

## РАСЧЕТ ДИСКОВ НА РЕЛАКСАЦИЮ

С. А. Шестериков

(Москва)

В данной заметке рассмотрена задача о релаксации напряжений, возникших в свободном диске при неравномерном поле температуры.

Исследуется диск радиуса  $b$ , имеющий отверстие радиуса  $a$ . В момент времени  $t = 0$  в диске создается температурное поле

$$T = [T(b) - T(a)] \frac{\ln(r/b)}{\ln(b/a)} + T(b) \quad (1)$$

Здесь принято, что температура  $T(r)$  зависит только от радиуса  $r$  и не зависит от времени. Выражение (1) является решением уравнения теплопроводности в случае, когда  $T$  не зависит от времени.

В этом случае в диске возникает поле упругих температурных напряжений, которое считаем известным [1]. Если температура  $T$  достаточно большая, то материал диска начнет ползти и напряжения будут релаксировать.

Примем закон ползучести в форме течения в виде [2]

$$\dot{p}_{ij} = f(p, \sigma_i^2) S_{ij}, \quad \dot{p} = f(p, \sigma_i^2) \sigma_i \quad (2)$$

где  $p$  и  $\sigma_i$  — интенсивности пластической деформации и напряжений, соответственно,  $p_{ij}$  — тензор скоростей пластических деформаций,  $S_{ij}$  — девиатор тензора напряжений.

Точное решение задачи может быть получено, если удовлетворены соотношения (2), уравнение равновесия

$$\frac{1}{h} \frac{\partial h \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0 \quad (3)$$

условие совместности

$$\frac{\partial r \varepsilon_\varphi}{\partial r} = \varepsilon_r \quad (4)$$

и граничные условия для свободного диска

$$\sigma_r(a) = \sigma_r(b) = 0 \quad (5)$$

Здесь  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\varphi$  — радиальные и тангенциальные составляющие напряжений и деформаций соответственно,  $h$  — толщина диска. Такое решение можно получить, пользуясь методами численного интегрирования. Здесь дадим приближенное решение, используя вариационные методы в ползучести. В работе [3] сформулирован принцип минимума мощности вариаций напряжений на истинных скоростях для среды, подчиняющейся соотношениям (2). В случае, когда  $\sigma_i$  ищется как функция неопределенных параметров  $a_k$ , этот метод приводит к системе уравнений

$$\iiint_V \left( 2f \sigma_i \frac{\partial \sigma_i}{\partial a_k} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial a_k} \right) dv = 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (6)$$

Здесь

$$\Pi = \frac{3}{2} K \sigma^2 + \frac{1}{2G} \sigma_i^2 \quad \left( \sigma = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \right) \quad (7)$$

В качестве первого приближения для напряжений примем

$$\sigma_r = \tau(t) \sigma_{r0}, \quad \sigma_\varphi = \tau(t) \sigma_{\varphi0}, \quad \sigma_i = \tau(t) \sigma_{i0}$$

где  $\sigma_{r0}$  и  $\sigma_{\varphi0}$  определяются упругим решением задачи. Второе соотношение из (2) примем в виде

$$\dot{p} = A \sigma_i^n p^{-\alpha} \quad (8)$$

Отсюда получим для  $p$  выражение:

$$p = A^{\frac{1}{\alpha+1}} \sigma_{i0}^{\frac{n}{\alpha+1}} \left[ \int_0^t \tau(t) dt \right]^{\frac{1}{\alpha+1}} \quad (9)$$

Заменив  $f \sigma_i$  в равенстве (6) через  $\dot{p}$ , получим:

$$\iiint_V \left[ 2 \frac{dp}{dt} \frac{\partial \sigma_i}{\partial a_k} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial a_k} \right] dv = 0 \quad (10)$$

Предположив, что мы ищем  $\sigma_i$  в виде линейной функции от параметров  $a_k$ , получим, что  $\partial \sigma_i / \partial a_k$  не зависит от времени и поэтому соотношение (10) можно проинте-

гировать по времени:

$$\iiint_v \left[ 2p \frac{\partial \sigma_i}{\partial a_k} - \frac{\partial \Pi}{\partial a_k} \Big|_0 + \frac{\partial \Pi}{\partial a_k} \right] dv = 0 \quad (11)$$

