные результаты к плазме с термоядерными параметрами и учитывая, что необходимое время удержания энергии в этом случае порядка $\tau_0/30$, можно получить, что при $\beta_0 < 30^2 \approx 10^3$ излучение не играет существенной роли в энергобалансе плазмы. В результате величина τ_E остается порядка R^2/χ_0 , что и было обнаружено ранее при численных расчетах параметров термоядерного реактора с немагнитным удержанием [4,5]. При $\beta_0 \geq 10^3$ отмеченный эффект возрастания полного излучения заметно уменьшает время остывания плазмы. В качестве примера приведем результаты интегрирования на ЭВМ системы уравнений (1) — (3) для этого случая.

Конкретно решалась следующая задача. В начальный момент времени однородная плазма с плотностью $n = 3 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ находится в трубе с радиусом $R = 17 \text{ см}$. Магнитное поле также однородно и равно 10^5 Гс . Затем включается внешний источник нагрева плазмы с характерной длительностью $\Delta t = 6 \cdot 10^{-5} \text{ с}$. Нагрев сопровождается вытеснением плазмы и магнитного поля из центра к стенкам (заметим, что при численном интегрировании вместо первого из уравнений (1) удобнее использовать уравнение движения плазмы). В момент времени $t_1 = 4,4 \cdot 10^{-4} \text{ с}$, когда источ-

* Отметим, что стационарная «волна остывания», моделирующая поведение плазмы в определенном интервале параметров системы, существенно зависит от граничных условий, которые должны определяться из конкретной постановки задачи. Неправильный выбор этих граничных условий привел к ошибочным результатам, полученным в работе [3].

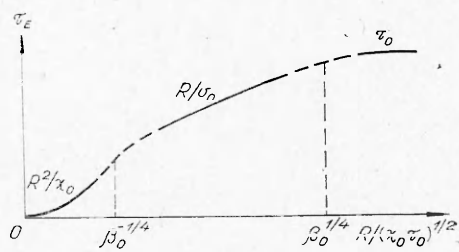
ник можно считать уже выключенным, распределение по радиусу температуры, плотности и магнитного поля показано на фиг. 2. При этом в центре параметры плазмы таковы: $n_0 = 7,5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$, $H_0 = 2,5 \cdot 10^4 \text{ Гс}$, $T_0 = 27 \text{ кэВ}$, так что величина $\beta_0 = 2,7 \cdot 10^3$. Давление магнитного поля оказывается существенным лишь в тонком слое непосредственно у стенки, где $\beta \ll 1$. Характерное время, связанное с теплопроводностью, $R^2/\chi_0 \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ с}$, а радиационное время $\tau_0 \approx 6,4 \cdot 10^{-3} \text{ с}$. Поэтому, согласно приведенным выше оценкам, можно ожидать, что для времени остывания плазмы τ_E в этом случае будет справедлива оценка (12).

На фиг. 3 показано изменение со временем температуры и плотности плазмы в центре, начиная с $t = t_1$. Видно, что остывание плазмы близко к адиабатическому. Средняя по сечению объемная мощность излучения примерно в 12 раз превышает мощность излучения в центре, а диффузионный поток тепла на стенку втрое меньше полного излучения из плазмы. К моменту времени $t_2 = 6,8 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ энергия плазмы составляет половину начальной (при $t = t_1$), так что энергетическое время $\tau_E = 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ (по оценке (12) $\beta_0^{-1/4} R (\tau_0/\chi_0)^{1/2} \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ с}$).