Имеем:

$$\sigma = \frac{\tau(t)}{3} (\sigma_{\varphi 0} + \sigma_{r 0})$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} = \frac{1}{3} K \tau (\sigma_{\varphi 0} + \sigma_{r 0})^2 + \frac{1}{G} \tau \sigma_{i 0}^2, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \tau} \Big|_0 = \frac{K}{3} (\sigma_{\varphi 0} + \sigma_{r 0})^2 + \frac{1}{G} \sigma_{i 0}^2 \quad (12)$$

Тогда из (11) получим:

$$\iiint_v \left\{ 2A^{\frac{1}{\alpha+1}} \sigma_{i 0}^{\frac{n}{\alpha+1}} + 1 \left[ \int_0^t \tau^n(t) dt \right]^{\frac{1}{\alpha+1}} - \left[ \frac{K}{3} (\sigma_{\varphi 0} + \sigma_{r 0})^2 + \frac{1}{G} \sigma_{i 0}^2 \right] (1 - \tau) \right\} dv = 0 \quad (13)$$

В этом случае кроме времени  $t$  у нас одна переменная — радиус  $r$ , поэтому интегрирование по объему сводится к интегрированию по радиусу  $r$ . Предполагаем, что  $n$  и  $\alpha$  не зависят от температуры. Введем обозначения:

$$J_1 = \int_a^b 2A^{\frac{1}{\alpha+1}} \sigma_{i 0}^{\frac{n}{\alpha+1}} h dr^2, \quad J_2 = \int_a^b \left[ \frac{K}{3} (\sigma_{r 0} + \sigma_{\varphi 0})^2 + \frac{1}{G} \sigma_{i 0}^2 \right] h dr^2 \quad (14)$$

Тогда (13) заменяется в виде:

$$\left[ \int_0^t \tau^n(t) dt \right]^{\frac{1}{\alpha+1}} - \frac{J_2}{J_1} (1 - \tau) = 0 \quad (15)$$

или интегрируя это уравнение, получим:

$$\int_{\tau}^1 \frac{(1 - \tau)^\alpha}{\tau^n} d\tau = \frac{1}{\alpha + 1} \left( \frac{J_1}{J_2} \right)^{\alpha+1} t \quad (16)$$

Из этого соотношения для заданных  $\alpha$  и  $n$  можно численно получить зависимость  $\tau \sim t$ ; в ряде случаев этот интеграл можно взять в элементарных функциях.

Считая известной зависимость  $\tau$  от  $t$ , получим выражения для смещения  $u$  как функции  $\tau$ . Из (2) имеем:

$$\frac{dp_\varphi}{dt} = f(p, \sigma_i^2) S_\varphi = A p^{-\alpha} \sigma_i^{n-1} S_\varphi \quad (17)$$

Используя выражение (9) с учетом зависимости (15), имеем:

$$p = A^{\frac{1}{\alpha+1}} \sigma_{i 0}^{\frac{n}{\alpha+1}} \frac{J_2}{J_1} (1 - \tau) \quad (18)$$

Подставляя это выражение в (17) и интегрируя, получим:

$$p_\varphi = (1 + \alpha) A^{\frac{1}{1+\alpha}} \sigma_{i 0}^{\frac{n}{1+\alpha}} \frac{J_2}{J_1} (1 - \tau) S_{\varphi 0} \quad (19)$$

Перемещение  $u$  определим из условия  $u = r \varepsilon_\varphi$

$$\frac{u}{r} - \frac{u_0}{r} = \left[ -\frac{\sigma_{\varphi 0} - \nu \sigma_{r 0}}{E} + (1 + \alpha) A^{\frac{1}{1+\alpha}} \sigma_{i 0}^{\frac{n}{1+\alpha}} \frac{J_2}{J_1} \left( \frac{2}{3} \sigma_{\varphi 0} - \frac{1}{3} \sigma_{r 0} \right) \right] (1 - \tau) \quad (20)$$

Воспользовавшись для определения  $u$  выражением  $\partial u / \partial r = \varepsilon_r$ , естественно, получили бы несколько отличный результат, который при сравнении с (20) может дать оценку точности предложенного метода для конкретной задачи.