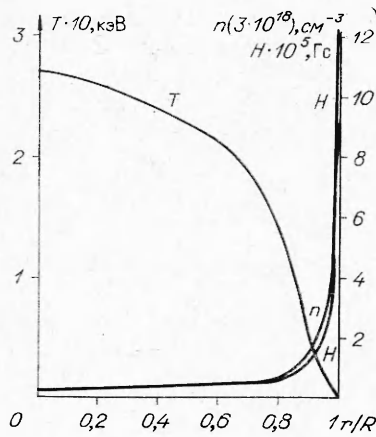
Особенности излучения из плазмы с большим β проявляются и в стационарной постановке задачи, когда потери тепла из плазмы компенсируются внешним источником нагрева. Пусть в начальный момент времени имеется холодная плазма, однородно заполняющая все сечение трубы. Плотность плазмы \bar{n} , напряженность магнитного поля \bar{H} . Включим постоянный внешний источник нагрева с характерной объемной мощностью Q_H . Вопрос состоит в том, может ли при достаточно большом Q_H установиться стационарное состояние плазмы с $\beta \gg 1$. Будем считать, что замороженность магнитного поля в плазму не нарушается за время установления стационарного состояния. Тогда из полученных выше оценок следует, что при $R > \beta_0^{-1/4} (\chi_0 \tau_0)^{1/2}$ теплопроводность горячей плазмы, которая занимает основную часть объема и получает почти всю энергию внешнего источника, не может уравновесить излучение из холодного пристеночного слоя, так что стационарное состояние оказывается невозможным. Найдем, какие условия это налагает на начальные параметры системы \bar{n} , \bar{H} и R . Величины χ_0 , τ_0 и β_0 зависят от плотности и температуры плазмы в центре, n_0 , T_0 , которые в стационарном состоянии определяются из условия сохранения числа частиц и условия баланса энергии. Последнее в этом случае, очевидно, записывается в виде

$$Q_H R^2/\chi_0 \sim n_0 T_0.$$

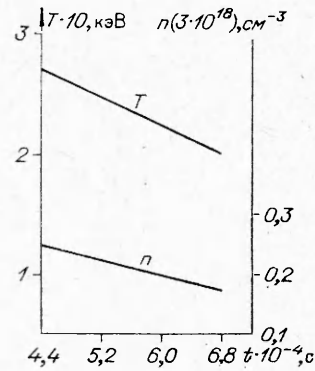
Для нахождения профиля плотности в стационарном состоянии необходимо решить уравнение, подобное (6а), где вместо конвективного потока тепла будет стоять Q_H . Простые оценки, аналогичные уже приводившимся выше, показывают, что $n_0 \sim \beta_0^{-1/4} \bar{n}$ (соответственно $H_0 \sim \beta_0^{-1/4} \bar{H}$). Если теперь учесть, что температуропроводность горячей плазмы $\chi_0 \sim Mc^2 an_0/e^2 H_0^2 T_0^{1/2}$ (здесь введена явно частота ионных столкновений $\nu_i = an/T^{3/2}$), то условие существования стационарного решения оказывается не зависящим от



Ф и г. 1



Ф и г. 2



Ф и г. 3

мощности нагрева Q_H и начальной плотности плазмы \bar{n} и принимает вид

$$\bar{H}R < (Mc^2a/e^2b)^{1/2} \approx 10^5 \text{ Гс} \cdot \text{см.}$$

Параметры горячей плазмы в стационарном состоянии:

$$T_0 \sim Q_H^2 \bar{H}^4 R^4 / \bar{n}^4 (Mc^2a/e^2), \quad H_0 \sim n_0 \bar{H} / \bar{n},$$

$$n_0 \sim \bar{n}^2 (Mc^2a/e^2)^{2/3} / Q_H^{2/3} \bar{H}^{2/3} R^{4/3}.$$

В заключение отметим, что отмеченные особенности радиационного остывания плазмы с большим β связаны с конкретной зависимостью классической кулоновской теплопроводности плазмы от магнитного поля, температуры и плотности плазмы. В случае, например, боровской теплопроводности, когда $\chi \sim cT/eH$, этих особенностей нет.

Автор благодарен Д. Д. Рютову за обсуждение работы и П. З. Чеботаеву за проведение численных расчетов на ЭВМ.

Поступила 6 V 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Budker G. J. Thermonuclear fusion in installations with a dense plasma.— In: Proc. VI Europ. conf. on plasma physics and controlled thermonuclear fusion. Vol. 2. Moscow, 1973, p. 136.
2. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме.— В кн.: Вопросы теории плазмы. Т. 1. М., Атомиздат, 1963.
3. Алиханов С. Г., Глушков И. С. Стационарная волна охлаждения в замагниченной плазме.— «Докл. АН СССР», 1976, т. 226, с. 547.
4. Chebotaev P. Z., Ryutov D. D., Spector M. D., Vekstein G. E. The dynamics of cooling of a dense wall-confined plasma.— In: Proc. VI Europ. conf. on plasma physics. Vol. 1. Moscow, 1973, p. 411.
5. Векштейн Г. Е., Рютов Д. Д., Спектор М. Д., Чеботаев П. З. Немагнитное удержание плотной плазмы.— ПМТФ, 1974, № 6, с. 3.