Оценку точности данного метода можно получить и другим путем. Была принята гипотеза о том, что сохраняется упругое распределение напряжений. Предположим, что

$$\sigma_r = \tau \sigma_{r 0} + \tau_1(t) \sigma_{r 1}(r), \quad \sigma_\varphi = \tau \sigma_{\varphi 0} + \tau_1(t) \sigma_{\varphi 1}(r) \quad (21)$$

где на  $\sigma_{r1}$  и  $\sigma_{\varphi 1}$  никаких ограничений пока не накладывается, при этом предполагается, что уравнение (3) выполнено. Начальные условия при  $t = 0$  будут  $\tau = 1$  и  $\tau_1 = 0$ ; считаем  $\tau_1/\tau \ll 1$ , и из окончательного решения получим, в какой области  $t$  это условие выполняется. Тогда

$$\sigma_i = \tau\sigma_{i0} + \tau_1\rho\sigma_{i0} \quad (22)$$

члены с  $\tau_1^2$  отброшены. Считаем, что функции  $\sigma_r$  и  $\sigma_\varphi$  удовлетворяют условиям:

$$\int_a^b \sigma_{i0} \rho \sigma_{i0} h dr^2 = 0, \quad \int_a^b \rho^2 \sigma_{i0}^2 h dr^2 = \int_a^b \sigma_{i0}^2 h dr^2 = J_0 \quad (23)$$

Условия (23) означают ортонормированность функций, по которым раскладывается решение.

Из (2) найдем  $p$ , воспользовавшись (22):

$$p = A^{1+\alpha} \left[ \int_0^t \sigma_i^n dt \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} = A^{1+\alpha} \sigma_{i0}^{\frac{n}{1+\alpha}} \left[ \int_0^t \tau^n dt \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} + \sigma_{i0}^{\frac{n}{1+\alpha}} A^{1+\alpha} \frac{n\rho}{1+\alpha} \left[ \int_0^t \tau^n dt \right]^{\frac{1}{1+\alpha} - 1} \int_0^t \tau_1 \tau^{h-1} dt \quad (24)$$

Здесь было произведено разложение по  $\tau_1$  и оставлены первые степени  $\tau_1$ . Для упрощения оценки будем считать, что материал несжимаем, т. е.  $K = 0$ . Тогда

$$\Pi = \frac{1}{2G} \sigma_i^2 = \frac{1}{2G} \tau^2 \sigma_{i0}^2 + \frac{1}{G} \tau \tau_1 \rho \sigma_{i0}^2 + \frac{1}{2G} \tau_1^2 \sigma_{i0}^2 \rho^2 \quad (25)$$

В данном случае имеем дело уже с двумя неопределенными параметрами  $\tau$  и  $\tau_1$ , поэтому имеем два уравнения из системы (11).

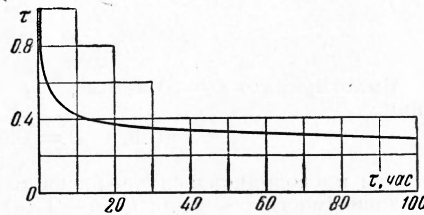
Предварительно запишем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_i}{\partial \tau} &= \sigma_{i0}, & \frac{\partial \sigma_i}{\partial \tau_1} &= \rho \sigma_{i0}, & \frac{\partial \Pi}{\partial \tau} &= \frac{\tau \sigma_{i0}^2}{G} + \frac{\tau_1 \rho \sigma_{i0}^2}{G} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \tau_1} &= (\tau + \tau_1 \rho) \frac{\rho \sigma_{i0}^2}{G}, & \frac{\partial \Pi}{\partial \tau} \Big|_0 &= \frac{\sigma_{i0}^2}{G}, & \frac{\partial \Pi}{\partial \tau_1} \Big|_0 &= \frac{\rho \sigma_{i0}^2}{G} \end{aligned} \quad (26)$$

Из (11) получим два уравнения (здесь, как и ранее, интегрирование по объему заменяем интегрированием по радиусу):

$$\int_a^b \left( 2\rho \sigma_{i0} - \frac{\sigma_{i0}^2}{G} + \frac{\tau \sigma_{i0}^2}{G} + \frac{\tau_1 \rho \sigma_{i0}^2}{G} \right) h dr^2 = 0 \quad (27)$$

$$\int_a^b \left( 2\rho \rho \sigma_{i0} - \frac{\rho \sigma_{i0}^2}{G} + \frac{\tau \rho \sigma_{i0}^2}{G} + \frac{\tau_1 \rho^2 \sigma_{i0}^2}{G} \right) h dr^2 = 0$$



Фиг. 1

Учитывая (23), получим из (27) следующие уравнения:

$$\int_a^b 2\sigma_{i0} \rho h dr^2 - J_0 (1 - \tau) = 0, \quad \int_a^b 2\sigma_{i0} \rho \rho h dr^2 + J_0 \tau_1 = 0 \quad (28)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \int_a^b 2A^{1+\alpha} \sigma_{i0}^{\frac{n}{1+\alpha} + 1} h dr^2 &= A_1 = J_1 \\ \int_a^b 2A^{1+\alpha} \sigma_{i0}^{\frac{n}{1+\alpha} + 1} \rho h dr^2 &= A_2, \quad \int_a^b 2A^{1+\alpha} \sigma_{i0}^{\frac{n}{1+\alpha} + 1} \rho^2 h dr^2 = A_3 \end{aligned} \quad (29)$$

Учитывая их и подставляя (24) в (28), получим

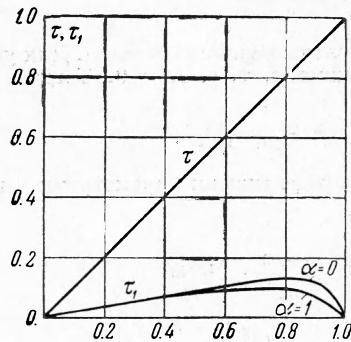
$$\begin{aligned} A_1 \left[ \int_0^t \tau^n dt \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} + \frac{n}{1+\alpha} A_2 \left[ \int_0^t \tau^n dt \right]^{\frac{1}{1+\alpha}-1} \int_0^t \tau^{n-1} \tau_1 dt - J_0 (1-\tau) &= 0 \\ A_2 \left[ \int_0^t \tau^n dt \right]^{\frac{1}{\alpha+1}} + \frac{n}{1+\alpha} A_3 \left[ \int_0^t \tau^n dt \right]^{\frac{1}{1+\alpha}-1} \int_0^t \tau^{n-1} \tau_1 dt + J_0 \tau_1 &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

В качестве первого приближения для определения  $\tau_1$  воспользуемся вторым уравнением, считая  $\tau$  удовлетворяющим соотношению (15). Для определения  $\tau_1$  получим:

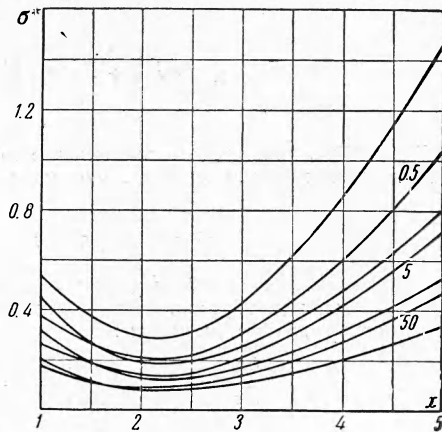
$$\tau_1 = \frac{A_2}{A_1} (1+\alpha) \frac{\tau^k}{(1-\tau)^\alpha} \int_1^\tau \frac{(1-\tau)^\alpha}{\tau^k} d\tau \quad \left( k = n \frac{A_3}{A_1} \right) \quad (31)$$

Теперь для конкретных значений постоянных легко оценить погрешности решения.

*Пример.* В лаборатории испытаний при высоких температурах кафедры теории пластичности МГУ были получены для стали 40X кривые ползучести для температур



Фиг. 2



Фиг. 3

в диапазоне от 400 до 600° и при напряжениях от 8 до 16 кг/мм<sup>2</sup>. По этим данным были определены эмпирические постоянные в законе ползучести вида

$$\dot{\rho} p^\alpha = \left( \frac{\sigma}{s} \right)^h e^{B(T-T_0)} \quad (32)$$

Было принято  $s = 10$  кг/мм<sup>2</sup>; при этом для остальных постоянных найдены значения:

$$\alpha = 0.6, \quad B = 0.06, \quad h = 6, \quad T_0 = 840^\circ \quad (33)$$

Расчеты проводились в случае диска постоянной толщины  $h$ . На фиг. 1 приведены кривые зависимости  $\tau \sim t$  для  $T(b) - T(a) = -100^\circ$ , при отношении  $b/a$ , равном 5, и при  $T(b)$ , равном 450°. На фиг. 2 приведена зависимость  $\tau_1$  от  $\tau$ . На фиг. 3 показано изменение  $\sigma_i$  со временем, при этом

$$\sigma_i^* = \frac{\sigma_i}{\frac{1}{2} E \alpha T(b) - T(a)}$$

знаком плюс отмечены кривые, построенные с учетом поправки.

Поступила  
20.I.1959

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. Физматгиз., М., 1958.
2. Работнов Ю. Н. О некоторых возможностях описания неустановившейся ползучести с приложением к исследованию ползучести. Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1957, № 5.
3. Шестериков С. А. Об одном вариационном принципе в теории ползучести. Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1957, № 2.